

固定铰接体系斜拉桥纵向 一阶振动周期简化计算研究*

张文学,寇文琦,陈盈[†],汪振

(北京工业大学 建筑工程学院,北京 100124)

摘要:斜拉桥纵向一阶自振周期简化计算对方案比选和抗震验算均具有非常重要的意义.首先,根据斜拉桥纵向水平地震惯性力传递路径,建立了固定铰接体系斜拉桥的双质点模型,采用柔度法推导了固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算公式.其次,基于固定铰接体系斜拉桥纵向一阶振型呈现纵向振动与竖向振动相互耦合的特点,利用能量守恒原理推导了固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算公式.与10座已建斜拉桥的有限元计算结果进行对比验证,结果表明,本文提出的2个简化公式的计算精度良好,均可用于固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算.相比之下,柔度法的计算精度更高,可靠性更好.

关键词:固定铰接体系;斜拉桥;纵向振动一阶周期;双质点模型;柔度法;能量原理

中图分类号:U442.5

文献标志码:A

Study on Simplified Calculation of First-order Longitudinal Vibration Period for Fixed Hinge Cable-stayed Bridges

ZHANG Wenxue, KOU Wenqi, CHEN Ying[†], WANG Zhen

(College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The simplified calculation of the first-order longitudinal vibration period for a cable-stayed bridge is very important for the comparison of design plans and the evaluation of seismic performance. Firstly, according to the longitudinal seismic inertia force transmission of cable-stayed bridges, the double-mass model derived by flexibility method was developed to simplify the calculation of the first-order longitudinal vibration. Based on significant coupling between the longitudinal modes and vertical modes, the simplified calculation of the first-order longitudinal vibration period was then investigated by energy principle in fixed hinge cable-stayed bridges. Finally, the two formulas were evaluated by the tests on ten built-up bridges. It is concluded that these two simplified formulas were in good agreement with those predicted by finite element method. The proposed double-mass model has higher accuracy and reliability.

* 收稿日期:2016-01-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51378034/E080505), National Natural Science Foundation of China(51378034/E080505);北京市自然科学基金资助项目(8122007), Beijing Municipal Natural Science Foundation(8122007)

作者简介:张文学(1975-),男,吉林伊通人,北京工业大学副教授,博士

[†] 通讯联系人, E-mail: chying@126.com

Key words: fixed hinge system; cable stayed bridges; the first-order longitudinal vibration period; double-mass model; flexibility method; energy principles

大跨度斜拉桥具有较长的自振周期,其抗震性能备受关注^[1].斜拉桥的自振频率和模态是分析结构抗震、抗风、车桥耦合振动的基础^[2-3].斜拉桥自振频率的简化计算,既可用于在方案设计阶段通过反应谱对结构的地震响应进行估算,又可用于对有限元分析结果进行快速校核^[4-5].因此,建立一套有一定精度的斜拉桥基频计算公式是非常必要的.

斜拉桥的纵向一阶振型对其地震响应的贡献率占绝对优势,因而对纵向一阶周期的简化计算具有重要的意义^[6],已有一些学者提出了斜拉桥基频简化计算方法,张杨永等^[7]将大量有限元数据进行统计分析,对规范规定的主梁竖弯频率估算公式进一步简化,给出了普遍适用且精度更高的主梁竖弯频率的简化计算公式;项海帆等^[3]基于漂浮体系斜拉桥“纵飘”振型具有主梁刚体位移与塔顶纵向位移相等的特点,建立了漂浮体系斜拉桥单质点模型,采用刚度法推导了“纵飘”基频的简化计算公式,但该公式精度较差;袁万城等^[8]在漂浮体系斜拉桥单质点模型的基础上提出了双质点简化模型,该模型较好地弥补了单质点模型的不足,得到了精度更高的“纵飘”基频简化计算公式;Camara 等^[9]采用线性回归的方法得到考虑与不考虑桥塔纵向刚度的斜拉桥基频简化计算公式,研究发现桥塔的刚度对斜拉桥基频有着重要的影响.斜拉桥结构体系包括漂浮体系、半漂浮体系、塔梁固结体系和刚构体系^[10],目前关于漂浮体系斜拉桥基频的简化计算已有大量研究,但对纵向固定铰接体系(以下简称为固定铰接体系)斜拉桥基频简化计算的研究还很少.

