

## 考虑纵横耦合变形的土工格室加筋体变形分析

赵明华<sup>†</sup>, 郑玥, 刘猛, 肖尧

(湖南大学 岩土工程研究所, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**针对土工格室加筋体的受力变形特点,将其视为小挠度弹性圆薄板,考虑土工格室与桩土加固区的变形协调、土工格室垫层耦合的水平与竖直变形以及上下界面的摩阻效应,建立此轴对称条件下薄板的挠曲变形控制微分方程,利用 Bessel 复变函数构造竖向及水平位移解析表达式,从而得出双向增强复合地基网下桩土应力比、沉降及桩土差异沉降的计算公式.采用某工程试验结果对该计算方法进行了验证,证明本文计算方法的合理性.参数分析表明:在一定范围内改变加筋体的复合弹性模量、桩土刚度比、上下界面摩阻系数比等因素可以起到调节双向增强复合地基网下桩土应力比和降低格室体沉降的作用.

**关键词:**路基;土工格室;双向增强复合地基;纵横耦合变形;桩土应力比;沉降

**中图分类号:**U416.1;TU473.1

**文献标志码:**A

## Deformation Analysis of Geocell-reinforcement Considering Vertical-horizontal Coupling Distortion

ZHAO Minghua<sup>†</sup>, ZHENG Yue, LIU Meng, XIAO Yao

(Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** This paper regarded the force and deformation characteristics of geocell reinforcement, as a small deflection of an elastic circular thin plate. Taking into account the deformation compatibility between the geocell and pile-soil reinforced area, horizontal-vertical coupling deformation of the geocell-reinforced mattress, as well as the horizontal friction effect of the top and bottom plate-soil interface, the governing differential equations of the geocell flexural deformation were established under symmetric load. The analytic expressions of vertical and horizontal displacement were constructed by the Bessel complex-variable functions, from which the calculation formulas were deduced for pile-soil stress ratio below the net, settlement and differential pile-soil settlement. To verify this method, an existing case was employed. Finally, the effects of various factors were discussed, which show that it is beneficial to modify the pile-soil stress ratio below the net and to reduce the embankment settlement by changing the composite elastic modulus, the pile-soil stiffness ratio and horizontal frictional coefficient ratio to some extent.

**Key words:** subgrade; geocell; bidirectional reinforced composite foundation; vertical-horizontal coupling distortion; pile-soil stress ratio; settlement

\* 收稿日期:2018-10-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478178), National Natural Science Foundation of China (51478178)

作者简介:赵明华(1956—),男,湖南邵阳人,湖南大学教授,博士生导师

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: mhzhaoohd@21cn.com

土工格室是一种三维网状结构的高分子聚合物,可通过在格室中充填砂、碎石或粘土等材料,构成一个具有较大抗弯刚度和抗剪强度的复合体<sup>[1-3]</sup>.土工格室作为一种新型路基处理方法,广泛应用于公路、铁路等软基加固工程.但由于其受力情况和加固机理的复杂性,格室体的变形计算以及与地基间的荷载传递形式始终没有完善的理论研究,从而影响了格室体在工程中的进一步应用和推广.目前国内外的研究成果中,常用梁、板两种结构模型来模拟格室体并进行计算研究<sup>[4]</sup>.

随着研究的深入,众多学者在传统的弹性地基梁方法的基础上进行了改进.赵明华等<sup>[5]</sup>基于文克尔假定,得到格室体在考虑水平摩阻力影响下的有限长梁幂级数解.赵明华等<sup>[6]</sup>根据地基梁的纵横耦合变形特性,采用微分算子级数法求得了地基梁的挠度及内力解.张玲等<sup>[7-8]</sup>假设摩阻力与格室体界面位移成正比,将桩与桩间土视为刚度不同的弹簧体系,结合格室体的变形协调特性得到了地基梁的变形曲线及桩土应力比.但是,采用弹性地基梁理论时需将桩体等效成桩墙,存在无法确定桩的等效刚度及地基梁的计算宽度等问题.

鉴于此,有学者开始采用薄板模型来模拟格室体并进行研究计算.饶为国等<sup>[9-10]</sup>基于薄板变形理论得出了路基工后沉降的计算方法,张福海等<sup>[11]</sup>采用双参数地基模型计算出平面应变条件下格室垫层的变形.由于矩形薄板理论方法在布桩方式上有所局限,赵明华等<sup>[12]</sup>基于弹性地基圆板理论求出了加筋体的挠曲函数及桩土应力比表达式.赵明华等<sup>[13]</sup>将单桩影响范围内的土工格室视为圆形薄板,利用Bessel复变函数构造考虑水平摩阻效应的格室体挠曲变形方程,并进行参数分析.然而上述研究均未考虑加筋体在实际情况中的双向变形,导致计算结果偏保守,故而针对加筋体的纵横耦合变形特性提出了本文的方法.

本文的目的在于从弹性力学基本原理和圆薄板微单元出发,考虑土工格室垫层纵横耦合变形、桩土变形协调以及界面摩阻效应,采用Bessel复变函数求出土工格室挠曲变形及水平位移的解析解答,并根据边界条件得出土工格室网面下部桩土应力比、沉降及桩土差异沉降的计算方法.

## 1 格室体的计算模型及微分方程

### 1.1 基本假定

路堤荷载下的双向增强复合地基模型如图1所示.本文取其中一个单桩及影响范围内的桩间土为典型单元体进行分析<sup>[2]</sup>.图1中, $d_p$ 表示桩体直径, $d_e$ 表示单桩加固范围直径, $s_d$ 为桩的中心距.梅花形布桩时, $d_e = 1.05s_d$ ;正方形布桩时, $d_e = 1.13s_d$ .

