

## 深基坑双排桩支护排距室内模型试验研究\*

彭文祥<sup>†</sup>, 刘彬

(中南大学 地球科学与信息物理学院, 湖南 长沙 410083)

**摘要:**为了研究深基坑双排桩支护结构最佳排距及支护结构内力, 分别对 $2D$ 、 $3D$ 、 $4D$ 和 $5D$  ( $D$ 为桩径)4种排距的双排桩支护结构进行室内模型试验, 通过千斤顶在基坑顶加压模拟荷载, 不同开挖深度下, 测量模型桩身内力大小及桩顶位移的变化, 分析排距和开挖深度对双排桩支护结构的影响, 包括前后桩正负弯矩大小、差值、桩顶位移等, 得出双排桩支护结构的最佳排距. 研究表明: 双排桩支护排距变化, 对桩弯矩及桩顶位移影响均较大, 且双排桩排距的变化对后排桩的内力影响明显大于前排桩, 对正弯矩的影响小于对负弯矩的影响; 开挖深度对桩顶位移影响较大, 对正弯矩的影响大于负弯矩, 深度位移曲线近似为过原点的二次曲线, 基坑底以上为正弯矩, 坑底下为负弯矩,  $3D$ 排距时桩顶位移最小,  $4D$ 排距时正弯矩最大.

**关键词:**双排桩; 排距; 弯矩; 位移; 试验研究

**中图分类号:**TU473.1

**文献标志码:**A

## Indoor Model Test Study on Row Spacing of Double-row Piles Supporting Deep Excavation Pit

PENG Wenxiang<sup>†</sup>, LIU Bin

(School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** In order to study the optimal row spacing and supporting structure internal forces of the double-row piles supporting structure of deep foundation pit, indoor model tests were carried out for double-row piles supporting structure with row spacing of  $2D$ ,  $3D$ ,  $4D$  and  $5D$  ( $D$  is the diameter of the pile), respectively. Jacking forces were applied to simulate the load of different excavation depths, and the stress in the pile and the displacements at the top of the piles were measured. The effects of row spacing and excavation depth on bending moment and the displacement of these two rows of piles in the double-row piles supporting system were analyzed, and the optimal row spacing was obtained. This research shows that the change of row spacing causes large influences on both the bending moment of the pile and the displacements at the top of the pile. The change of row spacing affects the internal stress of the back pile much more than that of the front pile. It affects the positive bending moment more than the negative bending moment. The curve of depth-displacement is approximately a quadratic function curve passing the origin. It is positive bending moment in the pile above the foundation pit, and it is negative bending moment in the pile below the foundation pit. The displacement at the top of the pile reaches the smallest value when the

\* 收稿日期:2016-12-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50878212), National Natural Science Foundation of China(50878212); 湖南省自然科学基金资助项目(11JJ6042), Natural Science Foundation of Hunan Province(11JJ6042); 中南大学教师研究基金资助项目(2013JSJJ003), Central South University Faculty Research Fund(2013JSJJ003)

作者简介:彭文祥(1968—), 男, 湖南沅江人, 中南大学副教授, 博士

<sup>†</sup>通讯联系人, E-mail: wxpengcsu@126.com.

row spacing is  $3D$ , and the positive bending moment reaches the maximum value when the row spacing is  $4D$ .

**Key words:** double-row piles; row spacing; bending moment; displacement; experimental study

在基坑支护工程中,应用较多的支护结构主要有桩锚支护、土钉墙、复合土钉支护及内支撑等.相对上述支护,双排桩支护结构能较好地控制变形,其最大的优点是不受临近地下空间的制约与影响.