为此,本文在分析地震惯性力传递路径的基础上^[11],建立了固定铰接体系斜拉桥的双质点模型,基于柔度法推导了固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算公式.其次考虑到固定铰接体系斜拉桥纵向一阶振型呈现出纵向振动与竖向振动相互耦合的特点,基于 Rayleigh 能量法推导了固定铰接体系斜拉桥的纵向一阶自振周期简化计算公式.并与国内 10 座已建斜拉桥的有限元分析结果进行对比验证.

1 地震惯性力传递路径

地震作用下斜拉桥主梁、桥面系的水平地震惯性力传递路径如图 1 所示.其中, H 为主塔高度, h_1 为塔顶到主梁重心的高度, h_2 为主梁重心到塔底的高度.

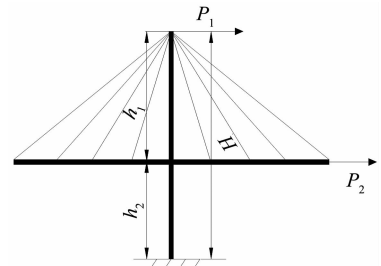


图 1 水平地震惯性力传递示意图
Fig. 1 The sketch map of the longitudinal seismic inertia force transmission

主梁、桥面系的水平地震惯性力分别通过斜拉索传递分量 P_1 和塔梁间连接装置传递分量 P_2 给桥塔.对于固定铰接体系斜拉桥,主梁、桥面系的水平地震惯性力主要通过塔梁间连接装置传至主塔.

2 柔度法

基于图 1 所示的斜拉桥水平地震惯性力传递路径,将上塔柱等效质量 m_p 堆聚在上塔柱重心处,主梁质量和下塔柱等效质量之和 m_d 堆聚在下塔柱重心处,塔柱等效质量取塔柱质量乘以 0.16^[12],则固定铰接体系斜拉桥可简化成双质点模型,如图 2 所示.其中, $h_{1g} = \frac{1}{2}h_1$; $h_{2g} = h_2$; u_p 和 u_d 分别为 m_p 和 m_d 的纵向位移.

将单位水平力分别单独作用在 2 质点处时质点的水平挠度用柔度影响系数 δ_{ij} ($i = p, d; j = p, d$) 表示,则柔度矩阵为:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{pp} & \delta_{pd} \\ \delta_{dp} & \delta_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(h_{1g} + h_{2g})^3}{3K_p} & \frac{h_{2g}}{6K_p} (2h_{2g}^2 + 3h_{1g}h_{2g}) \\ \frac{h_{2g}}{6K_p} (2h_{2g}^2 + 3h_{1g}h_{2g}) & \frac{h_{2g}^3}{3K_p} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式中: $K_p = E_c I_p$ 为主塔弯曲刚度, E_c 为主塔弹性模量, I_p 为塔底截面惯性矩。

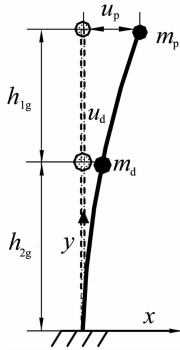


图2 双质点简化模型

Fig. 2 The double-mass simplified model

假设该双自由度体系的自由振动是简谐振动, 忽略拉索的弹性变形和结构的阻尼效应, 基于结构动力学方法可知简化结构的频率方程为:

$$\left| \mathbf{M}_g \delta - \frac{1}{\omega_g^2} \mathbf{I} \right| = 0. \quad (2)$$