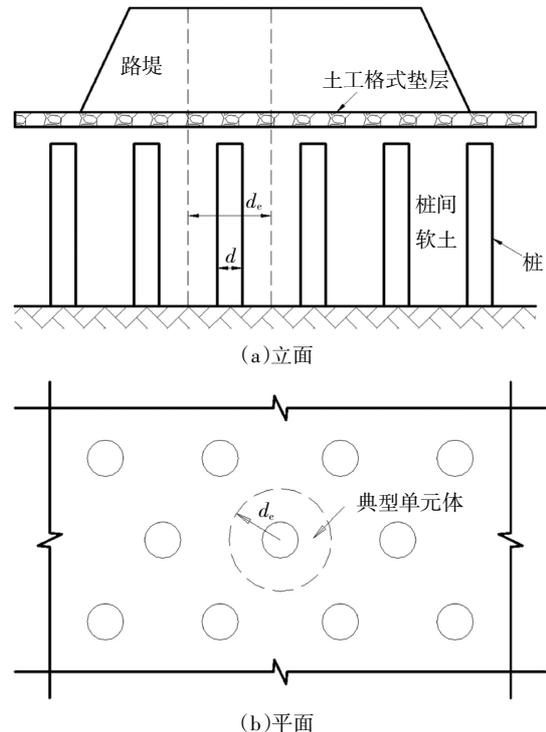


图1 双向增强复合地基示意图

Fig.1 Schematic diagram of bidirectional reinforced composite foundation

为了建立模型的同时突出关键因素的影响,作出如下假定:

- 1) 考虑土工格室的柔性筏板效应,将格室体视为小挠度弹性薄板<sup>[9-10]</sup>,弹性薄板关于桩体中心轴对称.
- 2) 考虑土工格室与桩体加固区的变形协调,将桩间土视为一系列弹簧,桩视为一个弹性支承,均服从Winkler假定<sup>[14-15]</sup>.
- 3) 考虑格室体符合平截面假定,格室体上下界面的摩阻力与其位移成线性关系<sup>[16-19]</sup>.
- 4) 为简化计算,不考虑格室网面体上部的应力重分布<sup>[20-22]</sup>,本文中提到的桩土应力比为网面下部

的桩土应力比,用  $n$  表示.

5)将薄板边缘可视为水平铰接,即径向转角与剪力为 0.

### 1.2 计算模型

根据上述假定,本文的计算模型如图 2 所示.图中  $h$  为格室体厚度, $q_s$  和  $q_p$  分别为桩间土和桩顶所受的均布荷载, $\tau_u$  和  $\tau_d$  分别为格室体上下界面摩阻力,其大小与界面径向位移成正比.因为考虑其中面位移,故格室体上下界面的径向位移如图 3 所示.为了便于推导,假定如图 3 所示的位移方向为正方向,与坐标轴正方向一致.

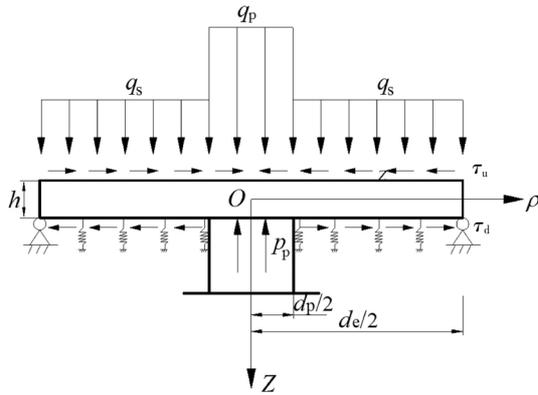


图 2 土工格室加筋体受力分析模型

Fig.2 Mechanical analysis model of geocell reinforcement

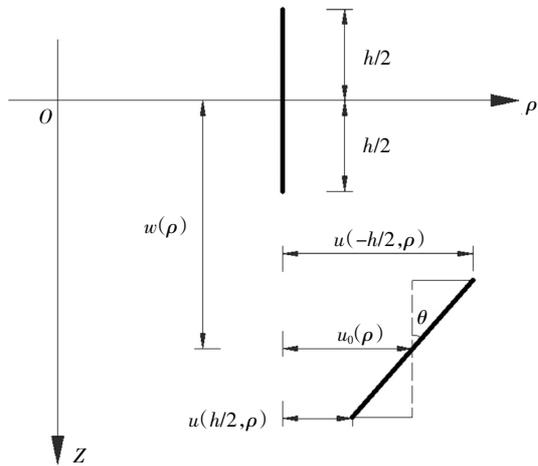


图 3 格室体界面位移

Fig.3 Displacement at top and bottom interface of geocell reinforcement

根据图 3,当距格室体中心距离为  $\rho$  的中性面,竖向发生  $w$  位移的沉降量,径向发生  $u_0$  的径向位移,并转动  $\theta$  角度时,可得出格室上下界面径向的位移公式为:

$$\begin{cases} u\left(\frac{h}{2}, \rho\right) = u_0(\rho) - \frac{h}{2} \sin\theta \approx u_0(\rho) - \frac{h}{2} \tan\theta = u_0(\rho) - \frac{h}{2} w'(\rho) \\ u\left(-\frac{h}{2}, \rho\right) = u_0(\rho) + \frac{h}{2} \sin\theta \approx u_0(\rho) + \frac{h}{2} \tan\theta = u_0(\rho) + \frac{h}{2} w'(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $u_0(\rho)$ 为格室体中面的径向位移; $w(\rho)$ 为格室体中面的沉降量, $w'(\rho)$ 为  $w(\rho)$ 对  $\rho$  求一阶导数.

