

文章编号:1674-2974(2016)11-0061-07

爆炸移除钢筋混凝土框架柱抗倒塌性能数值模拟*

何庆锋[†], 周超, 易伟建

(湖南大学 土木工程学院, 湖南长沙 410082)

摘要:基于已有的爆炸移除钢筋混凝土框架柱的实验数据,利用有限元软件 AUTODYN 建立了一个分离式与整体式相结合的 4 层 2 跨钢筋混凝土框架结构的三维有限元模型,并采用三阶段分析法,对爆炸移除钢筋混凝土柱的结构动力响应和破坏形态进行了数值模拟,且考虑炸药、空气与结构的流固耦合作用和应变率对材料的动态本构特性的影响.在爆炸移除短边中柱与角柱两种工况下,计算得到的柱破坏形态和梁柱节点动态位移与实验结果吻合较好,还分析了柱内纵筋对 RC 框架结构的动态响应的影响以及柱的破坏失效过程.计算结果表明:对发生塑性和弹性变形区域分别采用分离式和整体式建模,不仅保证了钢筋混凝土框架柱的爆破作用过程数值模拟的真实性和适用性,又大量缩短了计算时间,可为今后爆炸荷载作用下 RC 框架的参数影响分析和连续倒塌破坏模式控制提供参考.

关键词:爆炸荷载;抗倒塌;钢筋混凝土框架结构;AUTODYN;数值模拟

中图分类号:TU375.1;TU375.4

文献标识码:A

Numerical Simulation on Collapse Behavior of RC Frames with a Column Removal under Blast Loads

HE Qing-feng[†], ZHOU Chao, YI Wei-jian

(College of Civil Engineering, Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: Based on the existing experimental investigation on RC frame with a column removal, the three-dimensional finite element simulation with a combination of separated and integral models for a four-story two-span RC frame structure was established by using the finite element software AUTODYN, and analyzed through three stages. The effect of gas-solid interaction was considered to simulate the dynamic response and failure modes of RC frame due to the removal of reinforced concrete columns under explosion loads. In the numerical simulation, the strain rate effects were also taken into account for the dynamical constitutive behaviors of the materials. In the case of the failure of the corner column or the short side column under blast loads, the failure modes of the column and the dynamic displacement of the beam-column joints from FE models agreed well with the experimental results. Meanwhile, the failure process of the column removal and the influence of the longitudinal-steel in the column on the dynamic response of the RC frame structure were examined. Moreover, the simulation results indicate that the way adopting separated and integral models in the plastic and elastic deformation region, respectively, not only ensured the au-

* 收稿日期:2015-12-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51108170,51578228),National Natural Science Foundation of China(51108170,51578228);国家重点专项项目(2016YFC0701400);中央高校基本科研业务费资助项目

作者简介:何庆锋(1977-),男,湖北黄冈人,湖南大学高级工程师,工学博士

[†] 通讯联系人, E-mail:15672101@qq.com

thenticity and adaptiveness of the simulation of the RC frame under column removal, but also reduced substantial computational effort. Therefore, this developed model can provide a reference for the further studies on the parametric analysis and collapse mode control of RC frame structures under blast loads.

Key words: blast loading; progressive collapse; reinforced concrete frame; AUTODYN; numerical simulation

近年来,生产生活的意外爆炸和恐怖爆炸袭击时有发生,对人们生命财产安全构成了极大的威胁.爆炸一旦发生,不仅直接对爆源附近的人员和财产造成杀伤和损坏,而且由于爆炸荷载作用导致建筑结构关键支撑构件的失效,还可能引起建筑结构的局部或整体倒塌,从而加剧灾难程度.因此防止局部构件失效导致结构发生不成比例的连续倒塌破坏成为减少人员伤亡和财产损失的主要目标.