式中: 结构质量矩阵 $\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix}$; ω_g 为基于柔度法的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振频率; \mathbf{I} 为单位矩阵。

将式(1)代入式(2), 可解得:

$$\omega_g^2 = \{ (h_{1g} + h_{2g})^3 m_p + h_{2g}^3 m_d - \sqrt{[(h_{1g} + h_{2g})^3 m_p - h_{2g}^3 m_d]^2 + m_p m_d h_{2g}^2 (2h_{2g}^2 + 3h_{1g} h_{2g})^2} \} / \left[\frac{2m_p m_d}{3K_p} h_{2g}^3 (h_{1g} + h_{2g})^3 - \frac{m_p m_d}{6K_p} h_{2g}^2 (2h_{2g}^2 + 3h_{1g} h_{2g})^2 \right]. \quad (3)$$

因此, 基于柔度法的固定铰接体系斜拉桥的纵向一阶自振周期为:

$$T_g = \frac{2\pi}{\omega_g}. \quad (4)$$

3 Rayleigh 能量法

固定铰接体系斜拉桥的一阶振型以主塔的纵弯为主, 并伴有主梁竖弯。

根据斜拉桥结构特点, 引入以下假设: 1) 所有的材料符合虎克定律; 2) 将主梁和主塔均视为欧拉梁, 仅考虑其弯曲变形, 不考虑主塔的扭转变形、横向变形和轴向变形, 且梁的各横截面的中心主惯性轴在同一平面内; 3) 成桥状态下, 恒载沿跨度均匀分布, 斜拉索为直线状, 仅考虑其轴向变形。

3.1 Rayleigh 能量法基本原理

根据能量守恒定律, 当系统进行固有振动时, 没

有能量的输入和损耗, 则机械能保持为一恒量, 即:

$$Q(t) + W(t) = \Pi. \quad (5)$$

式中: Q 和 W 分别代表体系某一时刻的动能和势能 (势能包括重力势能及变形能); Π 为一常数。

当振动体系幅值达到最大值时, 动能为零, 而势能最大; 当体系经过静平衡位置的瞬时, 动能为最大值, 而势能为零。根据能量守恒定律, 在这 2 个特定的时刻, 有:

$$Q_{\max} = W_{\max}. \quad (6)$$

利用式(6)即可求得系统的频率。

3.2 变形能

1) 拉索的变形能: 固定铰接体系斜拉桥纵向一阶振型下单根拉索的变形如图 3 所示。图中: U_G 为纵向一阶振型下主塔塔顶纵向位移的幅值, V_G 为纵向一阶振型下斜拉索与主梁交点处主梁竖向位移的幅值, d 为最外侧拉索与主梁锚固点到主梁与主塔连接点的距离, Δl 为单根拉索伸长量, α 为斜拉索与主梁夹角, 由几何关系可知:

$$\Delta l = V_G \cdot \sin \alpha. \quad (7)$$

对于整个斜拉桥, 斜拉索的总变形能为

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta S_i \Delta L_i = \frac{NE_c A_c \sin^2 \alpha V_G^2}{2l}. \quad (8)$$

式中: ΔS_i 为单根拉索的索力增量; $E_c A_c$ 为拉索的轴向刚度, 计算时取所有拉索轴向刚度的平均值; N 为拉索总根数; l 为所有拉索长度的平均值; 计算时取 α 为最外侧拉索与主梁夹角。