目前,已有不少学者对双排桩支护结构进行了研究.Keshavarzi 等<sup>[1]</sup>对单、双排桩降低轻度弯曲蜿蜒的河流冲刷的影响进行了实验研究.Wang 等<sup>[2]</sup>在实例分析的基础上,采用三维有限元法分析了深基坑双排桩支护结构,考虑了桩土之间的连梁和互动空间的协调作用.Zhou 等<sup>[3]</sup>采用相似理论的原理,对基坑开挖过程中双排桩的变形进行了大型物理模型试验研究.万智等<sup>[4]</sup>运用土拱原理修正了作用于双排桩上的土压力,将土拱影响区域划分为存在竖向土拱效应的直接土压力区和存在水平土拱效应的间接土压力区.郑刚等<sup>[5]</sup>提出了一种新的考虑桩土相互作用的平面杆系有限元双排桩分析模型,将双排桩之间土视为薄压缩层,并以水平向弹簧模拟.应宏伟等<sup>[6]</sup>基于弹性地基梁法,编制了平面杆系有限差分程序,并将计算结果与实测值对比.孙涛等<sup>[7]</sup>及林鹏等<sup>[8]</sup>运用有限元软件 PLAXIS 模拟并结合实际工程的实际监测资料,研究最优排距.刘泉声等<sup>[9]</sup>借鉴 Winkler 地基梁基本思想,在忽略桩土竖向摩擦效应及空间效应的前提下,分析双排桩支护结构的力学机制,建立了考虑桩土效应的双排桩平面杆系有限元模型.王军、申永江等<sup>[10-11]</sup>利用 ANSYS 分析了不同排距下双排桩推力的分担、水平位移、桩身弯矩等.吴刚等<sup>[12]</sup>考虑土压力的空间效应,分析并计算了冠梁对双排桩支护结构的变形协调作用,在弹性地基梁法的基础上,提出了一种新的双排桩支护结构设计计算模型.聂庆科等<sup>[13]</sup>根据工程的实测资料,研究双排桩支护结构上的截面弯矩、变形和土压力分布,并对基坑开挖的空间效应、结构变形与土压力分布的关系及土的相互作用机制等进行分析.李立军等<sup>[14]</sup>采用 FLAC3D 数值法模拟双排桩结构的受力状态,寻求双排桩设计最优参数和模拟复合式双排桩支护结构的受力特征.周一君等<sup>[15]</sup>采用大型物理模型试验模拟双排桩在基坑开挖中的变形.杨光华等<sup>[16]</sup>将基坑面以下的附加压力看作弹性应力,对两排桩与桩间土的作用增加

一个等效土柱刚度.汪彪等<sup>[17]</sup>简化双排桩桩间土加固体,考虑其抗剪及抗弯能力,提出了计算前后排桩桩间土加固作用对结构内力及变形影响的方法.赵明华等<sup>[18]</sup>通过引入非线性的桩-土相互作用模型,提出了一种可考虑桩-土相互作用的悬臂式排桩内力计算方法.

上述对于双排桩支护结构的研究大多基于数值模拟与理论计算,而针对双排桩室内模型的试验研究极少.本文基于室内模型试验,研究双排桩支护结构最佳排距及结构内力,为深基坑支护设计与施工提供借鉴.

## 1 室内模型试验

### 1.1 模型试验的相似比设计

本试验在试验砂箱中进行,试验以  $l/l' = t/t'$  为相似法则,即模型试验材料的几何长度与变形时间成正比,用垂直开挖 0.7 m 的基坑模拟实际工程中 14.0 m 的基坑,模型试验隔 0.20 m 或 0.10 m 开挖一层,共分 4 层对基坑进行开挖,得到该试验的相似模型见表 1.

表 1 试验的相似模型设计

Tab.1 Design of similar model for experiment

名称	基坑深度/m	比例	间隔时间 $t/h$
原型	14.00	1 : 1	48
模型 I	0.40	1 : 35	1.37
模型 II	0.70	1 : 20	2.40
模型 III	1.00	1 : 14	3.43
模型 IV	1.40	1 : 10	4.80

本文按照模型 II 设计,主要研究双排桩支护结构最佳支护排距及双排桩的结构内力,由于材料制作的局限性,必须通过计算先满足材料强度及性能的相似,再使其几何尺寸尽可能相似,见表 2.

表 2 模型与原型试验的相似参数

Tab.2 Similar parameters for model and prototype test

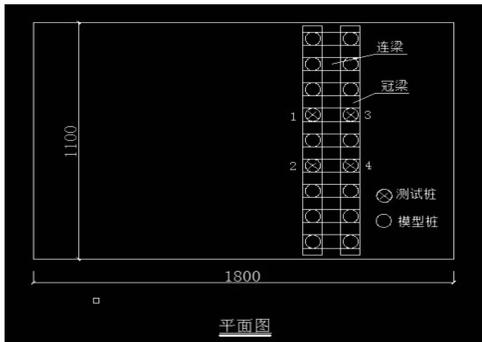
名称	桩径/mm	桩距/mm	弹性模量 $E / \text{MPa}$	基坑深度 /m	坑顶荷载 /kPa
原型	1 000	2 000	$3.2 \times 10^5$	14.0	30.0
模型 II	32	100	$2.1 \times 10^5$	0.7	3.0