格室体上下界面的摩阻力大小分别为:

$$\begin{cases} \tau_u(\rho) = k_{xu} \left( u_0(\rho) + \frac{h}{2} w'(\rho) \right) \\ \tau_d(\rho) = k_{xd} \left( u_0(\rho) - \frac{h}{2} w'(\rho) \right) \end{cases} \quad (2)$$

式中: $k_{xu}$ 与  $k_{xd}$ 分别为格室体上下表面的水平摩擦系数.

### 1.3 微分方程建立

在圆板中面取一微元体进行分析,如图 4 所示.图中, $p$  为薄板底部支撑力, $q$  为薄板上部所受荷载, $M_r$  为格室体界面的附加力偶,由大小不同、方向相反的摩阻力产生, $M_\rho$ 、 $M_\phi$  分别为薄板截面的径向弯矩与切向弯矩, $F_{\rho\phi}$  为薄板截面的径向剪力, $F_{\phi r}$  为由界面摩阻产生的附加剪力,由于模型轴对称,故  $F_{\phi r}$  只出现在径向.  $F_{T\rho}$  和  $F_{T\phi}$  分别为单位长度上薄板截面的径向拉(压)力和环向拉(压)力,规定以受拉为正,弯矩以上部受拉为正.

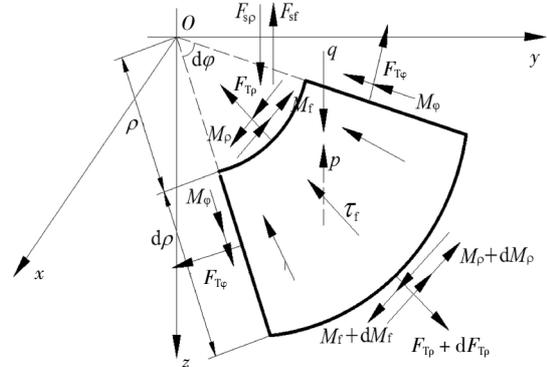


图 4 圆薄板中面微单元受力分析

Fig.4 Mechanical analysis for unit cell of middle plane of circular thin plate

由图 4 可得,薄板在水平径向的受力平衡方程为:

$$\begin{aligned} (F_{T\rho} + dF_{T\rho})(\rho + d\rho)d\phi - F_{T\rho}\rho d\phi - 2F_{T\phi}d\phi \sin\frac{d\phi}{2} - \\ (\tau_u + \tau_d)\rho d\rho d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

根据胡克定律,式(3)中  $F_{T\rho}$ 、 $F_{T\phi}$  可按式(4)计算:

$$\begin{cases} F_{T\rho} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_\rho + \nu\varepsilon_\varphi) = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(u_0' + \nu\frac{u_0}{\rho}\right) \\ F_{T\varphi} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}(\nu\varepsilon_\rho + \varepsilon_\varphi) = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(\nu u_0' + \frac{u_0}{\rho}\right) \end{cases} \quad (4)$$

式中： $\varepsilon_\rho$ 为薄板中面径向正应变； $\varepsilon_\varphi$ 为薄板中面环向正应变。

将式(1)与式(4)代入式(3)，化简可得薄板径向变形控制微分方程：

$$\frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(u_0'' + \frac{u_0'}{\rho} - \frac{u_0}{\rho^2}\right) - (k_{xu} + k_{xd})u_0 - (k_{xu} - k_{xd})\frac{h}{2}w' = 0 \quad (5)$$

根据微单元的受力分析，对圆心  $O$  取矩，同时忽略高阶小量可得：

$$\begin{aligned} \frac{M_\rho}{\rho} + \frac{dM_\rho}{d\rho} - \frac{M_\varphi}{\rho} - \frac{M_f}{\rho} - \frac{dM_f}{d\rho} - 2F_{sp} - \\ \rho \frac{dF_{sp}}{d\rho} + 2F_{sf} + \rho \frac{dF_{sf}}{d\rho} + (q-p)\rho = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

根据  $z$  方向合力为 0，略去高阶小量可得：

$$F_{sp} + \rho \frac{dF_{sp}}{d\rho} - F_{sf} - \rho \frac{dF_{sf}}{d\rho} + (p-q)\rho = 0 \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)中，可得：

$$\begin{aligned} M_\rho + \rho \frac{dM_\rho}{d\rho} - M_\varphi - M_f - \rho \frac{dM_f}{d\rho} + \rho^2 \frac{dF_{sp}}{d\rho} - \\ \rho^2 \frac{dF_{sf}}{d\rho} + (p-q)\rho^2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

结合式(2)， $M_f$  与  $w$  的关系式为：

$$M_f = \frac{\int_0^\rho \left( \frac{h}{2} \cdot k_{xu} \left( u_0 + \frac{h}{2} w' \right) - \frac{h}{2} \cdot k_{xd} \left( u_0 - \frac{h}{2} w' \right) \right) r dr}{\rho d\varphi} \quad (9)$$

轴对称条件下取一薄板单元体(如图5)做应力分布的分析，由单元体水平方向合力为 0 整理可得：

$$\tau_{\rho z} = \tau_{z\rho} = \left( \frac{dM_f}{d\rho} + \frac{M_f}{\rho} \right) \left( \frac{3}{2h} - 6\frac{z^2}{h^3} \right) \quad (10)$$