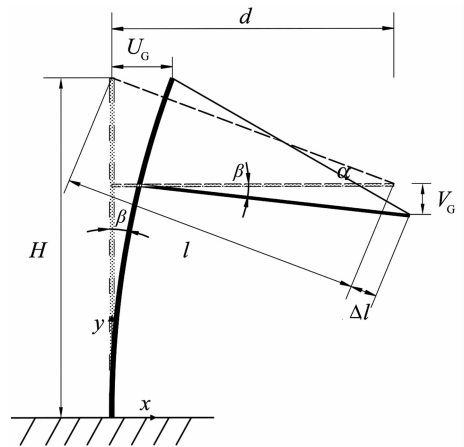


图3 斜拉索的变形图

Fig. 3 Deformation of the cable

2) 主梁的竖向弯曲变形能为:

$$W_b = \frac{1}{2} \int_L E_b I_b (v'')^2 dx. \quad (9)$$

式中: $E_b I_b$ 为主梁竖向弯曲刚度; L 为全桥梁长; $v(x, t)$ 为主梁竖向弯曲振动方程。

3)主塔的纵向弯曲变形能为:

$$W_t = \frac{1}{2} \int_H E_t I_t (u_t'')^2 dy. \quad (10)$$

式中: I_t 为主塔等效截面惯性矩; $u_t(y, t)$ 为主塔纵向弯曲振动方程。

3.3 动能

1)主梁与拉索竖向振动动能为:

$$Q_c = \frac{1}{2} \int_L \bar{m} (\dot{v})^2 dx. \quad (11)$$

式中: \bar{m} 为拉索与主梁质量之和在主梁单位跨长的质量,即拉索和主梁的质量集度。

2)主塔的纵向振动动能为:

$$Q_t = \frac{1}{2} \int_H \bar{m}_t (\dot{u}_t)^2 dy. \quad (12)$$

式中: \bar{m}_t 为主塔的质量集度。

3.4 振动方程

能量法所获得的振动频率的精度,完全依赖于所假设的表示振型的形状函数。

1)根据文献[13-14],取主梁竖向振动方程为:

$$v(x, t) = V_G \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega_G t + \varphi), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (13)$$

式中: ω_G 为基于能量法的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振频率。

2)假定主塔纵向振动方程为:

$$u_t(y, t) = U_G \left(1 - \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2H}\right) \sin(\omega_G t + \varphi). \quad (14)$$

3.5 周期计算

由固定铰接体系斜拉桥的变形特性可知,桥塔与主梁的弯曲角度近似相等,如图3所示,假设不考虑拉索变形,则有:

$$U_G = \lambda V_G. \quad (15)$$

式中: $\lambda = \frac{H}{d}$ 为换算系数。

将式(13)(14)代入式(9)一式(12),得:

当 $\sin(\omega_G t + \varphi) = 1$ 时,

主梁的竖向弯曲变形能为:

$$W_{b\max} = \frac{L}{4} E_b I_b \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 V_G^2. \quad (16)$$

主塔的纵向弯曲变形能为:

$$W_{t\max} = \frac{H}{4} E_t I_t \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^4 U_G^2. \quad (17)$$

当 $\cos(\omega_G t + \varphi) = 1$ 时,

主梁与索的竖向振动动能为:

$$Q_{c\max} = \frac{L}{4} \bar{m} V_G^2 \omega_G^2. \quad (18)$$

主塔的纵向振动动能为:

$$Q_{t\max} = \frac{1}{2} \bar{m}_t \left[\frac{3}{2} H - \frac{4H}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \right] U_G^2 \omega_G^2. \quad (19)$$

将式(8)、式(15)一式(19)对应代入式(6),可解得:

$$\omega_G^2 = \left\{ \frac{NE_c A_c \sin^2 \alpha}{l} + \frac{L}{2} E_b I_b \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + \frac{H}{2} E_t I_t \left(\frac{(2n-1)\pi}{2H}\right)^4 \lambda^2 \right\} / \left\{ \frac{L}{2} \bar{m} + \bar{m}_t \left[\frac{3}{2} H - \frac{4H}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \right] \lambda^2 \right\}. \quad (20)$$

