

文章编号:1674-2974(2016)02-0043-05

自适应最稀疏时频分析方法的分解能力研究*

李宝庆[†],程军圣,吴占涛,杨宇

(湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室,湖南长沙 410082)

摘要:自适应最稀疏时频分析(adaptive and sparsest time-frequency analysis, ASTFA)方法将信号分解转化为最优化问题,在优化的过程中实现信号的自适应分解.为了研究ASTFA的分解能力,在定义分解能力评价指标(Evaluation Index of Decomposition Capacity, EIDC)的基础上,以双谐波分量合成信号模型来研究幅值比、频率比、初始相位差对ASTFA的影响.同时,将ASTFA方法与经验模态分解(Empirical Mode Decomposition, EMD)、局部特征尺度分解(Local Characteristic-scale Decomposition, LCD)进行对比分析.研究表明,ASTFA方法的分解能力基本不受幅值比的影响,可分解的极限频率比较大,不受初始相位差的影响,该方法的分解能力具有明显的优越性.

关键词:自适应最稀疏时频分析;经验模态分解;局部特征尺度分解;分解能力;相位

中图分类号:TH113.1; TN911.7

文献标识码:A

Research on the Decomposing Ability of the Adaptive and Sparsest Time-Frequency Analysis Method

LI Bao-qing[†], CHENG Jun-sheng, WU Zhan-tao, YANG Yu

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: The signal decomposition is translated into optimization problem in the adaptive and sparsest time-frequency analysis (ASTFA) method, and the signal can be decomposed adaptively in the optimization. In order to research the ASTFA decomposition capability, based on the evaluation index of decomposition capacity (EIDC), this paper studied the effect of amplitude ratio, the frequency ratio and initial phase difference by using the decomposition model with the double harmonic component synthetic signal. And then, the ASTFA was compared with the Empirical Mode Decomposition (EMD) and Local Characteristic-scale Decomposition (LCD). The results show that the decomposition capacity of the ASTFA is not influenced by the amplitude ratio or the initial phase difference, and the decomposed ultimate frequency ratio is larger. The decomposition capacity of the ASTFA method has the obvious superiority.

Key words: adaptive and sparsest time-frequency analysis; EMD; LCD; decomposing ability; phase

自适应时频分析方法可以在对信号分解的过程中根据信号本身的特性自动选择基函数或者其参数,从而实现信号的分解.目前广泛应用的自适应时频分析方法有EMD方法,EMD通过多次迭代将信号分解为一系列具有不同时间尺度的内禀模态函数

(Intrinsic Mode Function, IMF)之和,并通过希尔伯特变换得到分量信号的瞬时频率和瞬时幅值^[1].除EMD方法外,一些新的自适应时频分析方法被提出与研究,如LCD方法.LCD法自适应地将一个复杂信号分解为若干个相互独立的内禀尺度分量

* 收稿日期:2015-01-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375152), National Natural Science Foundation of China(51375152)

作者简介:李宝庆(1984-),男,山西平遥人,湖南大学博士研究生

[†] 通讯联系人, E-mail: baoqing427@163.com

(Intrinsic Scale Component, ISC)之和^[2].实际上,EMD与LCD的分解思路是相同的,都首先采用基于极值点的局部特征尺度参数定义一种瞬时频率具有物理意义的单分量信号,然后据此进行自适应分解,其中EMD定义了IMF分量,LCD定义了ISC分量.因此,EMD和LCD都存在一些共同的缺陷,如模态混淆、分解过程的伪分量问题等^[3-4].另外,单分量信号IMF和ISC的定义缺乏严格的数学证明.

