第45卷 第8期
2018年8月
湖南大学学报(自然科学版)
Journal of Hunan University(Natural Sciences)
Vol.45,No.8
Aug. 2018

文章编号:1674-2974(2018)08-0126-05 DOI:10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2018.08.017

TV-MCP:一种新的脉冲噪音图像恢复方法*

白敏茹†,龚世欢
(湖南大学 数学与计量经济学院,湖南 长沙 410082)

摘 要:对于被脉冲噪音污染的图像恢复问题,广泛使用的TVL1模型会偏离数据获取模型和先验模型,特别是对高水平噪音.针对这个问题,基于MCP函数,提出了一种新的图像恢复模型,称之为TV-MCP模型,并给出了该模型的近似逼近方法,从理论上证明了该算法的全局收敛到TV-MCP模型的稳定点.对于近似逼近子问题的求解,采用交替方向方法求解.通过对多组图像在不同噪音污染水平下的数值仿真实验,验证了本文所提出的模型和方法的有效性.实验结果显示,TV-MCP模型比TVL1模型能够取得更好的恢复效果,尤其是在高噪音污染的图像恢复问题上,TV-MCP恢复图像的SNR值最高可以达到TVL1恢复图像的SNR值的两倍.

关键词:图象恢复;TV-MCP;脉冲噪音;交替方向方法
中图分类号:TP751 **文献标志码**:A

TV-MCP: A New Method for Image Restoration in the Presence of Impulse Noise

BAI Minru†,GONG Shihuan
(College of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: For the problem of image restoration of observed images corrupted by impulse noise, the widely used TVL1 model may deviate from both the data acquisition model and prior model, especially for high noise levels. To overcome this problem, based on MCP function, a new model called TV-MCP and its approximation method were proposed. It is proved that the approximation method converges globally to a stationary point of TV-MCP model. Alternating direction method of multipliers was applied to solve the approximation sub-problem. In the numerical experiments, TVL1 and TV-MCP were applied to the problem of image de-noising and de-blurring in the presence of impulse noise, which verifies the effectiveness of the proposed model and method. The results show that TV-MCP outperforms TVL1, especially for the high noise level image de-noising. The maximum SNR value of TV-MCP image restoration can reach 2 times that of TVL1 method.

Key words: image restoration; TV-MCP; impulse noise; alternating direction method of multipliers

随着数字成像仪器的快速发展,智能手机、数码相机和各种监控设备等的普及,数字图像处理越来越靠近人们的生活.由于数字成像系统、感光元件、工作环境和处理手段的不完善,图像在生成、采集、

* **收稿日期**:2017-04-13
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11571098),National Natural Science Foundation of China(11571098)
作者简介:白敏茹(1968—),女,江西宜春人,湖南大学教授,博士生导师
†通讯联系人,E-mail:minru-bai@163.com

处理和传输过程中受到损伤，如低光照环境下长时间曝光过程中照相机抖动导致图像的模糊不清；高感光度引起的噪点；目标与成像器材间的相对运动产生的运动模糊；数字图像在生成、采集、数字化和处理过程中引入的噪声等，都将导致实际得到的图像出现图像模糊化、噪声污染甚至部分图像信息的缺失等问题.

根据噪音的统计分布特征，噪音可以分为脉冲噪音、高斯噪音和瑞丽噪音等，其中脉冲噪音是十分常见的一种，它通常在数字图像的存储和传输的过程中产生. 脉冲噪音又分为椒盐噪音和随机值噪音.

假设噪音水平为 $r(0<r<1)$，则图像 x 在受椒盐噪音干扰后在位置 i 处的图像值为：

$$f_i=\begin{cases}0, & \text{概率为 } r/2\\ 255, & \text{概率为 } r/2\\ x_i, & \text{概率为 } 1-r\end{cases}$$

图像 x 受随机值噪音干扰后在位置 i 处的图像值为：

$$f_i=\begin{cases}a_i, & \text{概率为 } r\\ x_i, & \text{概率为 } 1-r\end{cases}$$

其中 a_i 服从 $[a_{\min},a_{\max}]$ 上的均匀分布，由于被随机脉冲噪音污染的图像的像素是取 $[a_{\min},a_{\max}]$ 上任意值，所以恢复被随机值脉冲噪音污染的图像更加困难.