因此,基于能量法的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期 T_G 为:

$$T_G = \frac{2\pi}{\omega_G}. \quad (21)$$

4 实例分析

为验证以上推导的简化计算公式的可靠性,选取了10座典型斜拉桥,其中:济南三桥、松花江大桥、松原大桥、南叶公路桥、海河大桥为单塔斜拉桥;飞云江大桥、金塘大桥、七都大桥、台州湾主桥、苏通大桥为双塔斜拉桥。它们的基本计算参数列于表1。采用有限元软件SAP2000分别建立这10座斜拉桥固定铰接体系有限元模型,进行纵向一阶模态分析,所得纵向一阶振型如图4所示;纵向一阶自振周期见表2。为对比辅助墩对固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的影响,将考虑辅助墩的有限元模型周期计算结果记为 T_{1eg} ,忽略辅助墩的有限元模型周期结果记为 T_{2eg} ,均与式(4)和式(21)计算得到的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期进行对比,由此可知:

1)考虑辅助墩时,采用本文所提出的固定铰接体系斜拉桥双质点简化模型计算10座固定铰接体系斜拉桥纵向振动一阶自振周期的最大相对误差为-5.22%,平均相对误差只有0.05%;忽略辅助墩时,采用本文提出的固定铰接体系斜拉桥双质点简化模型计算10座固定铰接体系斜拉桥纵向振动一阶自振周期的最大相对误差为8.93%,平均相对误差为3.47%。说明无论有无辅助墩,采用本文提出的双质点简化模型来估算固定铰接体系斜拉桥纵向

一阶自振周期均是合理的。

2)考虑辅助墩时,采用能量法计算10座固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的最小相对误差为2.50%,最大相对误差为15.60%,平均相对误差为6.33%;忽略辅助墩时,采用能量法计算10座固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的最小相对误差为2.44%,最大相对误差为16.78%,平均相对误差为9.62%。说明无论有无辅助墩,采用能量法给出的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶周期简化计算公式均能满足工程要求,本文假定的固定铰接体系斜拉桥主塔一阶纵向振动方程是合理的。由于主梁竖向

振动和主塔纵向振动的初始相位角不同,主梁和主塔不一定同时达到动能最大或势能最大的状态,本文并未考虑此因素,故误差略大。

3)通过10座已建斜拉桥实例验证可知,辅助墩对固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期影响较小,本文提出的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期简化计算公式的计算结果均与有限元计算结果符合较好,可用于斜拉桥初步设计和抗震评估。

4)双质点模型与能量法相比,不仅精度高,且离散性小,故推荐采用双质点模型来估算固定铰接体系斜拉桥纵向一阶周期。

表1 算例斜拉桥主要计算参数
Tab.1 Structure parameters of cable-stayed bridges in calculation

桥名	跨径组合/m	塔高H/m	主塔和拉索质量集中度		主梁抗弯惯性矩 I_b/m^4	主塔等效抗弯惯性矩 I_t/m^4	拉索根数 N	拉索倾角 $\alpha/(\circ)$	拉索长度 l/m	拉索轴向刚度 $E_s A_s/(10^5 \text{ kN})$	主塔弯曲刚度 $K_p/(10^{10} \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2})$	h_{1g}/m	h_{2g}/m	$m_p/(10^6 \text{ kg})$	$m_d/(10^6 \text{ kg})$	系数 λ
			$\bar{m}_t/(10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$\bar{m}/(10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1})$												
济南三桥	60+60+160+386	197	116.69	22.70	3.90	66.79	96	23	402	16.77	2.31	77.50	42.00	1.84	15.50	0.59
松花江大桥	268+142+66	153	78.53	31.93	1.35	29.08	92	23	279	17.11	1.00	66.00	21.00	0.96	15.07	0.64
松原大桥	120+120	89	105.47	46.60	1.90	42.34	128	30	126	14.00	1.46	29.00	31.00	0.75	11.60	0.74
南叶公路桥	40+59+140	78	122.89	34.90	1.41	42.67	76	23	140	19.50	1.47	30.50	17.00	0.77	8.56	0.65
海河大桥	310+50+50+40+40	163	155.06	33.10	1.68	21.03	150	23	214	16.77	0.73	71.50	20.00	2.02	17.65	0.66
飞云江大桥	100+210+380+210+100	180	110.08	15.36	1.78	28.67	180	37	182	1.95	1.00	70.00	40.00	1.59	6.40	0.72
金塘大桥	77+218+620+218+77	205	99.34	28.68	1.98	27.97	160	30	328	8.80	0.96	60.50	84.00	1.63	17.74	0.67
七都大桥	58+102+360+102+58	128	163.85	17.96	1.70	20.13	188	30	180	11.70	0.69	49.00	30.00	1.68	7.52	0.76
台州湾主桥	85+145+488+145+85	177	178.63	11.87	2.52	26.32	148	30	251	19.50	1.25	78.00	20.00	2.52	7.55	0.74
苏通大桥	100+100+300+1 088+300+100+100	301	357.14	27.20	11.56	120.00	264	30	544	14.62	6.90	120.00	60.00	8.60	36.00	0.58