由于爆炸荷载具有传播速度快,峰值大,作用时间短等特点,爆炸冲击荷载作用下钢筋混凝土构件和结构的动力响应很复杂.近些年,国内外专家学者已在对爆炸荷载作用下钢筋混凝土构件和框架进行了一系列的研究,如 James T. Baylot^[1-2] 等通过实验研究了一个 1:4 的 2 层钢筋混凝土框架在外爆炸荷载作用下的损伤特征和动态响应;Sasani^[3] 等利用 SAP2000 软件研究了某 11 层钢筋混凝土结构遭受爆炸荷载后的抗连续倒塌性能;何庆锋等^[4] 曾通过两榀两跨单层平面框架试验,研究了平面框架局部构件失效后的静、动力特性. Tonatiuh Rodríguez-Niki^[5] 通过模拟爆炸加载实验研究了钢筋混凝土构件在拟爆炸荷载作用下的动态响应和破坏形态;Hao^[6] 等采用一种新方法对一榀 2 跨 6 层混凝土框架结构在爆炸荷载作用下进行了数值模拟,并验证了方法的有效性和准确性;Wang^[7] 等对 3 组不同尺寸方形钢筋混凝土板进行了近爆实验,研究了不同构件尺寸和比例距对板的破坏程度的影响,并得到了预测挠度和层裂半径的经验公式.匡志平等^[8] 对 3 根两端铰接低配箍钢筋混凝土梁在爆炸荷载下的力学性能进行试验研究,分析了梁的裂缝、应变和挠度变化情况.高超^[9] 等对一个几何相似比例为 1:8 的 3 层 RC 框架结构模型进行试验,研究在内外爆炸荷载下框架结构的动力响应、失效模式和连续倒塌机理.由于爆破作用过程的复杂性,钢筋混凝土框架在柱内爆炸荷载作用的动力响应和破坏形态的研究较少.

本文基于已有的实验数据,利用非线性有限元显式动力分析软件 AUTODYN 对 4 层 2 跨钢筋混

凝土框架爆破移除支撑柱作用过程进行数值模拟计算,研究了爆炸荷载分别移除钢筋混凝土中柱和角柱后结构的动态动力响应和破坏形态,为减少计算时间,计算模型主要采用分离式与整体式相结合有限元模型,本文的数值与实验结果能为今后爆炸荷载作用下 RC 框架的参数影响分析和连续倒塌破坏模式控制提供参考.

1 有限元模型的建立

1.1 实验模型

为验证爆炸移钢筋混凝土框架柱的数值模拟结果,本文对文献[10]中的钢筋混凝土框架爆炸试验进行了数值模拟计算,主要模拟了 2 种试验工况,即爆破移除边中柱(柱 B1)以及角柱(柱 A3).钢筋混凝土框架的尺寸与配筋如图 1 所示,实验工况详细信息如表 1 所示.

表 1 实验工况情况
Tab. 1 The cases of test

工况	爆破柱	炸药量 /g	等效 TNT /g	楼板荷载布置
移除边中柱	B1	180	117	1~2 轴之间的楼板施加 6 kN/m ² 砝码
移除角柱	A3	120	78	2~3 轴之间的楼板施加 6 kN/m ² 砝码

1.2 有限元模型和网格划分

基于文献[10],运用 AUTODYN 软件建立等尺寸的 4 层 2 跨钢筋混凝土框架结构的有限元模型,通过试算框架结构的分离式有限元模型,确立发生塑性变形的构件,为了提高计算速度,仅对发生塑性变形的构件采用分离式建模,其他构件采用整体式建模.分离式建模中钢筋和混凝土单元采用共用节点,单独考虑钢筋与混凝土单元的承载贡献,体现 2 种材料力学性能的差异,但混凝土达到极限承载力而发生侵蚀,钢筋单元仍继续承担荷载直至达到失效.整体式建模是将钢筋分布于整个单元中,并把单元视为连续均匀材料,单元的刚度矩阵是混凝土与钢筋的组合.工况 1 时,A 至 C 纵向框架梁(1×A

~C)、1 至 2 横向框架梁(1~2×B)和一层框架柱(B1)采用分离式建模,其他构件采用整体式建模;工况 2 时, B 至 C 纵向框架梁(3×B~C)、2 至 3 横向框架梁(2~3×B)和一层框架柱(A3)采用分离式建模,其他构件采用整体式建模,两工况计算模型如图 2 所示。