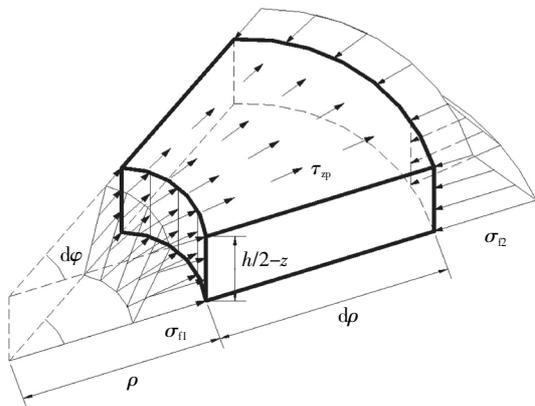


图5 圆薄板微单元受力分析

Fig.5 Mechanical analysis for unit cell of circular thin plate

结合式(10)， $M_f$  产生的圆板径向截面剪力为：

$$\begin{aligned} F_{sf} = 2 \int_0^{h/2} \tau_{\rho z} dy = \frac{dM_f}{d\rho} + \frac{M_f}{\rho} = \\ \frac{h^2}{4}(k_{xu} + k_{xd})w' + \frac{h}{2}(k_{xu} - k_{xd})u_0 \end{aligned} \quad (11)$$

结合式(9)、式(11)代入式(8)中，用位移表示内力后求一阶导并简化可得轴对称情况下考虑界面水平摩擦与截面纵横耦合变形的圆形薄板挠曲微分方程为<sup>[23]</sup>：

$$D\nabla^4 w - \frac{h^2}{4}(k_{xu} + k_{xd})\nabla^2 w - \frac{h}{2}(k_{xu} - k_{xd})\left(u_0' + \frac{u_0}{\rho}\right) = q - p \quad (12)$$

式中： $\nabla^2$ 为拉普拉斯算子， $\nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$ ； $k_{xu}$

与  $k_{xd}$  分别为格室体上下界面的水平摩擦系数； $h$  为格室体厚度； $q$  为路堤荷载； $p$  为薄板底部支撑力。

因此，令  $w_p, w_s$  分别表示桩顶和桩间土范围内格室体的挠曲函数； $u_p, u_s$  分别表示桩顶和桩间土范围内格室体中面径向位移函数；桩顶部分受到上部荷载  $q_p$  与桩顶反力  $p_p$  的作用；而桩间土部分底面支持力  $p_s$  则满足 Winkler 假定。则根据式(5)与式(12)可得到桩顶和桩间土范围内格室体的变形控制方程组分别为：

$$\begin{cases} D\nabla^4 w_p - \frac{h^2}{4}(k_{xp,u} + k_{xp,d})\nabla^2 w_p - \frac{h}{2}(k_{xp,u} - k_{xp,d})\left(u_p' + \frac{u_p}{\rho}\right) = q_p - p_p \\ \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(u_p'' + \frac{u_p'}{\rho} - \frac{u_p}{\rho^2}\right) - (k_{xp,u} + k_{xp,d})u_p - (k_{xp,u} - k_{xp,d})\frac{h}{2}w_p' = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} D\nabla^4 w_s - \frac{h^2}{4}(k_{xs,u} + k_{xs,d})\nabla^2 w_s - \frac{h}{2}(k_{xs,u} - k_{xs,d})\left(u_s' + \frac{u_s}{\rho}\right) + k_{zs}w_s = q_s \\ \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left(u_s'' + \frac{u_s'}{\rho} - \frac{u_s}{\rho^2}\right) - (k_{xs,u} + k_{xs,d})u_s - (k_{xs,u} - k_{xs,d})\frac{h}{2}w_s' = 0 \end{cases} \quad (14)$$

## 2 微分方程求解

### 2.1 桩顶范围内格室变形微分方程求解

将桩顶范围内格室体径向位移控制方程，即式(13)中 2 式，进行微分并整理后得：

$$\nabla^2 w_p = \frac{24D}{h^3(k_{xp,u} - k_{xp,d})} \nabla^2 y_1 - \frac{2(k_{xp,u} + k_{xp,d})}{h(k_{xp,u} - k_{xp,d})} y_1 \quad (15)$$

其中： $y_1 = u_p' + \frac{u_p}{\rho}$

将式(15)代入桩顶范围内格室体挠曲控制方

程,即式(13)中1式,整理可得:

$$\nabla^4 y_1 - \frac{h^2(k_{sp,u} - k_{sp,d})}{3D} \nabla^2 y_1 + \frac{h^4 k_{sp,u} k_{sp,d}}{12D^2} y_1 = \frac{h^3(k_{sp,u} - k_{sp,d})(q_p - p_p)}{24D^2} \quad (16)$$

式中: $k_{sp,u}$  和  $k_{sp,d}$  分别为桩顶范围内的格室体上下界面的水平摩擦系数; $q_p$  和  $p_p$  分别为桩顶范围内的路堤荷载和格室体底部支撑力。

常微分方程的解为通解和齐次解两部分的和。上式的齐次方程可转化为:

$$(\nabla^2 - \lambda_{11})(\nabla^2 - \lambda_{12})\bar{y}_1 = 0 \quad (17)$$

式中:

$$\begin{cases} \lambda_{11} = \frac{h^2(k_{sp,u} + k_{sp,d})}{6D} + \frac{h^2\sqrt{k_{sp,u}^2 - k_{sp,u}k_{sp,d} + k_{sp,d}^2}}{6D} \\ \lambda_{12} = \frac{h^2(k_{sp,u} + k_{sp,d})}{6D} - \frac{h^2\sqrt{k_{sp,u}^2 - k_{sp,u}k_{sp,d} + k_{sp,d}^2}}{6D} \end{cases} \quad (18)$$

则式(17)可分解为两个 Bessel 方程的形式:

$$\begin{cases} \rho \bar{y}_1'' + \bar{y}_1'' - \lambda_{11} \bar{y}_1 = 0 \\ \rho \bar{y}_1'' + \bar{y}_1'' - \lambda_{12} \bar{y}_1 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