注:主塔弹性模量 $E_t = 3.45 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$,主梁弹性模量 $E_b = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$;柔度法计算双塔斜拉桥时, m_p 和 m_d 取整个结构的一半计算。

表2 固定铰接体系计算结果比较
Tab.2 Estimated comparison of consolidation cable-stayed bridge

桥名	有限元计算周期 T_{1eg}/s	有限元计算周期 T_{2eg}/s	柔度法式(4)周期 T_g/s	相对误差 $[(T_{1eg}-T_g)/T_{1eg}]/\%$	相对误差 $[(T_{2eg}-T_g)/T_{2eg}]/\%$	能量法式(21)周期 T_g/s	相对误差 $[(T_{1eg}-T_g)/T_{1eg}]/\%$	相对误差 $[(T_{2eg}-T_g)/T_{2eg}]/\%$
	济南三桥	1.05	1.12	1.02	2.86	8.93	0.98	6.67
松花江大桥	0.77	0.82	0.75	2.60	8.54	0.80	-3.90	2.44
松原大桥	0.29	0.29	0.30	-3.45	-3.45	0.25	13.79	13.79
南叶公路桥	0.22	0.23	0.21	4.55	8.70	0.21	4.55	8.70
海河大桥	1.34	1.36	1.41	-5.22	-3.68	1.18	11.94	13.24
飞云江大桥	1.20	1.31	1.24	-3.33	5.34	1.17	2.50	10.69
金塘大桥	1.92	1.98	1.95	-1.56	1.52	1.65	14.06	16.67
七都大桥	0.89	0.91	0.92	-3.37	-1.10	0.79	11.24	13.19
台州湾主桥	1.41	1.43	1.34	4.96	6.29	1.19	15.60	16.78
苏通大桥	2.43	2.46	2.37	2.47	3.66	2.75	-13.17	-11.79
平均值	—	—	—	0.05	3.47	—	6.33	9.62
标准差	—	—	—	3.61	4.67	—	8.72	8.15
最小相对误差	—	—	—	-1.56	-1.10	—	2.50	2.44
最大相对误差	—	—	—	-5.22	8.93	—	15.60	16.78