### 1.2 模型试验及装置设计

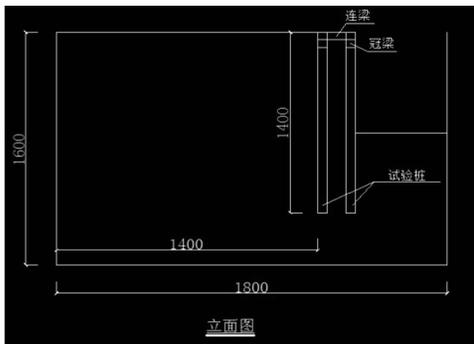
试验在 1.8 m×1.1 m×1.6 m 试验槽内进行,模拟深度为 0.7 m 的基坑,用千斤顶加压模拟荷载,每开挖一层补偿一次.试验桩采用外径  $D=32$  mm,壁厚 0.6 mm 的空心圆钢管,弹性模量  $E=1.9\times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>,剪切模量  $G=8\times 10^4$  N/mm<sup>2</sup>, $I=4.94\times 10^3$  mm<sup>4</sup>;连梁采用 10 mm 厚塑料板;冠梁长度相对较长,且打孔较多,刚度减小,故采用 20 mm 厚塑料板,排距分为 4 组:2D、3D、4D、5D,分别进行试验,见表 3;模型试验分前后 2 排,共 18 根桩,具体布置如图 1 所示.

表 3 模型桩尺寸  
Tab.3 Size of model pile

组号	桩型	桩长/mm	桩径/mm	桩数/根	桩距/mm	排距/mm
1	双排桩	1 400	32	18	100	55(2D)
2	双排桩	1 400	32	18	100	85(3D)
3	双排排桩	1 400	32	18	100	110(4D)
4	双排桩	1 400	32	18	100	140(5D)



(a) 平面图



(b) 立面图

图 1 模型试验布置图

Fig.1 Model test layout

为了模拟基坑开挖,使模型箱中土样受力与实际情况一致以及减少砂箱侧壁边界产生的边界效应,对侧壁进行润滑处理.在两侧壁上先涂上一层机油,再铺上一层摩擦系数很小的塑料薄膜,再在薄

膜上涂抹一层工业凡士林,起到润滑作用.

依据基坑分层开挖原则,砂箱前壁设计 14 块拼装紧密的木板,每开挖 1 级拆除 1~2 块木板,每隔 4 h 开挖 1 级,分级开挖,共 7 次完成基坑开挖.

模型试验样土采用砂土、黏土和水按质量 15 : 3 : 1 的比例配置,均匀搅抖,烘箱法测定其含水率为 37.4%,通过直剪仪测定,得到  $c=3.10$  kPa, $\varphi=32^\circ$ , $\gamma=19.3$  kN/m<sup>3</sup>.模型试验桩采用预埋的方式,分层回填砂土并压实,填满后待样土固结 5 d,再分层开挖,靠近桩身和坑底的土,手工轻挖,防止振动试验桩和扰动坑底土.试验用 DF3817F 动静态应变仪采集应变,桩顶位移采用位移计测定,模型桩埋设与试验装置如图 2 所示,模型桩应变片布置及粘贴如图 3 所示.



图 2 模型桩埋设与试验装置

Fig.2 The model of pile embedment and test device



图 3 模型桩应变片布置及粘贴图

Fig.3 Layout and paste diagram of model pile strain gauge

## 2 试验结果及分析

### 2.1 开挖深度对双排桩内力的影响

由表 4 可知:排距对双排桩内力影响较大,当排

距为 4D 时,前排桩正弯矩最大,排距为 2D 时,前排桩负弯矩最大;当 5D 排距时,后排桩正弯矩最大(33.41 N·m),且负弯矩亦最大(42.04 N·m).开挖深度对双排桩桩身弯矩影响较大,桩身弯矩随着

开挖深度增加而增大.随着开挖深度加大,后排桩的正弯矩大于负弯矩绝对值,开挖深度对后排桩正弯矩的影响大于对负弯矩的影响.