受压缩感知理论以及EMD方法的启发,Hou和Shi于2011年提出了一种自适应最稀疏时频分析(ASTFA)方法^[5-6],主要思想是基于多尺度数据具有内在的稀疏时频分布的特点,采用高斯牛顿迭代法解决非线性优化问题实现信号的分解.ASTFA方法以分解得到的单分量个数最少为优化目标,以单分量的瞬时频率具有物理意义为约束条件,在目标优化的过程中实现信号的自适应分解,并直接得到各个分量的瞬时频率和瞬时幅值,从而获得原始信号完整的时频分布.ASTFA方法与EMD及LCD方法不同,其具有严格的数学基础^[7],每个分量信号都具有明确的物理意义.

实际上,自适应时频分析方法并不是对所有的多分量信号都能实现有效分解,分解能力存在一定的局限性.文献[8-9]对EMD方法的分解能力做了研究,研究表明EMD的分解能力与分量信号的频率比及振幅比有关,当分量的频率太过接近或者高、低频分量的幅值比太小时,EMD方法不能实现分量的有效分离.类似于EMD方法的分解能力研究,文献[10]通过建立分解能力研究模型研究了频率比、幅值比及初始相位差对LCD分解能力的影响,研究表明初始相位差的影响很小,频率比及幅值比的影响明显.以上研究表明,以双谐波分量合成信号的分解效果来评估自适应时频分析方法的分解能力是一种非常有效的方法.本文基于双谐波分量合成信号的分解来研究频率比、幅值比、初始相位差对ASTFA方法分解能力的影响,并与EMD及LCD方法进行对比.结果表明,ASTFA方法的分解能力具有一定的优越性.

1 ASTFA方法

ASTFA方法基于多尺度数据具有内在稀疏分布的特点,在建立包含所有内禀模态函数的过完备字典库的基础上寻找信号的最稀疏表达.ASTFA方法首先建立合适的过完备字典库,然后在过完备字典库中搜索对数据的匹配性最好的自适应基.

1)过完备字典库 D

$$D = \{a(t) \cos(\theta(t)) : \dot{\theta}(t) \geq 0, a(t) \in V(\theta)\}, \quad (1)$$

$$V(\theta) = \text{Span}\left\{\cos\left(\frac{k\theta}{n}\right), \sin\left(\frac{l\theta}{n}\right) : k = 0, \dots, \lambda_n, l = 1, \dots, \lambda_n\right\}. \quad (2)$$

其中 $\dot{\theta}(t) \geq 0$ 是为了保证瞬时频率具有物理意义,约束 $a(t) \in V(\theta)$ 的目的是令 $a(t)$ 比 $\cos(\theta(t))$ 更平滑,Span为空间内所有元素的线性张成.

2)最优化问题

$$\text{Minimize } M$$

$$\text{Subject to: } f(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \cos \theta_i(t), a_i(x) \cos \theta_i(x) \in D. \quad (3)$$

上述优化问题是一个 L_0 优化问题,该问题本身是NP-Hard问题.ASTFA方法将上述 L_0 优化问题转化为 L_2 优化问题,并采用高斯牛顿迭代方法解决该问题.

$$\text{Minimize } \|r_{i-1} - a_i(t) \cos \theta_i(t)\|_2^2,$$

$$\text{Subject to: } a_i(t) \cos \theta_i(t) \in D. \quad (4)$$

式中: $a_i(t) \cos \theta_i(t)$ 为分解得到的第 i 个分量,记为 $u_i(t)$, $a_i(t)$ 为分量的瞬时幅值, $\theta_i(t)$ 为分量的相位函数.

2 ASTFA方法的分解能力研究

2.1 分解能力评估模型与评价指标

首先确定双谐波分量信号分析模型,考察式(5)所示的仿真信号,该仿真信号由两个谐波分量组成.假设 $f_1 < f_2$,则频率比 $F = f_1/f_2$, $F \in [0, 1]$;幅值比 $A = a_1/a_2$, $A \in [0, \infty]$;初始相位差 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi \in [-2\pi, 2\pi]$.