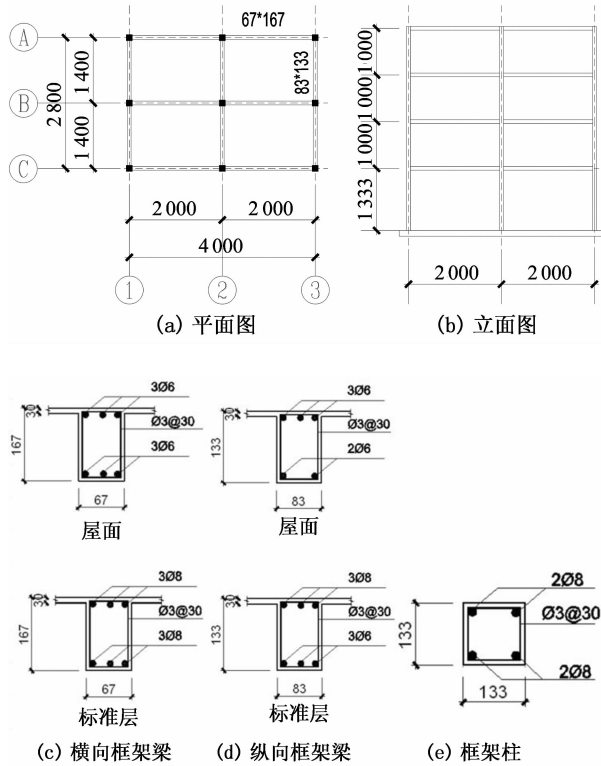


图 1 试验框架尺寸与配筋(mm)
Fig. 1 Dimensions and reinforcement details of test frame(mm)

为了模拟柱被爆破移除的过程,采用“炸药-空气-结构”相互作用的耦合模型.钢筋混凝土框架采用 lagrange 网格进行建模,网格尺寸为 20.75~41.5 mm,考虑到爆炸荷载作用时间短,通常假定钢筋和混凝土之间的粘结完好,不发生相对滑移,即建模时钢筋和混凝土采用共节点建模.空气和炸药采用 Euler 建模,网格尺寸为 10 mm,空气界面设为物质流出,由于实验采取炸药置于柱内瞬间移除框架柱的爆破方式,从而炸药产生的冲击波对结构的影响范围较小,所以只需考虑局部“炸药-空气-结构”相互作用,如图 2 所示.同时为了避免钢筋和混凝土单元严重畸变导致计算困难,在混凝土和钢筋材料模型中加入 Erosion 准则,该准则是 AUTO-DYN 中常采用的材料失效模型,可以对材料定义多

种失效标准,主要有几何应变、塑性应变等.在计算中,这种算法将达到失效标准的单元自动删除,不再承受荷载,以此来模拟混凝土的破坏和钢筋的断裂.即钢筋和混凝土的失效塑性应变分别取 0.1^[5]和 0.01^[11],即当单元的塑性应变达到这个值时单元失效被删除。

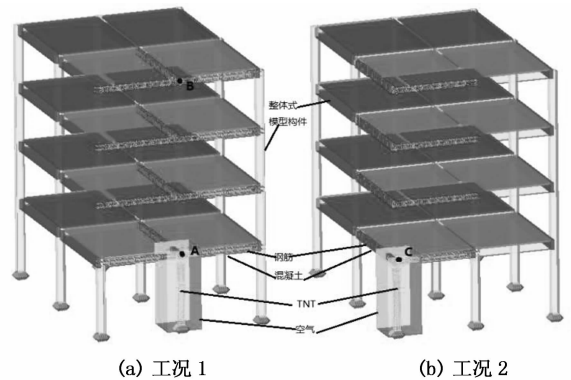


图 2 钢筋混凝土框架结构有限元模型

Fig. 2 Finite element model of RC frame structure

1.3 材料模型

为了较好模拟爆破移除框架柱的结构动力响应和破坏形态,关键是正确描述材料的本构关系.对于文献[10]所用二号岩石乳化硝铵炸药,本文采用等效 TNT 当量进行模拟,当量系数取 0.65^[12],即数值模拟工况 1 与工况 2 所用 TNT 量分别为 117 g, 78 g.