表 4 各开挖深度桩身弯矩  
Tab.4 Bending moment of pile

开挖深度/m	桩身弯矩/(N·m)								
	2D		3D		4D		5D		
	前排桩	后排桩	前排桩	后排桩	前排桩	后排桩	前排桩	后排桩	
0.4	最大正	9.91	6.82	9.21	7.53	9.18	6.76	9.77	5.61
	最大负	-10.23	-7.75	-9.81	-8.57	-9.80	-8.22	-9.82	-6.98
0.6	最大正	23.96	19.16	21.24	16.31	23.62	19.27	17.83	11.81
	最大负	-24.98	-18.35	-24.06	-17.25	-24.40	-17.45	-23.44	-18.21
0.7	最大正	38.53	32.98	39.12	29.85	42.04	28.55	41.82	33.41
	最大负	-39.09	-24.71	-37.5	-23.72	-35.67	-29.82	-38.02	-32.58

2.2 开挖深度对位移的影响

开挖深度对桩顶位移影响较大,位移随开挖深度的增加而增大,且增大速率加快.以深度为横坐标,位移为纵坐标,其曲线近似经过原点的二次抛物线.图 4 表明,开挖深度 0.2 m,2D 至 5D 排距时,桩顶位移分别为 1.22 mm、1.09 mm、1.12 mm 和 1.16 mm;开挖深度 0.4 m,2D 至 5D 排距时,桩顶位移分别为 3.65 mm、3.07 mm、3.45 mm 和

3.32 mm;开挖深度 0.6 m,2D 至 5D 排距时,桩顶位移分别为 6.73 mm、6.09 mm、6.25 mm 和 6.41 mm;开挖深度 0.7 m,2D 至 5D 排距时,桩顶位移分别为 8.67 mm、7.95 mm、8.32 mm 和 9.23 mm.不同排距的双排桩支护结构随开挖深度的增加,双排桩桩顶位移增加速率不同,排距为 5D 时,桩顶位移增加速率最快,排距为 3D 时,增加速率最慢.

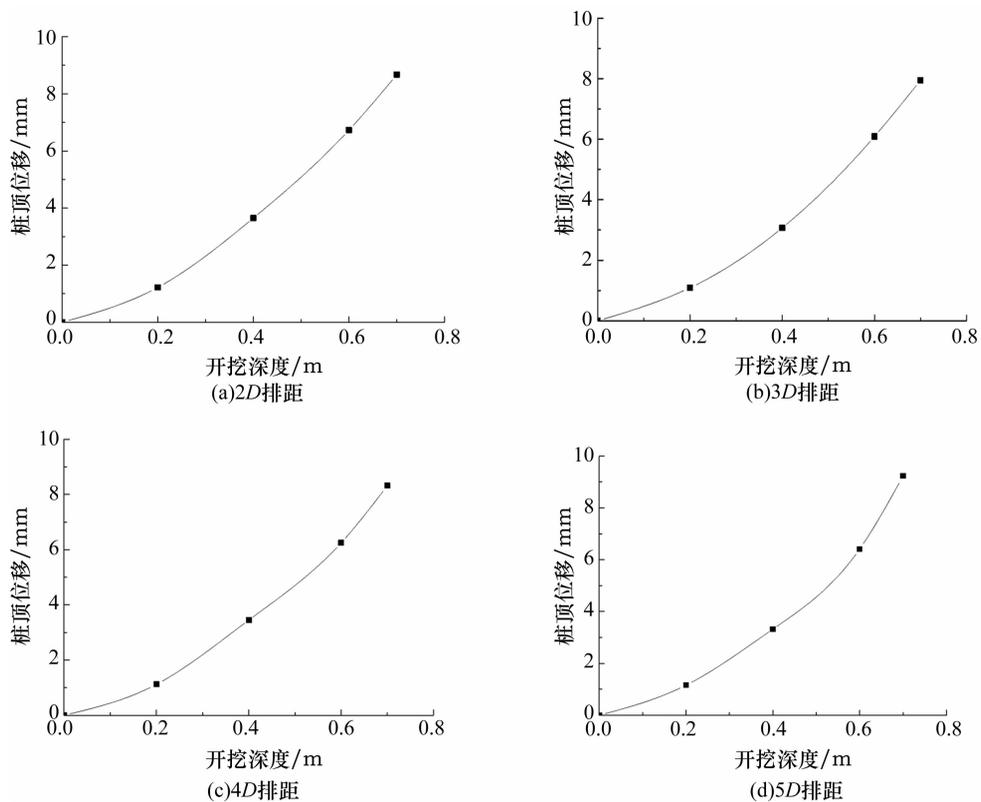


图 4 桩顶位移

Fig.4 Displacement of pile top

### 2.3 不同排距对双排桩内力的影响

从图 5~图 8 看出:双排桩桩身弯矩大致呈 S 形曲线分布,基坑底以上弯矩为正,基坑底以下为负,弯矩零点位于基坑底,与已有研究结论基本吻合.前排桩的负弯矩大于后排桩负弯矩,而后排桩的正弯矩大于前排桩的正弯矩.从表 5 可看出:随排距的增加,前排桩正弯矩变化分别为 1.53%、9.11% 和 8.54%,负弯矩变化分别为-8.74%、-13.21%