经过试算可得式(16)的特解为:

$$y_1^* = \frac{(k_{sp,u} - k_{sp,d})(q_p - p_p)}{2hk_{sp,u}k_{sp,d}} \quad (20)$$

将式(19)引用虚变量 Bessel 函数求解并将两解相加,即为  $y_1$  的通解:

$$y_1 = B_1 I_0(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) + B_2 K_0(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) + B_3 I_0(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) + B_4 K_0(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) + \frac{(k_{sp,u} - k_{sp,d})(q_p - p_p)}{2hk_{sp,u}k_{sp,d}} \quad (21)$$

从而求出  $u_p$  表达式为:

$$u_p = B_1 \frac{I_1(\sqrt{\lambda_{11}} \rho)}{\sqrt{\lambda_{11}}} - B_2 \frac{K_1(\sqrt{\lambda_{11}} \rho)}{\sqrt{\lambda_{11}}} + B_3 \frac{I_1(\sqrt{\lambda_{12}} \rho)}{\sqrt{\lambda_{12}}} - B_4 \frac{K_1(\sqrt{\lambda_{12}} \rho)}{\sqrt{\lambda_{12}}} + \frac{B_5}{\rho} + \frac{(k_{sp,u} - k_{sp,d})(q_p - p_p)}{4hk_{sp,u}k_{sp,d}} \rho \quad (22)$$

式中: $I_N, K_N$  分别为第一类、第二类  $N$  阶虚宗量 Bessel 函数; $B_1, B_2, B_3$  及  $B_4$  均为待定系数; $B_5$  为积分常数。由于轴对称受荷,即在圆板中心  $\rho = 0$  处  $u_p$  为 0,故待定系数  $B_2 = B_4 = B_5 = 0$ 。

将式(22)代入式(5)并积分整理得  $w_p$  的表达式为:

$$w_p = C_1 \xi_1 I_0(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) + C_2 \xi_2 I_0(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) + C_3 + \xi_3 \quad (23)$$

式中:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{24D}{h^3(k_{sp,u} - k_{sp,d})} \sqrt{\lambda_{11}} + \frac{2(k_{sp,u} + k_{sp,d})}{h(k_{sp,u} - k_{sp,d})} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}} \\ \xi_2 = \frac{24D}{h^3(k_{sp,u} - k_{sp,d})} \sqrt{\lambda_{12}} + \frac{2(k_{sp,u} + k_{sp,d})}{h(k_{sp,u} - k_{sp,d})} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{12}}} \\ \xi_3 = \frac{48D(q_p - p_p) - h^2(k_{sp,u} + k_{sp,d})(q_p - p_p)\rho^2}{4h^4 k_{sp,u} k_{sp,d}} \end{cases} \quad (24)$$

从而根据第一类虚宗量 Bessel 函数求导法则可求出桩顶范围内薄板转角  $\theta_{p,p}$ 、径向弯矩  $M_{p,p}$ 、薄板径向剪力  $F_{sp,p}$ 、薄板径向拉力  $F_{Tp,p}$  的表达式:

$$\begin{cases} \theta_{p,p} = C_1 \xi_1 \sqrt{\lambda_{11}} I_1(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) + C_2 \xi_2 \sqrt{\lambda_{12}} I_1(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) + 2\xi_3 \rho \\ M_{p,p} = C_1 D \xi_1 \left[ \lambda_{11} I_2(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) + \frac{(1+\nu)\sqrt{\lambda_{11}}}{\rho} I_1(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) \right] + C_2 D \xi_2 \left[ \lambda_{12} I_2(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) + \frac{(1+\nu)\sqrt{\lambda_{12}}}{\rho} I_1(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) \right] + 2(1+\nu) D \xi_3 \\ F_{sp,p} = C_1 D \xi_1 \left[ 4\lambda_{11} \frac{I_2(\sqrt{\lambda_{11}} \rho)}{\rho} + \lambda_{11} \sqrt{\lambda_{11}} I_3(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) \right] + C_2 D \xi_2 \left[ 4\lambda_{12} \frac{I_2(\sqrt{\lambda_{12}} \rho)}{\rho} + \lambda_{12} \sqrt{\lambda_{12}} I_3(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) \right] \\ F_{Tp,p} = C_1 \frac{12D}{h^2} \left[ (1+\nu) \frac{I_1(\sqrt{\lambda_{11}} \rho)}{\rho} + \sqrt{\lambda_{11}} I_2(\sqrt{\lambda_{11}} \rho) \right] + C_2 \frac{12D}{h^2} \left[ (1+\nu) \frac{I_1(\sqrt{\lambda_{12}} \rho)}{\rho} + \sqrt{\lambda_{12}} I_2(\sqrt{\lambda_{12}} \rho) \right] + \frac{3D(1+\nu)(k_{sp,u} - k_{sp,d})(q_p - p_p)}{h^3 k_{sp,u} k_{sp,d}} \end{cases} \quad (25)$$

## 2.2 桩间土范围内格室变形微分方程求解

仿照式(15)~(17),则桩间土范围内格室体径向位移控制方程,即方程组(14),也可整理转化得:

$$(\nabla^2 + \lambda_{21})(\nabla^2 + \lambda_{22})(\nabla^2 + \lambda_{23})y_2 = 0 \quad (26)$$