对 TNT 炸药和空气的材料模型分别采用 JWL 状态方程和理想气体状态方程描述,该材料模型得到的爆炸冲击波模拟荷载与实验值吻合较好^[13],其是目前模拟爆炸荷载常用的材料模型.空气材料模型参数为:初始密度为 1.225 kg/m³;绝热常数为 1.4;初始内能为 2.068×10⁵ J/kg. TNT 具体计算参数见表 2,其中 ρ 为密度; A, B, γ_1, γ_2 和 w 为材料常数; D 为爆速; e_0 为初始内能; P_{CJ} 为 C-J 压力.

表 2 TNT 材料参数
Tab. 2 Parameters of TNT materials

ρ /(kg·m ⁻³)	A /GPa	B /GPa	γ_1	γ_2
1 630	372.1	3.231	4.15	0.95
w	D /(m·s ⁻¹)	e_0 /(kJ·m ⁻³)	P_{CJ} /GPa	
0.3	6 930	7	21	

炸药起爆是在短时间内释放巨大的能量,在这个过程中,爆炸荷载作用下的局部材料的应变率会

高达 $10 \sim 1\,000 \text{ s}^{-1}$ ^[14],在这种高应变率情况下,钢筋的强度能够提高 50%,混凝土的抗压强度能够提高 100%^[14-15],因此,本文在计算时考虑了钢筋和混凝土的应变率效应.计算中,钢筋采用 Johnson-Cook 材料模型,该模型能够较好地描述材料在大变形、高应变率和高温下的力学性能,在爆炸荷载条件下,由于热传递的速度远远小于爆炸冲击波传播的速度,钢筋单元中的热效应可以忽略^[16-17],所以本文钢筋单元不考虑热效应,具体模型参数见表 3,其中 ρ 为密度, K 为体积模量, G 为剪切模量, A 为屈服强度, B 为硬化常数, n 为硬化指数, C 为应变率常数, $\dot{\epsilon}_0$ 为参考应变率.

表 3 钢筋材料参数
Tab. 3 Parameters of steel materials

	ρ /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	K /GPa	G /GPa	A /MPa
纵筋	7 830	159	81.8	310
箍筋	7 830	159	81.8	395
	B /MPa	n	C	$\dot{\epsilon}_0$ /(s^{-1})
纵筋	254	0.369	0.023	1.0
箍筋	299	0.350	0.021	1.0

混凝土的模拟计算过程中,采用 RHT 材料模型,该强度模型引入了 3 个极限面,即弹性极限面、失效面和残余强度面,可以较好地描述混凝土材料的屈服强度、失效强度及残余强度的变化规律,较适合于模拟混凝土材料在爆炸载荷作用下的动态响应,如图 3 所示.具体参数见表 4,其中 ρ 为密度; K 为体积模量; G 为剪切模量; f_c 为单轴抗压强度; f_t 为单轴抗拉强度; A, N, Q_0 为材料常数; B_0 为压力影响系数.

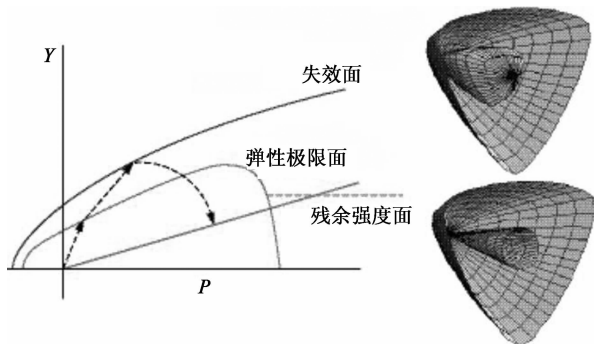


图 3 RHT 模型弹性极限面、失效面和残余强度面
Fig. 3 Elastic limit surface, failure surface and residual strength surface of RHT model

表 4 混凝土材料参数
Tab. 4 Parameters of concrete materials

ρ /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	K /GPa	G /GPa	f_c /MPa	f_t /MPa
200	15.56	11.67	27	2.7
	A	N	Q_0	B_0
	1.6	0.61	0.680 5	0.010 5

对于整体式建模构件,由于在整个计算过程中,构件均处于弹性变形阶段,故可以采用折合钢筋与混凝土刚度的 RHT 混凝土模型.折合刚度是根据梁、柱不同配筋率对 RHT 模型体积模量和剪切模量进行调整.