对于被脉冲噪音污染的图像恢复问题，广泛使用的模型是由 l_1 范数度量的数据保真项和全变分度量正则化项组成的模型（简称 TVL1）[1-2]. TVL1 模型能够有效地保存图像的边界信息，能够有效地消除异常值的影响，对处理脉冲噪音等非高斯的加性噪音特别有效，在医学图像和计算机视觉等研究领域有广泛而成功的应用. 然而，Nikolova[3] 从统计的角度指出，广泛使用的 TVL1 模型会偏离数据获取模型和先验模型，特别是对高水平噪音. 为克服这个问题，Cai 等[4] 提出了两阶段方法，第 1 阶段探索损坏的像素，第 2 阶段使用剩下没有被污染的像素恢复图像. 数值实验表明两阶段方法优于 TVL1 模型，特别是对于 90% 的椒盐噪音和 55% 的随机噪音. 然而，两阶段方法仍然不能有效解决高水平的随机噪音.

本文针对高脉冲噪音图像恢复开展研究，主要贡献有两个：一是提出了 TV-MCP 模型用于高脉冲噪音图像的恢复，二是构造了近似逼近方法，从理论上证明了该方法收敛到 TV-MCP 模型的稳定点. 仿真实验验证了本文所提出模型和方法的有效性，结果显示，对于被在高水平下随机值噪音或椒盐噪音污染的图像，TV-MCP 方法都能取得比 TVL1 模型和两阶段方法更好的恢复效果.

1　TVL1 模型

TVL1 模型是由 l_1 范数度量的数据保真项和全变分正则化项和的极小化模型，其离散形式为：

$$\min_x TV(x)+\mu\,\|\boldsymbol{K}x-f\|_1 \tag{1}$$

其中：f 为观察的图像；$\boldsymbol{K}$ 为模糊矩阵；$TV(x)$ 为全变分项，即 $TV(x)=\sum_i^n\|\boldsymbol{D}_i x\|$，$\boldsymbol{D}_i$ 表示图像在第 i 个像素点水平和垂直方向上的一阶差分. 全变分项的范数可以取 l_1 范数或 l_2 范数. 当取 l_1 范数时，产生的全变分项是各向异性的，当取 l_2 范数时，产生的全变分项是各向同性的.

TVL1 模型在处理非高斯的加性噪音时特别有效，但随着噪音水平提高，TVL1 的求解效果下降十分明显. 本文所提出的 TV-MCP 模型，在处理高噪音污染的图像上，恢复效果显著提升.

2　TV-MCP 模型

MCP 函数最早被 Zhang[5] 在研究稀疏变量选择时作为一种罚函数提出. 令参数对 (γ_1,γ_2) 满足 $\gamma_1>0,\gamma_2>0$，那么一维 MCP 函数定义为：

$$\phi(x)=\begin{cases}\gamma_1|x|-\dfrac{x^2}{2\gamma_2}, & \text{当 } |x|\leqslant\gamma_1\gamma_2\\[2mm] \dfrac{\gamma_1^2\gamma_2}{2}, & \text{当 } |x|>\gamma_1\gamma_2\end{cases} \tag{2}$$

基于 MCP 函数，我们提出去脉冲噪音的一个新的模型，称为 TV-MCP 模型：

$$\min_{x\in\Omega} TV(x)+\mu\Phi(\boldsymbol{K}x-f) \tag{3}$$

其中：$\Omega=\{x\in\mathbb{R}^{n^2}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$. $\Phi(v)$ 定义如下：

$$\Phi(v)=\sum_{i=1}^{\dim(v)}\phi(v_i),\ v\in\mathbb{R}^{\dim(v)} \tag{4}$$

这里 $\phi(v_i)$ 是定义如式(2)的 MCP 函数. TV-MCP 模型是一个非凸的优化问题. 定义

$$\psi(x):=\gamma_1|x|-\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2\gamma_2}, & \text{当 } |x|\leqslant\gamma_1\gamma_2\\[2mm] \gamma_1|x|-\dfrac{\gamma_1^2\gamma_2}{2}, & \text{当 } |x|>\gamma_1\gamma_2\end{cases} \tag{5}$$

且

$$\Psi(v)=\sum_{i=1}^{\dim(v)}\psi(v_i),\ v\in\mathbb{R}^{\dim(v)} \tag{6}$$

由式(4)(5)(6)可知，$\Phi(v)=\gamma_1\|v\|_1-\Psi(v)$. 所以 TV-MCP 模型(3)可以转化为：

$$\min_{x\in\Omega} TV(x)+\mu(\gamma_1\|\boldsymbol{K}x-f\|_1-\Psi(\boldsymbol{K}x-f)) \tag{7}$$