则桩间土方程式(26)可视为下列一元三次代数方程, $\lambda_{21}, \lambda_{22}$  及  $\lambda_{23}$  为此方程的解:

$$\lambda_2^3 + X\lambda_2^2 + Y\lambda_2 + Z = 0 \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} X = \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} = -\frac{h^2(k_{xs,u} + k_{xs,d})}{3D} \\ Y = \lambda_{21}\lambda_{22} + \lambda_{22}\lambda_{23} + \lambda_{21}\lambda_{23} = -\frac{h^4 k_{xs,u} k_{xs,d} + 12Dk_s}{12D^2} \\ Z = \lambda_{21}\lambda_{22}\lambda_{23} = -\frac{h^2 k_s (k_{xs,u} + k_{xs,d})}{12D^2} \\ A = X^2 - 3Y \\ B = XY - 9Z \\ C = Y^2 - 3XZ \end{cases} \quad (28)$$

采用盛金公式解方程,其判别式为  $\Delta=B^2-4AC$ , 则式(27)的解分为下列两种情况:

1)当  $\Delta>0$  时,式(27)有一个实根与一对共轭虚根,根据盛金求解公式及 Bessel 复变函数性质可构造如下解:

$$y_2=C_4I_0(\sqrt{-\lambda_{21}}\rho)+C_5K_0(\sqrt{-\lambda_{21}}\rho)+C_6\alpha_0(\rho)+C_7\beta_0(\rho)+C_8\chi_0(\rho)+C_9\delta_0(\rho) \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_0(\rho)=\frac{1}{2}[J_0(\sqrt{\lambda_{22}}\rho)+J_0(\sqrt{\lambda_{23}}\rho)] \\ \beta_0(\rho)=\frac{1}{2i}[J_0(\sqrt{\lambda_{22}}\rho)-J_0(\sqrt{\lambda_{23}}\rho)] \\ \chi_0(\rho)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{22}}\rho)+H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{23}}\rho)] \\ \delta_0(\rho)=\frac{1}{2i}[H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{22}}\rho)-H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{23}}\rho)] \end{cases} \quad (30)$$

式中: $C_4\sim C_9$  为待定系数; $J_N$  为第一类  $N$  阶 Bessel 函数; $H_N^{(1)}$  与  $H_N^{(2)}$  分别为第一类和第二类  $N$  阶 Hankel 函数,在此解中, $N=0$ .

2)当  $\Delta<0$  时,式(27)有三个互不相等的实根,引入虚宗量 Bessel 函数求解得:

$$y_2=C_4I_0(\sqrt{-\lambda_{21}}\rho)+C_5K_0(\sqrt{-\lambda_{21}}\rho)+C_6I_0(\sqrt{-\lambda_{22}}\rho)+C_7K_0(\sqrt{-\lambda_{22}}\rho)+C_8I_0(\sqrt{-\lambda_{23}}\rho)+C_9K_0(\sqrt{-\lambda_{23}}\rho) \quad (31)$$

得到  $y_2$  的表达式后,结合式(14)中方程 1 可得桩间土范围内格室体挠度表达式  $w_s$  为:

$$w_s=-\frac{24D^2}{h^3(k_{xs,u}-k_{xs,d})k_s}\nabla^4y_2+\frac{8D(k_{xs,u}+k_{xs,d})}{k_s h(k_{xs,u}-k_{xs,d})}\nabla^2y_2-\frac{2hk_{xs,u}k_{xs,d}}{k_s(k_{xs,u}-k_{xs,d})}y_2+\frac{q_s}{k_s} \quad (32)$$

结合式(14)中方程 2,可得桩间土范围内格室体垫层中面位移  $u_s$  的表达式为:

$$u_s=\frac{12D^2}{h^2k_s(k_{xs,u}+k_{xs,d})}(\nabla^4y_2)'+\frac{4D}{k_s}(\nabla^2y_2)'+\frac{12Dk_s+h^4k_{xs,u}k_{xs,d}}{h^2k_s(k_{xs,u}+k_{xs,d})}y_2' \quad (33)$$

由于  $w_s$  和  $u_s$  的表达式过于冗长,在此不便展开.根据  $w_s$  与  $u_s$  的表达式可得到格室体径向转角、弯矩及剪力的表达式.

由于桩顶反力均布,假设  $q_p$  已知,可得:

$$w_p|_{\rho=0}=\frac{p_p}{k_p} \quad (34)$$

结合式(34)以及边界条件和连续条件,即可求出参数  $C_1\sim C_9$  及  $p_p$ ,并将其分别代入式(22)、式(23)及式(32)、式(33)中,从而得到格室的挠度与中面位移函数.

### 3 桩土应力比及沉降计算

根据竖向受力平衡,桩间土承受的平均压力为:

$$p_s=\frac{q-mp_p}{1-m} \quad (35)$$

式中: $q$  为格室体上部所承受的平均荷载; $m$  为桩体置换率.

则桩土应力比  $n^{[4]}$  为:

$$n=\frac{p_p}{p_s} \quad (36)$$

采用分析模型中格室体边缘处挠度作为沉降  $S$ :

$$S=w_s|_{\rho=\frac{d}{2}} \quad (37)$$

则桩土差异沉降  $\Delta s$  为:

$$\Delta s=w_s|_{\rho=\frac{d}{2}}-w_p|_{\rho=0} \quad (38)$$

### 4 参数取值探讨

通过本文中土工格室加筋垫层变形的计算可知,桩体变形刚度  $k_p$ 、桩间土基床系数  $k_s$ 、界面摩阻系数  $k_x$  以及变形刚度  $D$  对计算结果有重要影响.其中,桩体变形刚度系数  $k_p$ ,一般可通过静载试验确定或理论计算得到,基床系数  $k_s$  可通过试验方法获得,也可参照《公路路基设计规范》(JTG D30—2004)等规范中的经验取值.按照上述方法,结合工程实际可以取到较为准确的值,故在本节中不做赘述.