2 爆破移除模拟计算结果

为了保证计算结果的精度,同时缩减计算时间,本文采用三阶段的模拟方法:①对结构施加重力 800 ms 至结构达到静力平衡;②在结构静力平衡的基础上,建立空气和炸药模型,计算爆炸对结构的作用,持续时间 7.2 ms(试算得知,起爆 4 ms 后,爆炸冲击波对结构作用力很小,可以忽略);③移除空气、炸药和结构部分失效单元,对剩余结构进行非线性动力分析.

图 4 所示为爆破移除中柱和角柱两工况下的数值模拟结果与实验^[10]现场照片对比图.从模拟的破坏形态图可以看出,被爆柱在炸药作用下,混凝土完全飞溅剥离混凝土结构柱,受力钢筋外鼓变形,箍筋飞离,模拟结果与试验结果吻合良好.图 5 所示为被

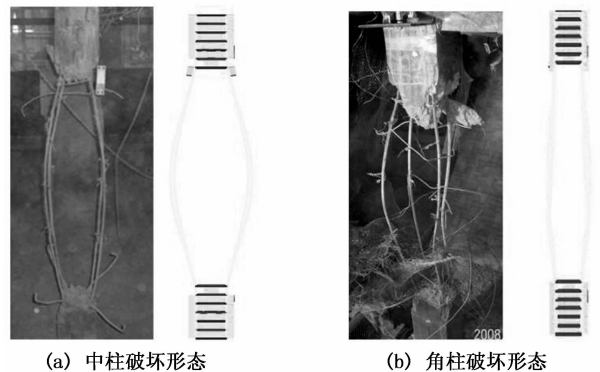


图 4 被炸柱的实验与计算破坏对比
Fig. 4 Comparison of the failure of the column removal under blast loads between the experimental and computational result

炸柱的柱顶节点竖向位移试验与计算对比图。从图中可以看出,曲线吻合较好,这表明采用本文所述的计算模拟参数能够较好地模拟微差爆破移除钢筋混凝土柱的作用过程。

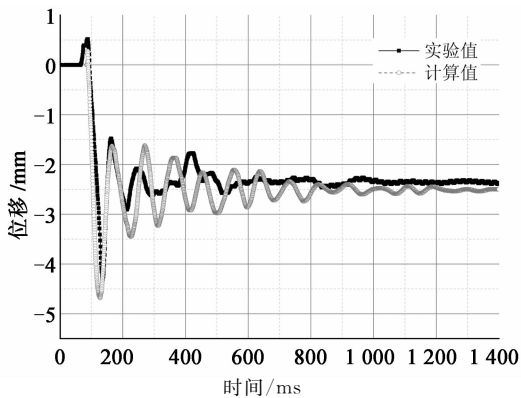
从图 5(a)所示的节点位移对比曲线可以看出,爆炸后,框架结构先向上运动,其实验和计算的节点向上最大位移分别为 0.16 mm 和 0.20 mm,这是由于爆炸冲击波引起,但持续时间较短。其中数值模拟持续时间较实验结果更短,这是因为实验采用微差爆破方式对框架柱实施爆破,而真实的模拟微差爆破较困难,本文数值模拟采用同时起爆方式对框架柱实施爆破,所以导致数值模拟 B 节点向上运动时间较实验结果短和响应更迅速。随着爆炸冲击波对结构作用减弱,结构在纵向钢筋(见图 4(a))和自重共同作用下开始向下运动,向下最大位移为 5.81 mm(实验值 6.12 mm)。结构在阻尼的衰减作用下,最终内力慢慢达到平衡后静止下来,其最终向下永久位移为 2.75 mm(实验值 2.7 mm)。

后,框架结构先向上运动,其向上运动最大位移为 0.28 mm(0.52 mm),比图 5(a)向上运动位移稍大,这是由于角柱约束比中柱约束弱些,即拆除角柱较拆除中柱更容易引起结构发生连续倒塌^[16]。随着爆炸冲击波对结构作用减弱,结构在纵向钢筋(见图 4(b))和自重共同作用下开始向下运动,向下最大位移为 4.68 mm(4.3 mm)。相比图 5(a),由于角柱爆破过程中所使用的炸药量略少,导致纵向钢筋外鼓对上部结构拉力相对较小,从而节点向下位移相对较小。节点向下永久位移为 2.5 mm(2.40 mm)。