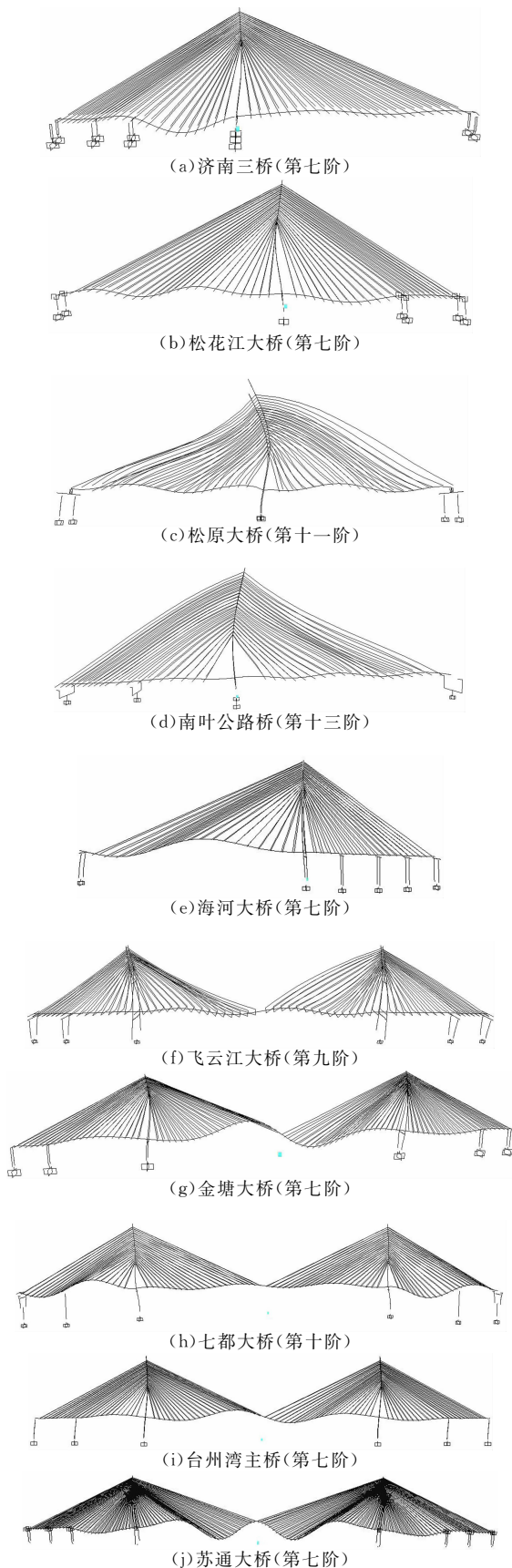


图4 桥例纵向一阶振型图

Fig. 4 The first longitudinal vibration modes

5 结 论

分别采用柔度法、Rayleigh 能量法,推演了固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算公式,并与国内 10 座已建斜拉桥有限元模型计算结果进行了对比分析,主要工作和结论如下:

1)建立了固定铰接体系斜拉桥双质点简化分析模型,并基于该模型采用柔度法推导了纵向一阶自振周期计算公式。

2)基于固定铰接体系斜拉桥纵向一阶振型呈现纵向振动与主梁竖向振动相互耦合的特点,采用 Rayleigh 能量法推导了纵向一阶自振周期计算公式。

3)通过与是否考虑辅助墩的有限元模型周期计算结果进行对比发现,辅助墩对固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期影响较小,2 种公式均可同时适用于有、无辅助墩的固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期的简化计算。

4)虽然采用柔度法和 Rayleigh 能量法均能较准确地计算出固定铰接体系斜拉桥的纵向一阶自振周期,但基于双质点模型采用柔度法求解的精度和可靠性都比 Rayleigh 能量法好很多,因此,在进行斜拉桥的初步设计和方案比选时,推荐采用柔度法进行固定铰接体系斜拉桥纵向一阶自振周期估算。

5)本文所提出的固定铰接体系斜拉桥的纵向一阶自振周期简化计算公式适用于对称结构的斜拉桥,对于非对称固定铰接体系斜拉桥还有待进一步研究。

参考文献

- [1] 陈清军,张婷,陈志海,等.长周期随机地震作用下超大跨斜拉桥的行波效应分析[J].湖南大学学报:自然科学版,2014,41(4):1-9.
CHEN Qingjun, ZHANG Ting, CHEN Zhihai, *et al.* Traveling wave effect analysis of super-long-span cable-stayed bridge under long-period stochastic seismic excitation [J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2014, 41(4): 1-9. (In Chinese)
- [2] 范立础,胡世德,叶爱君.大跨度桥梁抗震设计[M].北京:人民交通出版社,2001:123-142.
FAN Lichu, HU Shide, YE Aijun. Seismic design of long-span bridge [M]. Beijing: China Communication Press, 2001: 123-142. (In Chinese)