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2). \quad (5)$$

为了评估自适应时频分析方法的分解能力,定义式(6)为单分量信号的分解能力评价指标(Evaluation Index of Decomposition Capacity, EIDC)^[7,9].式中: $x_i(t)$ 为单分量信号的真实值. $Cp_i(t)$ 为自适应时频分析方法分解得到的单分量信号,EMD方法中为 $IMF_i(t)$,LCD方法中为 $ISC_i(t)$,ASTFA方法中为 $u_i(t)$. T 为信号长度.

$$EIDC_i = \frac{\sum_{t=0}^T [x_i(t) - Cp_i(t)]^2}{\sum_{t=0}^T [x_i(t)]^2}. \quad (6)$$

为了保证分解得到的分量全部准确,因此合成信号的分解能力评价指标由式(7)确定.为方便,规

定 $EIDC \in [0, 1]$, 对于 $EIDC > 1$ 的情况则规定 $EIDC = 1$. $EIDC$ 的物理意义为: $EIDC$ 值越小说明分解得到的分量 $Cp_i(t)$ 越接近于真实值 $x_i(t)$, 分解能力越强; $EIDC$ 值越大说明分解得到的分量 $Cp_i(t)$ 越远离真实值 $x_i(t)$, 分解能力越弱. 文献 [7] 和 [9] 研究表明, $EIDC \leq 0.05$ 时, 可认为分量信号被准确分离.

$$EIDC = \max [EIDC_i]. \quad (7)$$

考察式 (8) 所示的仿真信号, 采样频率为 1 024 Hz, $t \in [0, 1]$. 其时域波形如图 1 所示, 分解结果如图 2 所示, $EIDC = 0.05$. 从图 2 中可以看出, 分量信号基本被分离, 但是分量信号的幅值与真实值存在一定的偏差. 因此, ASTFA 方法采用与 EMD 及 LCD 相同的分解上限指标值, 即: 要求 $EIDC \leq 0.05$.

$$x(t) = 5\cos(118.4\pi t) + 5\cos(160\pi t). \quad (8)$$

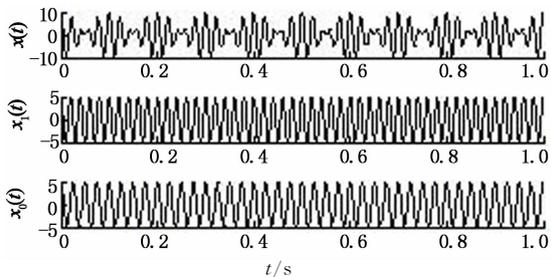


图 1 仿真信号的时域波形 ($F = 0.74$)
Fig. 1 The time domain waveform of the simulated signal ($F = 0.74$)

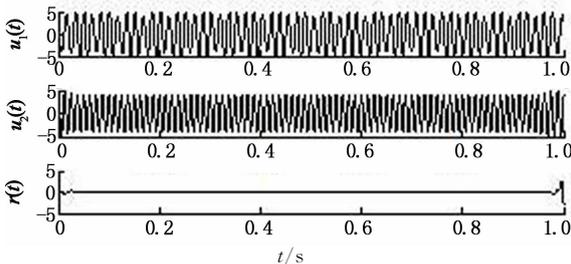


图 2 仿真信号的 ASTFA 分解结果 ($F = 0.74$)
Fig. 2 The ASTFA decomposing results of the simulated signal ($F = 0.74$)

2.2 频率比 F 与幅值比 A 对分解能力的影响

为直观评价幅值比 A 和频率比 F 共同对 $EIDC$ 的影响, 同时更加直观地比较 ASTFA, EMD 和 LCD 的分解范围, 建立式 (9) 所示的分析模型, 得到图 3—图 5 所示的等高线图, 两条等高线为 $EIDC = 0.05$ 和 $EIDC = 1$. 为研究方便, 本文在计算中设定 EMD 和 LCD 的单个分量迭代次数为 10, 设定初始相位差 $\varphi = 0$. 在本文的研究中, 为充分保证分解算法的收敛性, 降低相位函数初始值选择的复杂性, 设定相位函数初始值为仿真信号的理论相位函数.