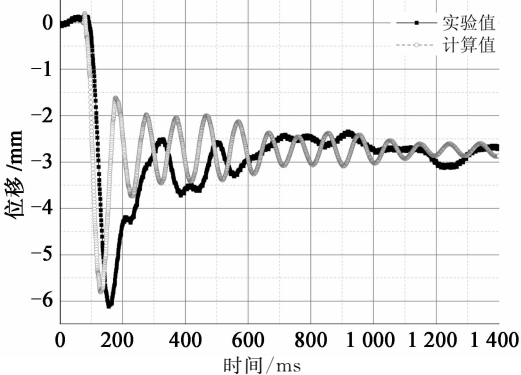
3 中柱失效后倒塌性能分析

3.1 失效过程

图 6 为 A 节点在爆破移除中柱后的竖向位移时程曲线,图 7 为中柱在炸药爆破作用下的破坏过程。从图 7(a)~(c)中可以看到,炸药起爆首先形成球形的爆炸冲击波,冲击波使被炸柱中部混凝土迅速破碎,部分箍筋也被拉断,爆炸冲击波对结构产生的向上冲击力大于结构自重,使结构向上运动,从而导致纵筋拉直,纵筋各单元段应力接近,这一过程对应图 6 中 0~2 ms 运动曲线。图 7(d)~(h)为结构向下运动阶段,随着爆炸冲击波对结构的向上作用力减弱,上部结构对底层柱纵筋的向上拉力转为向下压力,且纵筋在爆炸冲击波的横向作用下,纵筋开始向外弯曲变形,从而加剧了上部结构向下运动。起爆 7.2 ms 时,被炸柱中间部分箍筋几乎全部被拉断,到 55.8 ms 时,纵筋外鼓程度最大,节点 A 向下运动达到最大位移(6.03 mm)。