令 $g(x)=TV(x)+\mu\|\boldsymbol{K}x-f\|_1$ 且 $h(x)=\mu\Psi(\boldsymbol{K}x-f)$，虽然问题(7)的目标函数是一个非凸函数，但可以看成两个凸函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的差. 为此我们对 $h(x)$ 做一阶线性近似逼近[6]，构造迭代序列近似逼近问题(7)，给定 x^k，则可以得到迭代序列如下：

$$x^{k+1}=\arg\min_{x\in\Omega}\Big\{TV(x)+\mu(\gamma_1\|\boldsymbol{K}x-f\|_1-\Psi(\boldsymbol{K}x^k-f)-\langle\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\nabla\Psi(\boldsymbol{K}x^k-f),x-x^k\rangle)+\frac{\rho}{2}\|x-x^k\|^2\Big\} \tag{8}$$

3 收敛性分析

在这一节中，我们将证明迭代序列(8)收敛于 TV-MCP 模型的稳定点.

假设 1 a 和 b 是固定正常数，令 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是一个真下半连续函数，考虑序列 $(x_{k\in\mathbb{N}})$，满足下列 3 个条件：

(H1) 充分下降条件：对于每一个 $k\in\mathbb{N}$，

$$f(x^{k+1})+a\|x^{k+1}-x^k\|^2\leqslant f(x^k)$$

(H2) 相对误差条件：对于每一个 $k\in\mathbb{N}$，存在 $d^{k+1}\in\partial f(x^{k+1})$ 使得：

$$\|d^{k+1}\|\leqslant b\|x^{k+1}-x^k\|$$

(H3) 连续性条件：存在子列 $(x^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $\tilde{x}$ 使得当 $j\to\infty$ 时，

$$x^{k_j}\to\tilde{x} \text{ 且 } f(x^{k_j})\to f(\tilde{x})$$

引理 1 (定理 2.9[7]) 在满足假设 1 的条件下，如果 f 满足 KL 性质，则当 $k\to\infty$ 时，$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到稳定点 x^*，并且 $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 有限长度，

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\|x^{k+1}-x^k\|<+\infty$$

为了便于后续定理的证明，我们令

$$F(x):=TV(x)+\mu(\gamma_1\|\boldsymbol{K}x-f\|_1-\Psi(\boldsymbol{K}x-f))$$

引理 2 对于任意的 $x^0\in\Omega$ 和 $\rho>0$，由式(8)得到的序列 $\{x^k\}$ 满足：

$$F(x^k)-F(x^{k+1})\geqslant\rho\|x^{k+1}-x^k\|^2\quad\forall k\geqslant 0 \tag{9}$$

证明 由 $\Psi(x)$ 的凸性可得：

$$\Psi(z^{k+1})\geqslant\Psi(z^k)+\langle\nabla\Psi(z^k),z^{k+1}-z^k\rangle$$

又因为式(8)隐含着 $x^k\in\Omega$，则对于所有的 $k\geqslant 0$ 都有 $\chi_\Omega(x^k)=0$. 所以

$$F(x^k)-F(x^{k+1})\geqslant(TV(x^k)+\mu\|z^k\|_1)-(TV(x^{k+1})+\mu\|z^{k+1}\|_1)+\mu\langle\nabla\Psi(z^k),z^{k+1}-z^k\rangle \tag{10}$$

由式(8)可知：

$$d^k:=\mu\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\nabla\Psi(z^k)+\rho(x^k-x^{k+1})\in\partial[TV(x)+\mu\|\boldsymbol{K}x-f\|_1+\chi_\Omega(x)]\,|_{x=x^{k+1}}$$

又因为函数 $TV(x)+\mu\|Kx-f\|_1$ 是凸函数，结合式(10)，我们可以得到：

$$F(x^k)-F(x^{k+1})\geqslant\langle d^{k+1},z^{k+1}-z^k\rangle+\mu\langle\nabla\Psi(z^k),z^{k+1}-z^k\rangle=\rho\|x^{k+1}-x^k\|^2$$

证毕.