$$x(t) = 5A\cos(160F\pi t) + 5\cos(160\pi t),$$

$$A \in [0, 10], F \in [0, 1]. \quad (9)$$

两条等高线将 $A-F$ 平面分隔为 3 个区域, $EIDC < 0.05$ 的区域表示分量信号可以完全分离, 定义为信号完全分解区; $EIDC = 1$ 的区域表示分量信号完全不能分离, 定义为信号完全不分解区; $0.05 < EIDC < 1$ 的区域定义为不完全分离区. 由图 3—图 5 可以得到以下结论:

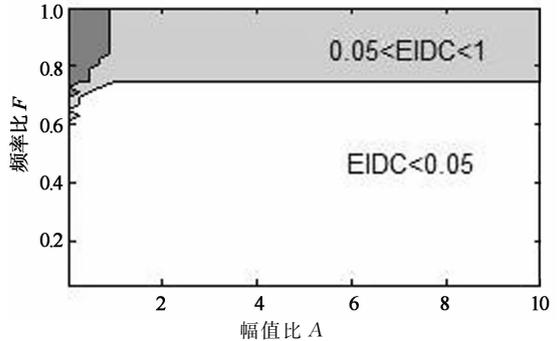


图 3 ASTFA 分解的 EIDC 等高线图
Fig. 3 The EIDC contour map based on the ASTFA

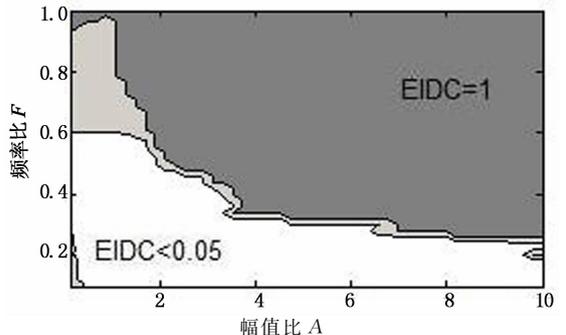


图 4 EMD 分解的 EIDC 等高线图
Fig. 4 The EIDC contour map based on the EMD

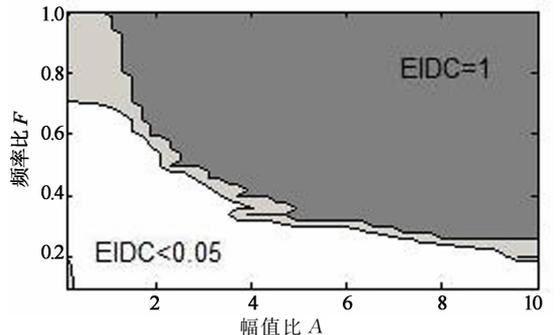


图 5 LCD 分解的 EIDC 等高线图
Fig. 5 The EIDC contour map based on the LCD

1) ASTFA 方法的完全分解区明显大于 EMD 和 LCD 方法的完全分解区, 表明 ASTFA 方法的分解能力明显强于 EMD 和 LCD 方法. 且 ASTFA 方法能够分解的最大频率比为 $F = 0.74$, EMD 方法能够分解的最大频率比为 $F = 0.61$, LCD 方法能够分解的最大频率比为 $F = 0.69$.

2)ASTFA 方法的完全分解区明显小于 EMD 和 LCD 方法的完全分解区,同样表明 ASTFA 方法的分解能力明显强于 EMD 和 LCD 方法.

3)ASTFA 方法的分解能力基本不受幅值比的影响,但是在频率比 $0.61 < F < 0.74$,幅值比 $A < 1$ 时,ASTFA 的分解能力受幅值比的影响.ASTFA 方法的这个性质具有显著的优越性,对于大振幅振动环境下微弱信号的提取具有较大的工程应用价值.

4)EMD 和 LCD 方法的区域划分非常相似,同时在低频率比、低幅值比情况下有分量无法完全分离的情况.这种相似性现象的出现是由于 EMD 和 LCD 采用了相同的分解思路.