和-17.26%;后排桩正弯矩变化分别为-9.49%、-13.40%和 1.30%,负弯矩变化分别为-4.01%、20.68%和 31.85%;排距对正弯矩的影响小于对负弯矩的影响,排距的增加对后排桩的影响稍大于前排桩.前排桩最大正弯矩随排距增加而增加,但是增加的速率减小;前排桩最大负弯矩随排距增加而减小,且减小的速率也减小;后排桩的最大负弯矩随排距增加而增加.

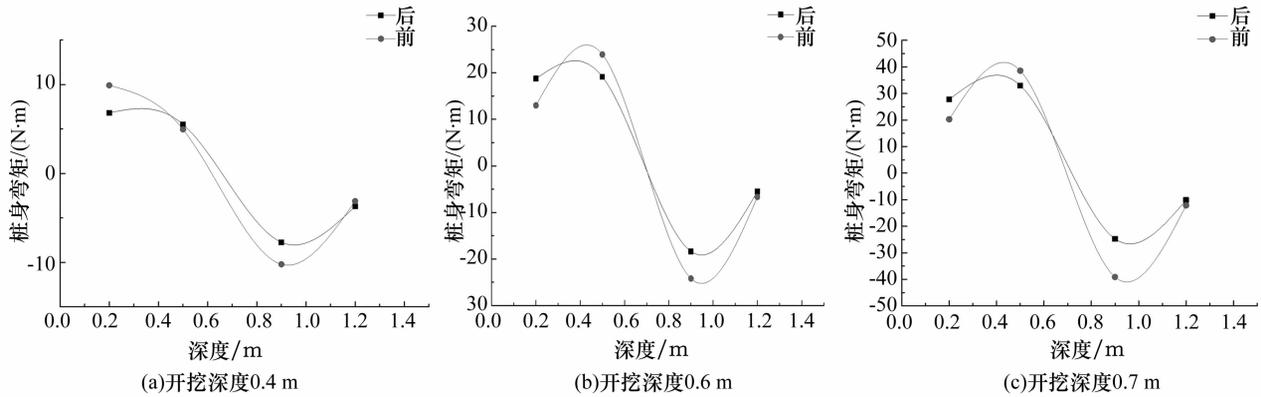


图 5 排距为 2D 时的弯矩(单位: N · m)

Fig.5 The row spacing is 2 times the diameter of the bending moment(unit: N · m)

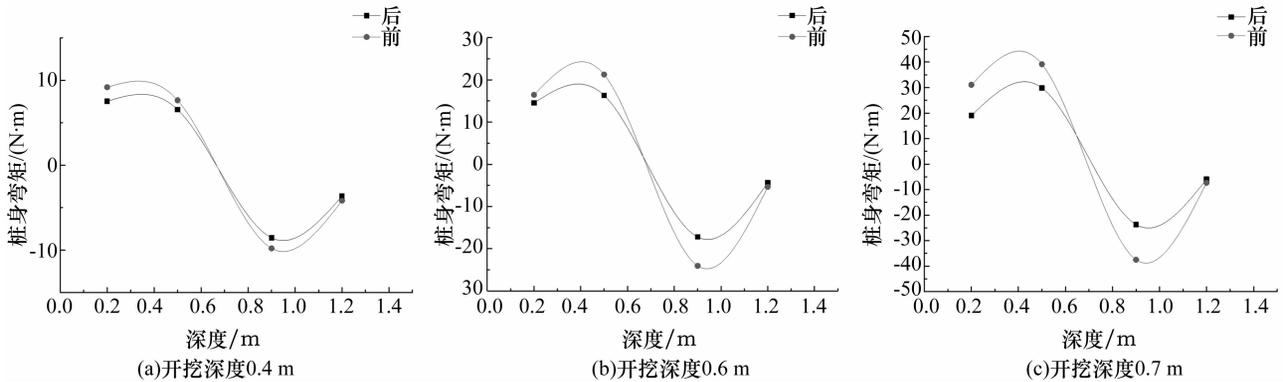


图 6 排距为 3D 时的弯矩(单位: N · m)

Fig.6 The row spacing is 3 times the diameter of the bending moment(unit: N · m)