对于  $k_x$  以及  $D$  来说,其值可以通过相应的试验确定,也可以结合工程实际以及下述中现有的研究成果来确定.

#### 4.1 界面摩阻系数 $k_x$ 取值

刘炜等<sup>[24]</sup>通过大型直剪仪获得了不同法向应力下剪力与剪切位移之间的关系并总结了规律:不同法向应力条件下,临界剪切位移一般维持在 1~6 mm.根据这一规律,马缤辉<sup>[16]</sup>引入库伦模型对其进行了描述,认为简化后的折线模型,其斜线部分的斜率即可作为摩阻系数  $k_x$ .

此外,关于摩阻系数  $k_x$ ,部分学者提出一些经验取值,如文献[19]认为理论分析时  $k_x$  可取 10 倍左右的  $k_s$ .

#### 4.2 格室垫层变形刚度 $D$ 取值

杨明辉等<sup>[25]</sup>设计了叠梁试验,通过将格室垫层

置于上、下两梁板之间形成叠梁体系进行加载从而得到不同荷载条件下的叠梁挠度,并利用叠梁理论推算出格室垫层的变形刚度  $D$ , 试验中叠梁体系如图 6 所示。

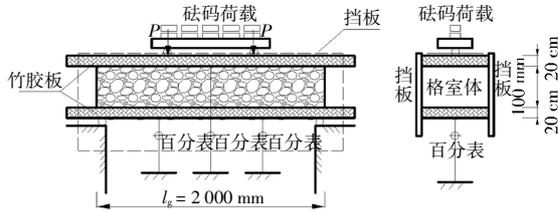


图 6 叠梁试验装置示意

Fig.6 The facility of the fold beam test

由于格室体垫层变形刚度  $D$  主要取决于其复合弹性模量  $E$ , 根据杨明辉等人的试验结果, 不同规格的土工格室垫层配合不同填料得到的复合弹性模量, 如表 1 所示。

表 1 土工格室垫层复合弹性模量  $E$  取值

Tab.1 Complex modulus of elasticity  $E$  in geocell cushion

土工格室种类	包裹材料	复合弹性模量 $E$ /MPa
大规格土工格室( $h=10$ cm)	级配碎石	50~100
	粉土	40~80
大规格土工格室( $h=3.5$ cm)	级配碎石	35~55

### 5 工程算例

采用一工程实例来验证本文方法的正确性. 本文选用湖南某高速公路软土地基试验路段进行验证, 其采用的处理方式土工格室+搅拌桩. 地基为淤泥质黏土, 上部填土荷载重度  $\gamma_s = 20$  kN/m<sup>3</sup>, 试验路段路基填筑高度为 4 m. 搅拌桩直径  $d = 0.50$  m, 桩间距  $s_d = 1.2$  m, 桩顶填筑 1 层厚度为 30 cm 的砂垫层及 1 层厚度为 10 cm 的土工格室, 采用梅花形布桩. 实测结果为: 沉降  $S$  为 5.3 cm, 桩土应力比为 6.5. 复合弹性模量  $E = 40$  MPa, 桩体变形刚度系数  $K_p = 2\ 355$  kN/m, 处理后桩间土基床系数  $K_s = 1\ 024$  kN/m<sup>3</sup>, 薄板厚度  $h = 0.10$  m, 复合泊松比  $\nu = 0.3$ . 土工格室加筋体受力变形计算流程图如图 7 所示, 根据室内外试验结果<sup>[24-25]</sup>并参照文献<sup>[26]</sup>, 取  $k_{ux} = 12\ 000$  kN/m<sup>3</sup>,  $k_{ux} = 6\ 000$  kN/m<sup>3</sup>,  $k_s = 1\ 200$  kN/m<sup>3</sup>. 经计算桩土应力比与沉降如表 2 所示. 土压力盒埋设示意

图如图 8 所示。

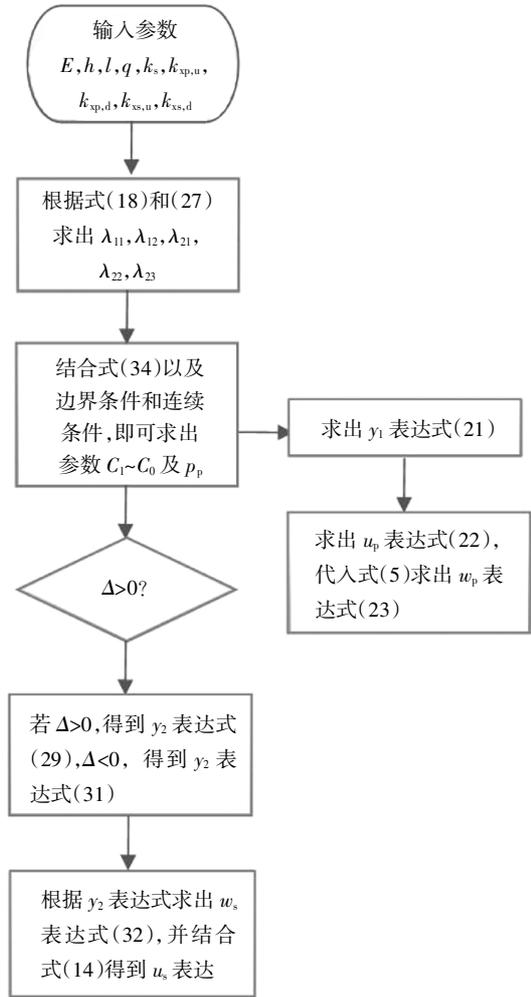


图 7 土工格室加筋体受力变形计算流程图

Fig.7 The flow chart of deformation of geocell-reinforcement

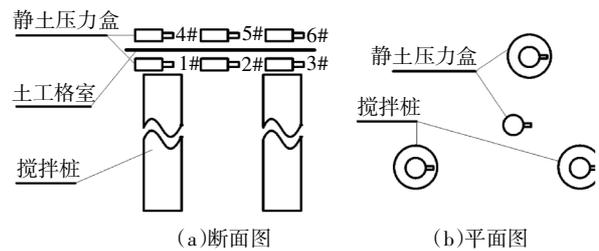


图 8 试验路段搅拌桩区静土压力盒埋设示意图

Fig.8 A schematic diagram of the static soil pressure box in the mixing pile area of the test section