引理 3 令 $d^k\in\partial F(x^k)$，则存在一个足够大的常数 M，使得：

$$\|d^{k+1}\|\leqslant M\|x^{k+1}-x^k\|$$

证明 由式(8)可知

$$d^{k+1}:=\mu\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\nabla\Psi(z^k)-\nabla\Psi(z^{k+1}))-\rho(x^{k+1}-x^k)\in\partial F(x^{k+1}) \tag{11}$$

又因为 $\nabla\Psi(x)$ 是 Lipschitz 连续的，则由式(11)可知存在一个足够大的常数 M，使得

$$\|d^{k+1}\|\leqslant M\|x^{k+1}-x^k\|$$

证毕.

定理 1 (全局收敛性) 令 $x^0\in\Omega$ 且 $\rho>0$，则由式(8)得到的序列 $\{x^k\}$ 全局收敛到模型(3)的稳定点，并且 $\sum_{k=0}^{+\infty}\|x^{k+1}-x^k\|<+\infty$.

证明 由引理 2 和引理 3 可知，$F(x)$ 满足假设 1 中的 H1 和 H2. 因为 $0\leqslant x^k\leqslant 1$，所以是有界的，则存在子列 $(x^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $\tilde{x}$ 使得当 $j\to\infty$ 时，$x^{k_j}\to\tilde{x}$ 且 $f(x^{k_j})\to f(\tilde{x})$. 又由文献[8]可知，MCP 函数指数为 $\frac{1}{2}$ 的 KL 函数，则 $F(x)$ 是指数为 $\frac{1}{2}$ 的 KL 函数.

由引理 1 可知，由式(8)得到的序列 $\{x^k\}$ 全局收敛到模型(3)的稳定点，并且 $\sum_{k=0}^{+\infty}\|x^{k+1}-x^k\|<+\infty$. 证毕.

4 子问题的求解算法

这一节，我们将应用 ADMM 方法[2]来求解 TV-MCP 模型的近似逼近问题(8).

不失一般性，我们取 $TV(x)$ 为各向异性，$TV(x)=\sum_i\|\boldsymbol{D}_ix\|$. 令

$$\theta(\omega):=\sum_i\|\boldsymbol{D}_ix\|=\sum_i\|w_i\|$$

$$z^k=\boldsymbol{K}x^k-f$$

$p^k = \nabla\Psi(z^k), \Omega = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

式(8)可以转化为：

$$\begin{aligned}
&\min\theta(\omega) + \mu(\| z \|_1 - \langle p^k, z\rangle) + \\
&\quad \frac{\rho}{2} \| x - x^k \|^2 \\
&\text{s.t.} \begin{cases} w_i = D_i x, \forall i \\ z = kx - f \\ y = x, y \in \Omega \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)的增广拉格朗日函数易得为：

$$\begin{aligned}
&L(\omega, z, y, x, \lambda_\omega, \lambda_z, \lambda_y) = \theta(\omega) + \\
&\quad \sum_i (\lambda_\omega (D_i x - w_i) + \frac{\beta_\omega}{2} \| D_i x - w_i \|^2) + \\
&\quad \mu(\| z \|_1 - \langle p^k, z\rangle) - \langle \lambda_z, z - (Kx - f)\rangle + \\
&\quad \frac{\beta_z}{2} \| z - (\boldsymbol{K}x - f) \|^2 + \frac{\rho}{2} \| x - x^k \|^2 - \\
&\quad \langle \lambda_y, y - x\rangle + \frac{\beta_y}{2} \| y - x \|^2
\end{aligned} \tag{13}$$

其中：拉格朗日乘子 $\lambda_\omega \in \mathbb{R}^{2n^2}$，$\lambda_z, \lambda_y \in \mathbb{R}^{n^2}$，罚参数 $\beta_\omega, \beta_z, \beta_y > 0$．则我们可以得到如下 ADMM 迭代算法．

ADMM 算法：

步 0　给定初始点 x^0 和初始乘子 $(\lambda_\omega^0, \lambda_z^0, \lambda_y^0)$．令 $k=0$，选择罚参数 $\beta_\omega, \beta_z, \beta_y$．

步 1　求解子问题．

$$(\omega^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) = \arg\min_{\omega, z, y} L(\omega, z, y, x^k, \lambda_\omega^k, \lambda_z^k, \lambda_y^k)$$

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in \Omega} L(\omega^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}, x, \lambda_\omega^k, \lambda_z^k, \lambda_y^k)$$