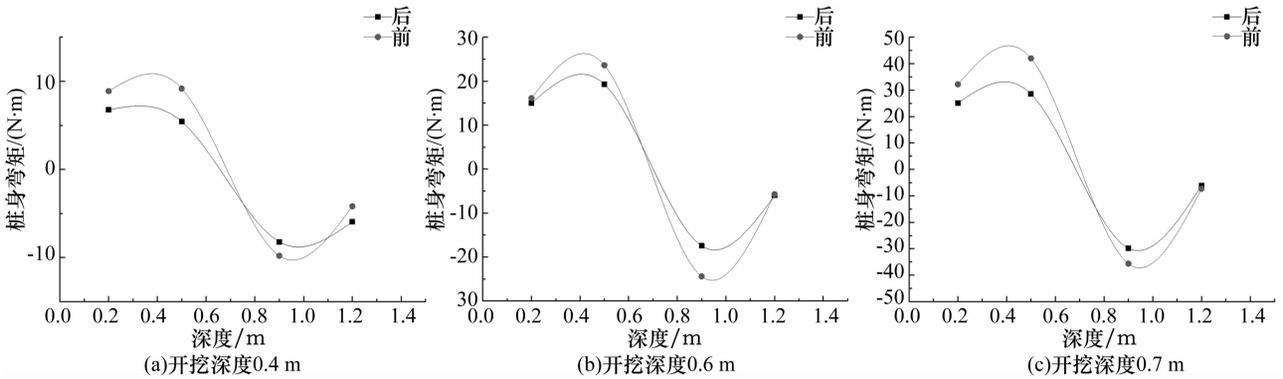


图 7 排距为 4D 时的弯矩(单位: N · m)

Fig.7 The row spacing is 4 times the diameter of the bending moment(unit: N · m)

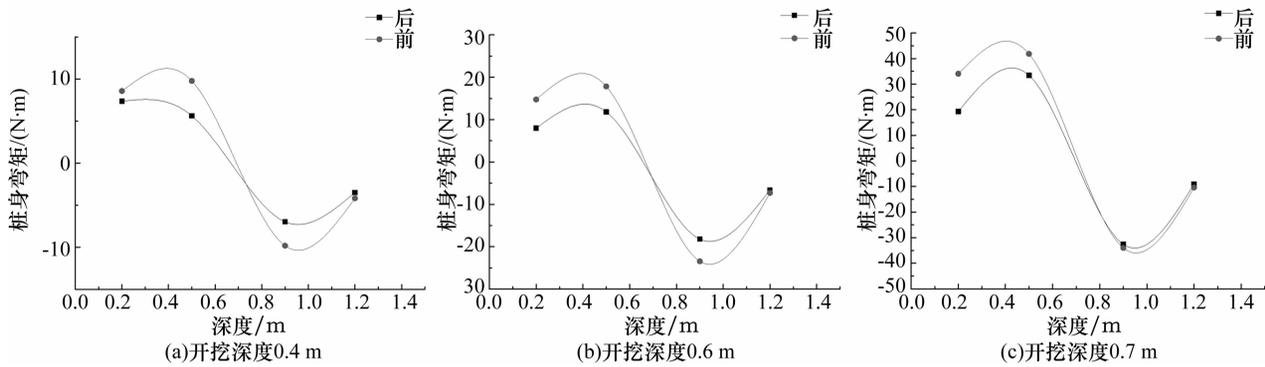


图8 排距为5D时的弯矩(单位: N·m)

Fig.8 The row spacing is 5 times the diameter of the bending moment(unit: N·m)

表5 各排距最大弯矩变化率

Tab.5 Maximum bending moment of each pile

名称	桩身最大弯矩变化率/%			
	2D 排距	3D 排距	4D 排距	5D 排距
前排桩最大正弯矩	0	1.53	9.11	8.54
前排桩最大负弯矩	0	-8.74	-13.21	-17.26
后排桩最大正弯矩	0	-9.49	-13.40	1.30
后排桩最大负弯矩	0	-4.01	20.68	31.85

注:与2D时弯矩对比,负值表示减少,正值表示增加。

表5及表4表明:当排距较小时,最大弯矩随排距减小而减小,排距为2D时,最大弯矩最小,为38.53 N·m;排距为2D时前排桩正负弯矩相差较小,为-2.56 N·m,3D至5D时分别为1.62 N·m、6.37 N·m和7.62 N·m,其差值呈增大趋势;排距为2D时,后排桩的最大正负弯矩的差值为8.27 N·m、6.13 N·m、-1.27 N·m和0.83 N·m,其差值呈减小趋势。