(a) 中柱被炸时 B 节点竖向位移曲线



(b) 角柱被炸时 C 节点竖向位移曲线

图 5 实验与数值模拟的位移曲线对比

Fig. 5 Displacement curve of the experimental and numerical simulation

图 5(b)为爆破移除角柱后的梁柱节点位移曲线。从曲线中可以看出,运动过程与 5(a)类似,爆炸

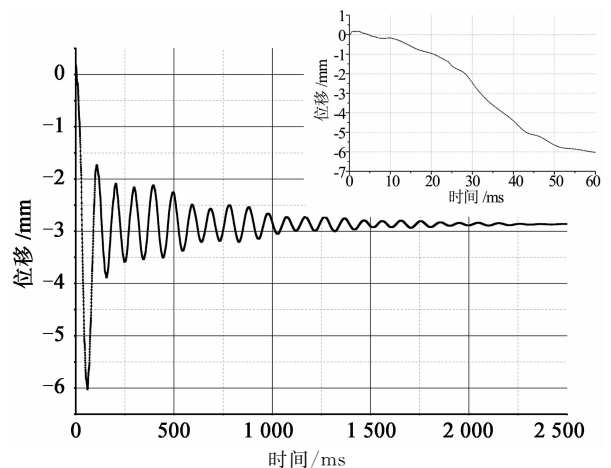


图 6 A 节点位移曲线

Fig. 6 Displacement curve of point A

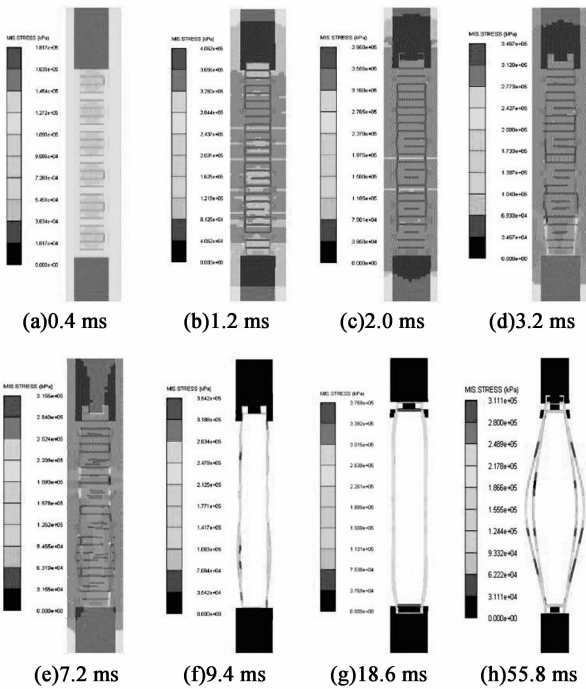


图7 被炸中柱的破坏过程

Fig. 7 Failure process of the middle column removal under blast loads

3.2 纵筋对结构受力影响

图8为爆破中柱中有无纵筋时B节点对应的位移时程曲线。在向上运动过程中,柱内有纵筋向上运动的最大位移分别为0.20 mm和0.24 mm,有纵筋比没有纵筋向上位移要小,这是由于纵筋对上部结构有向下的拉力作用,从而在一定程度上阻碍结构向上运动。在向下运动过程中,被炸柱有无纵筋向下运动的最大位移分别为5.81 mm和4.99 mm,有纵筋比没有纵筋向下位移要大,这是由于爆炸冲击波对纵筋的外鼓作用,导致纵筋对上部结构有向

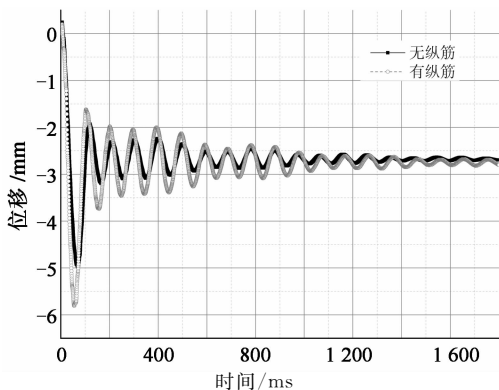


图8 爆破中柱有无纵筋B节点位移曲线

Fig. 8 Displacement curve of point B under the presence or absence of longitudinal reinforcement

下的拉力作用,从而加剧上部结构向下运动。随着位移曲线振荡衰减,被炸柱有无纵筋的最终永久位移分别为2.75 mm和2.68 mm,两者结果较为接近,这是由于在整个计算过程中只有部分构件的局部区域进入塑性阶段,而整体结构表现为弹性状态,如果整体结构表现为非线性状态,则被炸柱内纵向钢筋将加大结构的倒塌风险。

4 结论

本文采用AUTODYN软件建立了炸药、空气和钢筋混凝土框架的三维有限元模拟,并采用三阶段的模拟方法,对钢筋混凝土框架在爆破移除中柱和角柱两工况进行了数值模拟,考虑了应变率对材料的影响以及炸药、空气和结构之间的流固耦合作用,分析了被炸柱破坏过程和被炸柱中纵筋对结构动态响应的影响。得出了以下主要结论:

- 1) 计算得到的爆破移除钢筋混凝土框架中柱与角柱的失效柱的破坏形态、节点动态响应等,与实验结果吻合较好。
- 2) 利用建立的流固耦合数值模拟方法可以合理地展现爆破过程中被炸柱混凝土、箍筋的破坏过程以及纵筋变形与受力过程。
- 3) 对比分析被炸柱中有无纵筋的数值计算结构表明,在爆破过程中,柱内纵筋外鼓变形对上部结构会产生较大的向下拉力作用,导致结构向下运动,从而加大了结构的倒塌风险。
- 4) 验证了运用AUTODYN软件和三阶段分析方法来模拟爆破移除RC框架结构柱的适用性和有效性,为爆炸荷载作用下RC框架的参数影响分析和连续倒塌破坏模式控制提供参考。

参考文献

[1] WOODSON S C, BAYLOT J T. Structural collapse: quarter-scale model experiments[R]. Washington: US Army ERDC, 1999: 4-39.

[2] JAMES T Baylot, TOMMY L Bevins. Effect of responding and failing structural components on the air blast pressures and loads on and inside of the structure[J]. Computers and Structures, 2007, 85: 891-910.