为验证图 3—图 5 计算结果的正确性,考察式 (10)所示的仿真信号 $x(t)$, $t \in [0,1]$,设定幅值比 $A = 1$.频率比 F 与 EIDC 的关系如图 6 所示,由图 6 可知,在式 (10)的分析模型下,EMD 能够分解的频率比上限为 $F = 0.61$,LCD 能够分解的频率比上限为 $F = 0.67$,ASTFA 能够分解的频率比上限为 $F = 0.74$,结果表明了计算的正确性.

$$x(t) = 5\cos(160F\pi t) + 5\cos(160\pi t), F \in [0,1]. \tag{10}$$

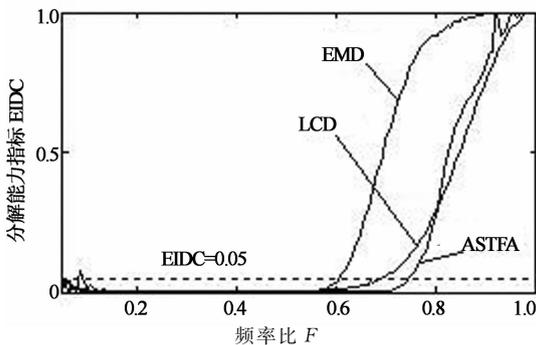


图 6 频率比对分解能力指标的影响 ($A = 1$)
Fig. 6 The frequency ratio's effect to the EIDC ($A = 1$)

为验证图 3—图 5 计算结果的正确性,考察式 (11)所示的仿真信号,设定频率比为 $F = 0.4$.幅值比 A 与 EIDC 的关系如图 7 所示,由图 7 可知,在式 (11)的分析模型下,EMD 能够分解的幅值比上限为 $A = 3.85$,LCD 能够分解的幅值比上限为 $A = 3.35$,ASTFA 的 EIDC 值基本接近于 0,结果不但表明了计算的正确性,而且表明 ASTFA 有良好的分解精度.

$$x(t) = 5A\cos(64\pi t) + 5\cos(160\pi t), A \in [0,10]. \tag{11}$$

为验证幅值比对 ASTFA 方法的影响,考察式 (12)所示的仿真信号,频率比 $F = 0.4$.为更具一般性,设幅值比 $A = 1\ 000$.时域波形如图 8 所示,采用 ASTFA 对仿真信号进行分解,分解结果如图 9 所示.

$$x(t) = 5\cos(64\pi t) + 5\ 000\cos(160\pi t). \tag{12}$$

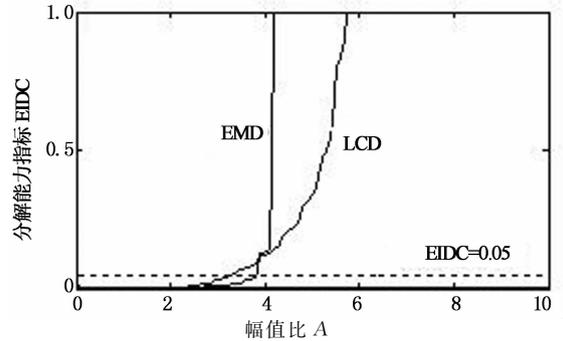


图 7 幅值比对分解能力指标的影响 ($F = 0.4$)
Fig. 7 The amplitude ratio's effect to the EIDC ($F = 0.4$)

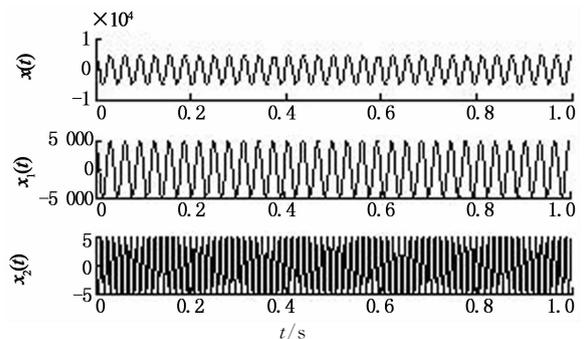


图 8 仿真信号的时域波形 ($A = 1\ 000$)
Fig. 8 The time domain waveform of the simulated signal ($A = 1\ 000$)