### 2.4 不同排距对桩顶位移的影响

图9可见:随着开挖深度增加,桩顶位移增大,且增加的速度加快;前排桩的弯矩小于后排桩的弯矩,开挖深度为0.2 m时,各排距的双排桩位移曲线近似平行,随着开挖深度的加深,各排距桩顶位移增加值不同,其中排距为5D时增加最快,排距为2D时其次;试验中排距为3D(7.95 mm)和4D(8.23 mm)时桩顶位移较小,排距为3D时最小(7.95 mm),排距为5D时最大(9.23 mm)。

## 3 结论

1)桩身弯矩随开挖深度增加而增大,且增长速率加大。开挖深度增加,后排桩的最大正负弯矩的差值的绝对值增大;而对前排桩最大正负弯矩的差值影响很小。开挖深度对双排桩正弯矩的影响大于其对负弯矩的影响;开挖深度对桩顶位移影响较大,

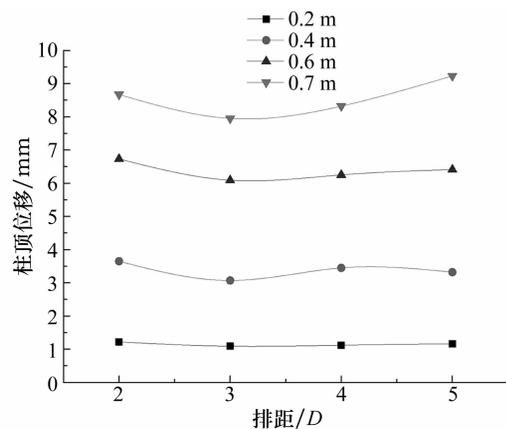


图9 各排距等深度开挖桩顶位移

Fig.9 Displacement of excavation pile under the depth of each row distance

且增长速率加大,深度-位移曲线近似经过原点的二次曲线。

2)排距变化对正弯矩的影响小于对负弯矩的影响,排距的增加对后排桩的影响大于对前排桩的影响。前排桩最大正弯矩随排距增加而增加,但是增加的速率减小;前排桩最大负弯矩随排距增大而减小,减小的速率也减小,即5D排距时,前排桩负弯矩最大;后排桩最大负弯矩随排距增加大致增加。

3)排距对双排桩内力影响较大,当排距小于4D时,最大弯矩随排距减小而减小;前排桩正负弯矩差值随排距增加呈增大趋势;后排桩最大正负弯矩的差值随排距增加大致呈减小趋势。排距过大,前后排桩受力分布不均,后排桩作用减小。

4)排距对桩顶位移影响较大,随着开挖深度的增加,各排距下桩顶位移增大的速率不同,试验中3D排距和4D排距时桩顶位移较小,其中3D排距时最小,5D排距时最大。排距过大,前后排桩受力分布不均,后排桩作用减小,前排桩受力较大;一定程度上,双排桩排距增大时,前后排桩受力不合理。研