- [3] 项海帆,李瑞霖,杨昌众. 悬浮体系斜张桥的近似抗震计算[J]. 结构工程师,1985(1):64-69.
- [4] 赵跃宇,周海兵,金波,等. 弯曲刚度对斜拉索非线性固有频率的影响[J]. 工程力学,2008,25(1):196-202.
ZHAO Yueyu, ZHOU Haibing, JIN Bo, *et al.* Influence of bending rigidity on nonlinear natural frequency of inclined cable [J]. *Engineering Mechanics*, 2008,25(1):196-202. (In Chinese)
- [5] 余报楚,邱文亮,张哲,等. 广东金马大桥空间耦合自由振动分析的理论研究[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版,2007,31(5):898-901.
YU Baochu, QIU Wenliang, ZHANG Zhe, *et al.* Theoretical study on space coupling free vibration analysis of Jinma Bridge [J]. *Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering*, 2007,31(5):898-901. (In Chinese)
- [6] STRAUPE V, PAGELITIS A. Analysis of geometrical and mechanical properties of cable-stayed bridge [J]. *Procedia Engineering*, 2013,57(1):1086-1093.
- [7] 张杨永,肖汝诚. 双塔斜拉桥自振频率的近似计算[J]. 公路工程,2009,34(1):72-76.
ZHANG Yangyong, XIAO Rucheng. Approximate calculation of natural frequency of cable-stayed bridges with double pylons [J]. *Highway Engineering*, 2009,34(1):72-76. (In Chinese)
- [8] 袁万城,闫冬. 斜拉桥纵飘频率简化计算方法[J]. 同济大学学报:自然科学版,2005,33(11):1423-1427.
YUAN Wancheng, YAN Dong. Simplified calculational method of floating frequency for cable-stayed bridges [J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2005,33(11):1423-1427. (In Chinese)
- [9] CAMARA A, ASTIZ M A, YE A J. Fundamental mode estimation for modern cable-stayed bridges considering the tower flexibility[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2014,19(6):213-226.
- [10] 戴公连,栗森,刘文硕,等. 槽型断面梁斜拉桥塔梁固结区受力特性研究[J]. 湖南大学学报:自然科学版,2014,41(1):27-32.
DAI Gonglian, SU Miao, LIU Wenshuo, *et al.* Stress analysis of pier-tower-girder fixed region of cable-stayed bridge with trough girder [J]. *Journal of Hunan University: Natural Sciences*, 2014,41(1):27-32. (In Chinese)
- [11] 黄小国,李建中,郭磊. 地震作用下独塔斜拉桥合理约束体系[J]. 结构工程师,2008,24(6):29-35.
HUANG Xiaoguo, LI Jianzhong, GUO Lei. Appropriate constraint systems for simple-tower cable-stayed bridges under earthquake [J]. *Structural Engineers*, 2008,24(6):29-35. (In Chinese)
- [12] JTG/T B02-01—2008 公路桥梁抗震设计细则[S]. 北京:人民交通出版社,2008:28-29.
JTG/T B02-01—2008 Guidelines for seismic design of highway bridges[S]. Beijing: China Communications Press, 2008:28-29. (In Chinese)
- [13] 彭旺虎,邵旭东. 无背索斜拉桥稳定分析的能量法[J]. 工程力学,2009,26(2):158-162.
PENG Wanghu, SHAO Xudong. Energy method for stability analysis of cable-stayed bridge without back-stays [J]. *Engineering Mechanics*, 2009,26(2):158-162. (In Chinese)
- [14] 彭旺虎,邵旭东. 悬索桥纵向和竖向耦合自振研究[J]. 工程力学,2012,29(2):142-148.
PENG Wanghu, SHAO Xudong. Study on longitudinal and vertical coupling vibration of suspension bridges [J]. *Engineering Mechanics*, 2012,29(2):142-148. (In Chinese)