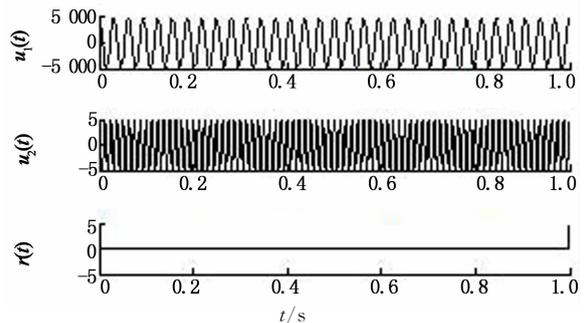


图 9 仿真信号的 ASTFA 分解结果 ($A = 1\ 000$)
Fig. 9 The ASTFA decomposing results of the simulated signal ($A = 1\ 000$)

从图 9 中可以看出,ASTFA 准确地将两个分量信号进行分离.结果证明 ASTFA 方法除在频率比 $0.61 < F < 0.74$,幅值比 $A < 1$ 的范围外,幅值比对信号分解没有影响的性质具有一般性.产生该性质的主要原因是 ASTFA 方法与 EMD 及 LCD 方法不同,其在信号分解中并不依赖于信号极值点的分布.

2.3 初相位差 φ 对分解能力的影响

前面在研究频率比 F ,幅值比 A 对分解能力的影响时,设定初相位差 $\varphi = 0$.现在进一步研究初相位差 φ 对 ASTFA 方法分解能力的影响,初始相位

差 $\varphi \in [-2\pi, 2\pi]$. 为研究初相位差 φ 对 ASTFA 方法分解能力的影响,考察式(13)所示的仿真信号,频率比 $F = 0.4$,幅值比 $A = 1$,位于完全可分解区域. 仿真信号的初相位差 φ 与 EIDC 的关系如图 10 所示. 从图 10 中可以看出,EIDC 值变化不大,初始相位差对分解能力基本无影响.

$$x(t) = 5\cos(64\pi t + \varphi) + 5\cos(160\pi t). \quad (13)$$

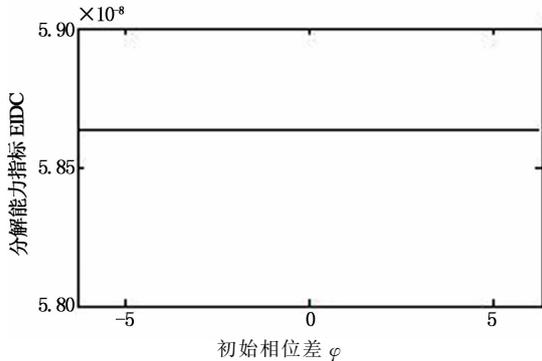


图 10 初相位差对分解能力指标的影响(完全分解区)
Fig. 10 The initial phase difference's effect to the EIDC (complete decomposition region)

为更具一般性,在不完全可分解区域选择一个合成信号,频率比 $F = 0.8$,幅值比 $A = 3$,具体如式(14). 仿真信号的初相位差 φ 与 EIDC 的关系如图 11 所示. 从图 11 中可以看出,EIDC 值变化不大,初始相位差对分解能力基本无影响. 综合图 10 和图 11 可以知道,对于不同的频率比 F 和幅值比 A ,初始相位差 φ 对 ASTFA 方法的分解能力基本无影响.