步 2　更新拉格朗日乘子．

$$\lambda_\omega^{k+1} = \lambda_\omega^k - \beta_\omega(\omega^{k+1} - Dx^{k+1})$$

$$\lambda_z^{k+1} = \lambda_z^k - \beta_z(z^{k+1} - \boldsymbol{K}x^{k+1} + f)$$

$$\lambda_y^{k+1} = \lambda_y^k - \beta_y(y^{k+1} - x^{k+1})$$

步 3　如果未达到精度要求，令 $k = k + 1$，转步 1．

5　仿真实验

本节针对带模糊的高脉冲噪音图像的恢复问题，对 TV-MCP 模型进行仿真实验，同时与 TVL1 模型和两阶段方法（Two-phase）进行对比仿真实验．测试的图像包括 Lena、House、Boat 和 Cameraman（大小均为 512×512 ）．而模糊算子则采用 9×9 的均值模糊．TVL1 和 TV-MCP 模型均采用 ADMM 算法求解，并给出仿真结果，所有实验都是在 1.6 GHz Intel Core i5 的 CPU 及 8 G 内存的 OS X 系统下的 MacBook Air 笔记本中运行 MATLAB R2016b 计算得出．我们采用信噪比（SNR）来评估图像恢复的效果．

信噪比计算公式为：

$$\mathrm{SNR}(x) := 10 \log_{10} \frac{\| \bar{x} - E(\bar{x}) \|^2}{\| \bar{x} - x \|^2}$$

其中 x 为原始图像，$E(\bar{x})$ 为表示 $\bar{x}$ 的平均值，x 是恢复出来的图像．

在参数选取上，基于实验，$(\beta_\omega, \beta_z) = (5, 20)$．在处理椒盐噪音污染图像时 $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 0.15)$，处理随机值噪音污染的图像时 $(\gamma_1, \gamma_2) = (13.5, 0.35)$．

图 1 展示的是 Lena 图像和 House 图像的原图；图 2 展示的是受到 70％的随机值噪音水平污染的 Lena 图像，用 TVL1 模型、Two-Phase 方法和 TV-MCP 模型的视觉恢复效果对比；图 3 表示 House 在 90％的随机值噪音水平下用 TVL1 模型、Two-Phase 方法和 TV-MCP 模型的视觉恢复效果对比．从 SNR 值和视觉恢复效果对比中，可以发现本文提出的 TV-MCP 模型能得到更好的恢复效果．