究表明:当桩径为 600~1 200 mm,双排桩支护结构排距为 3D~4D 时为最合理。

## 参考文献

- [1] KESHAVARZI A, HAMIDIFAR H, BALL J. Bed morphology in vegetated estuarine river with mild-curved meander bend [J]. Hydrological Sciences Journal, 2016, 61(11): 2033—2049.
- [2] WANG C Y, LI L H. Study of 3-D numerical analysis on influence factors and spatial effect of double-row piles supporting structure in deep pit [C]//Proceedings of 2011 International Conference on Electric Technology and Civil Engineering. New York: IEEE, 2011: 6861—6864.
- [3] ZHOU Y J, YAO A J, LI H B, *et al.* Correction of earth pressure and analysis of deformation for double-row piles in foundation excavation in Changchun of China [J]. Advances in Materials Science and Engineering, 2016(6): 1—10.
- [4] 万智, 王贻荪, 李刚. 双排桩支护结构与计算 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2001, 28(3): 116—131.  
WAN Z, WANG Y S, LI G. Analysis and calculation of retaining structure with double-row piles [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2001, 28(3): 116—131. (In Chinese)
- [5] 郑刚, 李欣, 刘畅, 等. 考虑桩土相互作用的双排桩分析 [J]. 建筑结构学报, 2004, 25(1): 99—106.  
ZHENG G, LI X, LIU C, *et al.* Analysis of double-row piles in consideration of the pile-soil interaction [J]. Journal of Building Structures, 2004, 25(1): 99—106. (In Chinese)
- [6] 应宏伟, 初振环, 李冰河, 等. 双排桩支护结构的计算方法研究及工程应用 [J]. 岩土力学, 2007, 28(6): 1145—1150.  
YING H W, CHU Z H, LI B H, *et al.* Study on calculation method of retaining structure with double-row piles and its application [J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(6): 1145—1150. (In Chinese)
- [7] 孙涛, 刘俊岩, 刘燕. 双排桩支护排距的优化研究 [J]. 岩土工程学报, 2012, 34(S): 616—620.  
SUN T, LIU J Y, LIU Y. Optimal row distance of retaining structure with double-row piles [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(S): 616—620. (In Chinese)
- [8] 林鹏, 王艳峰, 范志雄, 等. 双排桩支护结构在软土基坑工程中的应用分析 [J]. 岩土工程学报, 2010, 32(2): 331—334.  
LIN P, WANG Y F, FAN Z X, *et al.* Application and analysis of retaining structure with double-row piles in soft ground excavation engineering [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(2): 331—334. (In Chinese)
- [9] 刘泉声, 付建军. 考虑桩土效应的双排桩模型及参数研究 [J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 481—494.  
LIU Q S, FU J J. Research on model and parameters of double-row piles based on effect of pile-soil contact [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 481—494. (In Chinese)
- [10] 王军, 王磊, 肖昭然. 双排桩支护排距的有限元分析与研究 [J]. 地下空间与工程学报, 2005, 1(7): 1096—1100.  
WANG J, WANG L, XIAO Z R. Analysis of the interval between double-row piles by finite element method [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2005, 1(7): 1096—1100. (In Chinese)
- [11] 申永江, 孙红月, 尚月全, 等. 锚索双排桩与刚架双排桩的对比研究 [J]. 岩土力学, 2011, 32(6): 1838—1842.  
SHEN Y J, SUN H Y, SHANG Y Q, *et al.* Comparative study of anchor double-row piles [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(6): 1838—1842. (In Chinese)
- [12] 吴刚, 白冰, 聂庆科. 深基坑双排桩支护结构设计计算方法研究 [J]. 岩土力学, 2008, 28(19): 2753—2758.  
WU G, BAI B, NIE Q K. Research on calculation method of double-row piles retaining structure for deep excavation [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 28(19): 2753—2758. (In Chinese)
- [13] 聂庆科, 胡建敏, 吴刚. 深基坑双排桩支护结构上的变形和土压力研究 [J]. 岩土力学, 2008, 29(11): 3089—3094.  
NIE Q K, HU J M, WU G. Deformation and earth pressure of a double-row piles retaining structure for deep excavation [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(11): 3089—3094. (In Chinese)
- [14] 李立军, 梁仁旺. 排距对双排桩结构体系性状影响的数值分析 [J]. 太原理工大学学报, 2012, 43(2): 216—222.  
LI L J, LIANG R W. Numerical analysis on the effect of row distance on double-row piles character row [J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2012, 43(2): 216—222. (In Chinese)
- [15] 周一君, 郑轩, 李浩波, 等. 深基坑工程中双排桩性状的模型试验研究 [J]. 工程地质学报, 2016, 24(S): 791—797.  
ZHOU Y J, ZHENG X, LI H B, *et al.* Study the model test of the traits of double-row piles in deep foundation pit excavation [J]. Journal of Engineering Geology, 2016, 24(S): 791—797. (In Chinese)
- [16] 杨光华, 黄忠明, 姜燕, 等. 深基坑双排桩计算模型的改进 [J]. 岩土力学, 2016, 37(S2): 1—15.  
YANG G H, HUANG Z M, JIANG Y, *et al.* Improvement of calculation model of double-row piles for supporting deep excavation [J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(S2): 1—15 (In Chinese)
- [17] 汪彪, 徐光耀, 施木俊. 双排桩桩间土加固作用在长江一级阶地深基坑工程中的应用分析 [J]. 岩土工程学报, 2014, 37(S2): 237—241.  
WANG B, XU G Y, SHI M J. Application and analysis of reinforcement effect of soil between double-row piles in deep foundation pits located in 1st terrace near Yangtze River [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 37(S2): 237—241. (In Chinese)
- [18] 赵明华, 李文, 张锐. 考虑桩-土相互作用的双排桩内力计算方法研究 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2014, 41(1): 1—7.  
ZHAO M H, LI W, ZHANG R. Research on the internal forces calculation of cantilever piles considering pile-soil interaction [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2014, 41(1): 1—7. (In Chinese)