$$x(t) = 5\cos(128\pi t + \varphi) + 15\cos(160\pi t). \quad (14)$$

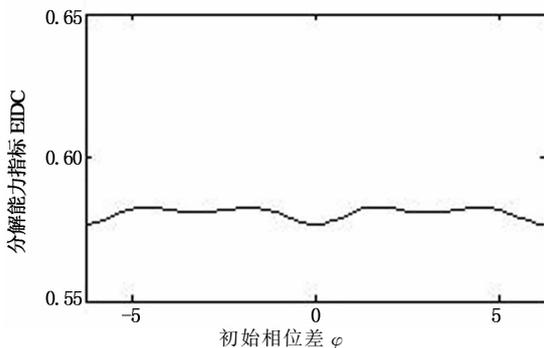


图 11 初相位差对分解能力指标的影响(不完全分解区)
Fig. 11 The initial phase difference's effect to the EIDC (incomplete decomposition region)

3 结 论

根据本文的研究,可以得到以下结论:

1) 频率比对 ASTFA 方法的影响较大,ASTFA 方法可分解的极限频率比为 0.74,该极限频率比优于 EMD 和 LCD 方法.

2) 幅值比对 ASTFA 方法的影响较小,除去频率比 $0.61 < F < 0.74$ 且幅值比 $A < 1$ 的极小范围,ASTFA 可分解任意幅值比的信号. 该性质相比于 EMD 和 LCD 方法具有非常大的优越性.

3) 初始相位差对 ASTFA 方法的分解能力基本无影响.

通过本文的研究发现,与 EMD 和 LCD 方法相比,ASTFA 方法的分解能力具有明显的优越性,ASTFA 方法将会得到广泛的关注. 但是 ASTFA 方法中相位初始值的选择非常关键,需在后续的应用中对相位初始值的选择进行深入的研究.

参考文献

- [1] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society A, 1998, 454: 903-995.
- [2] 杨宇, 曾鸣, 程军圣. 一种新的时频分析方法—局部特征尺度分解[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2012, 39(6): 35-39.
YANG Yu, ZENG Ming, CHENG Jun-sheng. A new time-frequency analysis method—the local characteristic-scale decomposition[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2012, 39(6): 35-39. (In Chinese)
- [3] 汤宝平, 董绍江, 马靖华. 基于独立分量分析的 EMD 模态混叠消除方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(7): 1477-1482.
TANG Bao-ping, DONG Shao-jiang, MA Jing-hua. Study on the method for eliminating mode mixing of empirical mode decomposition based on independent component analysis [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(7): 1477-1482. (In Chinese)
- [4] 郑近德, 程军圣, 杨宇. 部分集成局部特征尺度分解: 一种新的基于噪声辅助数据分析方法 [J]. 电子学报, 2013, 41(5): 1030-1035.
ZHENG Jing-de, CHENG Jun-sheng, YANG Yu. Partly ensemble local characteristic-scale decomposition: a new noise assisted data analysis method [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(5): 1030-1035. (In Chinese)
- [5] HOU T Y, SHI Z Q. Adaptive data analysis via sparse time-frequency representation[J]. Advances in Adaptive Data Analysis, 2011, 3(1/2): 1-28.
- [6] HOU T Y, SHI Z Q. Data-driven time-frequency analysis [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2013, 35(2): 284-308.
- [7] HOU T Y, SHI Z Q, TAVALLALI P. Convergence of a data-driven time-frequency analysis method [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 37(2): 235-270.
- [8] RILLING G, FLANDRIN P. One or two frequencies? The empirical mode decomposition answers[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(1): 85-95.
- [9] FELDMAN M. Analytical basics of the EMD: two harmonics decomposition [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(7): 2059-2071.
- [10] 杨宇, 曾鸣, 程军圣. 局部特征尺度分解方法及其分解能力研究 [J]. 振动工程学报, 2012, 25(5): 602-609.
YANG Yu, ZENG Ming, CHENG Jun-sheng. Research on local characteristic-scale decomposition and its capacities [J]. Journal of Vibration Engineering, 2012, 25(5): 602-609. (In Chinese)