图 1　原始图像

Fig. 1　Original images

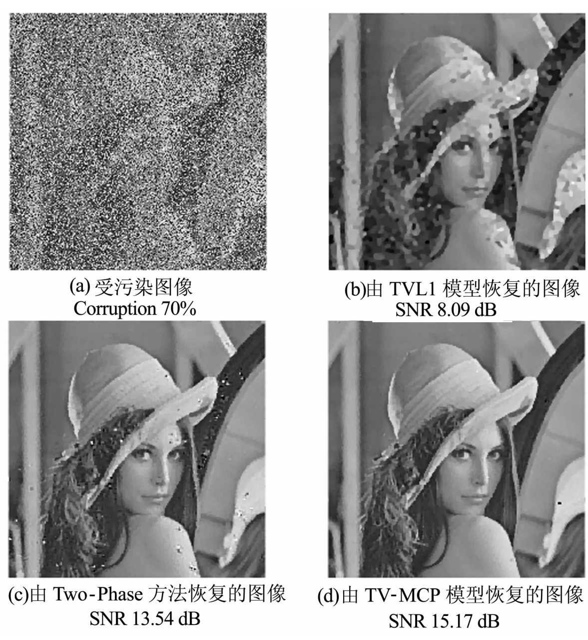

图 2　测试图像为被均值模糊和 70％的随机值噪音污染的 Lena 图像

Fig. 2　Tests on Lena image corrupted by average blur and 70％ random noise

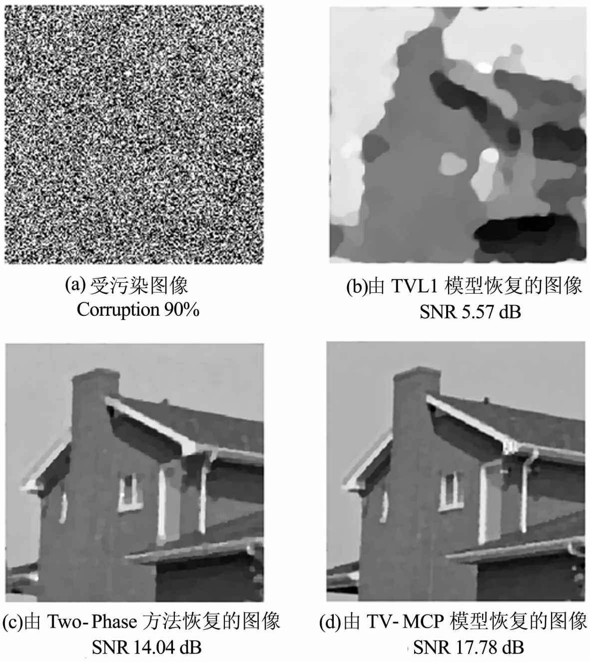

图 3 测试图像为被均值模糊和 90%的椒盐噪音污染的 House 图像

Fig. 3 Tests on House image corrupted by average blur and 90% salt & pepper noise

表 1 和表 2 分别列出了不同图像在椒盐噪音和随机值噪音下 TVL1 和 TV-MCP 恢复图像的 SNR 值,可以明显看出本文中提出的 TV-MCP 全面优于 TVL1 模型,说明 TV-MCP 能获得更好的恢复图像.

表 1 图像在不同椒盐噪音水平下的 SNR

Tab. 1 SNR of restoration images under different salt & pepper noise levels

图像	噪音水平/%	SNR/dB		
		TVL1	Two-Phase	TV-MCP
Lena	70	13.08	18.03	18.18
	90	7.38	14.25	14.67
Boat	70	11.77	17.56	17.75
	90	6.41	11.95	12.26
House	70	13.49	18.67	21.15
	90	5.57	14.04	17.78
Cameraman	70	12.14	14.31	15.53
	90	7.78	11.54	11.92

表 2 图像在不同随机值噪音水平下的 SNR

Tab. 2 SNR of restoration images under different random noise levels

图像	噪音水平/%	SNR/dB		
		TVL1	Two-Phase	TV-MCP
Lena	50	15.29	17.49	18.87
	70	8.09	13.54	15.17
Boat	50	13.33	16.81	18.22
	70	6.82	10.66	12.37
House	50	15.33	20.09	21.68
	70	7.54	12.05	15.56
Cameraman	50	13.16	19.07	21.74
	70	5.80	10.94	11.26

6 结 论

针对高脉冲噪音图像恢复问题,本文提出了 TV-MCP 模型,并给出了求解 TV-MCP 模型的 ADMM 算法,从理论上证明了该算法的收敛性.仿真实验的结果验证了 TV-MCP 模型的有效性,结果表明,TV-MCP 模型明显优于 TVL1 模型和两阶段方法,能够获得更好的恢复图像,尤其是在高噪音污染的图像恢复问题上.能否将该模型和算法推广到其他噪音污染下的图像恢复问题?这个问题值得进一步研究.

参考文献

[1] CHAN T F, ESEDOGLU S. Aspects of total variation regularized L1 function approximation[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2005, 65(5):1817-1837.

[2] YANG J, ZHANG Y, YIN W. An efficient TVL1 algorithm for deblurring multichannel images corrupted by impulsive noise[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2009, 31(4):2842-2865.

[3] NIKOLOVA M. Model distortions in Bayesian MAP reconstruction[J]. Inverse Problems and Imaging, 2007, 1(2):399-422.

[4] CAI J F, CHAN R H, NIKOLOVA M. Two-phase approach for deblurring images corrupted by impulse plus Gaussian noise[J]. Inverse Problems & Imaging, 2008, 2(2):187-204.

[5] ZHANG C H. Nearly unbiased variable selection under minimax concave penalty[J]. Annals of Statistics, 2010, 38(2):894-942.

[6] GASSO G, RAKOTOMAMONJY A, CANU S. Recovering sparse signals with a certain family of nonconvex penalties and DC programming[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(12):4686-4698.

[7] ATTOUCH H, BOLTE J, SVAITER B F. Convergence of descent methods for semi-algebraic and tame problems: Proximal algorithms, forward-backward splitting, and regularized Gauss-Seidel methods[J]. Mathematical Programming, 2013, 137(1):91-129.

[8] LI G, PONG T K. Calculus of the exponent of Kurdyka-Lojasiewicz inequality and its applications to linear convergence of first-order methods[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2018(online): 1-34.