[3] SASANI M, KAZEMI A, SAGIROGLU S, et al. Progressive collapse resistance of an actual 11-story structure subjected to severe initial damage[J]. Journal of Structural Engineering, 2011, 137: 893-902.

- [4] 何庆锋,刘义仁,蒋曲翀,等. 锤击作用下钢筋混凝土框架倒塌性能试验研究[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2015,42(1):40—46.
HE Qing-feng, LIU Yi-ren, JIANG Qu-chong, *et al.* Experimental study of the collapse performance of RC frame under hammer load[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2015, 42(1): 40—46. (In Chinese)
- [5] TONATIUH Rodriguez-Nikl. Experimental simulations of explosive loading on structural components; reinforced concrete columns with advanced composite jackets[D]. California: Earl Warren College, University of California, 2006: 44—209.
- [6] LI Jun, HAO Hong. Numerical study of structural progressive collapse using substructure technique [J]. Engineering Structures, 2013, 52: 101—113.
- [7] WANG Wei, ZHANG Duo, LU Fang-yun, *et al.* Experimental study on scaling the explosion resistance of a one-way square reinforced concrete slab under a close-in blast loading[J]. International Journal of Impact Engineering, 2012, 49: 158—164.
- [8] 匡志平,杨秋华,崔满. 爆炸荷载下钢筋混凝土梁的试验研究和破坏形态[J]. 同济大学学报:自然科学版,2009,37(9):1153—1156.
KUANG Zhi-ping, YANG Qiu-hua, CUI Man. Experiment research and failure modes analyses of RC-beams under blast loading [J]. Journal of tongji University: Natural Science, 2009, 37(9): 1153—1156. (In Chinese)
- [9] 高超,宗周红,伍俊. 爆炸荷载下钢筋混凝土框架结构倒塌破坏试验研究[J]. 土木工程学报,2013,46(7):9—20.
GAO Chao, ZONG Zhou-hong, WU Jun. Experimental study on progressive collapse failure of RC frame structures under blast loading [J]. China Civil Engineering Journal, 2013, 46(7): 9—20. (In Chinese)
- [10] 何庆锋. 钢筋混凝土框架结构抗倒塌性能试验研究[D]. 长沙: 湖南大学土木工程学院, 2009: 97—129.
HE Qing-feng. Research on progressive collapse behavior of RC frame structures[D]. Changsha: College of Civil Engineering, Hunan University, 2009: 97—129. (In Chinese)
- [11] XU K, LU Y. Numerical simulation study of spallation in reinforced concrete plates subjected to blast loading[J]. Computers & Structures, 2006, 84(5/6): 431—438.
- [12] 范俊余,方秦,张亚栋,等. 岩石乳化炸药 TNT 当量系数的试验研究[J]. 兵工学报,2011,32(10):1243—1249.
FAN Jun-yu, FANG Qin, ZHANG Ya-dong, *et al.* Experimental investigation on the TNT equivalence coefficient of a rock emulsion explosive [J]. Acta Armamentarii, 2011, 32(10): 1243—1249. (In Chinese)
- [13] SHIN J, WHITTAKER A S, AREF J A, *et al.* Air-blast effects on civil structures[R]. New York: MCEER Technical Report, 2014: 295—324.
- [14] MALVAR L J, ROSS C A. Review of strain rate effects for concrete in tension[J]. ACI Materials Journal, 1998, 95(6): 735—739.
- [15] BISCHOFF P H, PERRY S H. Compressive behavior of concrete at high strain rate[J]. Materials and Structures, 1991, 24(6): 425—450.
- [16] BALLANTYN Graeme J, WHITTAKER Andrew S, ASCE M, *et al.* Air-Blast effects on structural shapes of finite width [J]. Journal of Structural Engineering, 2010, 136(2): 152—159.
- [17] 陆新征,李易,叶列平. 混凝土结构防连续倒塌理论与设计方法研究[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2011: 32—40.
LU Xin-zheng, LI Yi, YE Lie-ping. Theory and design method for progressive collapse prevention of concrete structure[M]. Beijing: China Building Industry Press, 2011: 32—40. (In Chinese)