根据  $d_e = 1.05s_d = 1.26$  m, 将相关参数代入并结合式(34)以及边界条件和连续条件, 即可求出参数  $C_1 \sim C_9$  及  $p_p$ , 并将其分别代入式(22)(23)及式(32)(33)中, 从而得到格室的挠度与中面位移函数. 根据计算结果求得计算单元的水平加筋垫层的变形图, 如图 9 所示。

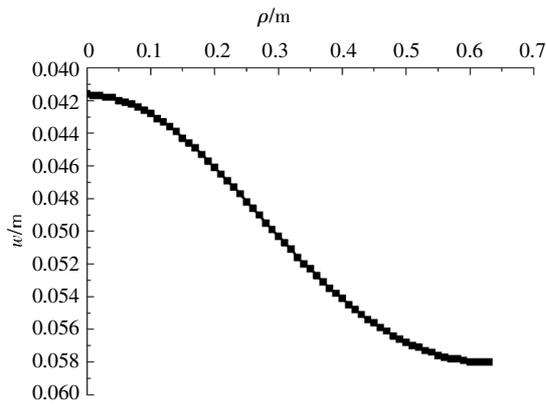


图9 水平加筋垫层的变形图

Fig.9 Deformation of the horizontal reinforced mattress

格室体垫层下方桩顶与桩间的沉降与桩土应力比的实测值与计算值如表2所示。

表2 沉降与桩土应力比实测值与计算值对比结果

Tab.2 Comparison of observed and calculated settlement and pile-soil stress ratio

	桩土应力比 $n$	沉降 $S/cm$
实测值	6.5	5.3
文献[14]方法	5.8	—
本文方法	6.2	5.9

由表2中本文计算所得的桩土应力比和沉降值与实测值及文献[14]进行比较可知,本文方法更为接近实测值,这是由于本文与文献[14]方法相比,考虑了格室体与地基的摩阻效应。

### 6 参数分析

本文建立了一个桩承式土工格室加筋路堤<sup>[27-28]</sup>的模型(如图10所示),从而探讨各个参数对地基桩土应力比及土工格室加筋体变形的影响。其参数分别有:格室体上下表面水平摩阻系数  $k_{xu}$  和  $k_{xd}$ ,复合弹性模量  $E$ ,置换率  $m$ ,桩体变形刚度  $k_p$ ,桩间土

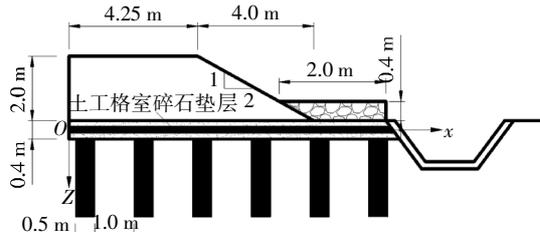


图10 参数分析中的桩承式土工格室加筋路堤模型

Fig.10 Geocell-reinforced and pile-supported embankment in parametric study

基床系数  $k_s$ ,路堤上部填土荷载重度  $\gamma_e = 20 \text{ kN/m}^3$ ,填筑高度  $H$  为 2.0 m,路堤边坡斜度为  $2H:1V$ ,侧面混凝土护堤为 2.0 m 宽,0.4 m 厚,单位重量为  $22 \text{ kN/m}^3$ .根据本文方法,对其模型的格室体单元进行分析。

#### 6.1 $k_p/k_s, k_{xu}/k_{xd}, m$ 对 $n$ 的影响

图11~图13分别为桩土应力比与桩土刚度比、上下表面水平摩阻系数比和面积置换率的关系.如图11所示,桩土应力比随着桩土刚度比的增加呈非线性趋势增大,且当弹性模量较小时,其非线性趋势较为明显。

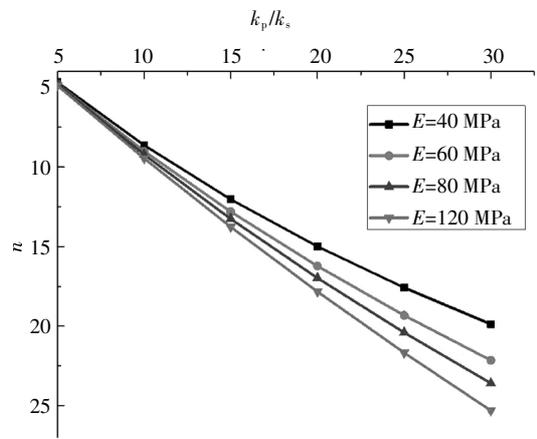


图11 桩土刚度比和桩土应力比的关系

Fig.11 Relation between  $k_p/k_s$  and  $n$

如图12所示,随着格室体上下表面水平摩阻系数比的增大,桩土应力比缓慢增大.当上下表面水平摩阻系数比一定时,桩土应力比随弹性模量的增加而增大.  $E = 120 \text{ MPa}$  时,随着  $k_{xu}/k_{xd}$  数值变化,  $n$  基本不变,可见当弹性模量较大时,摩阻系数比对桩土应力比的影响不明显。

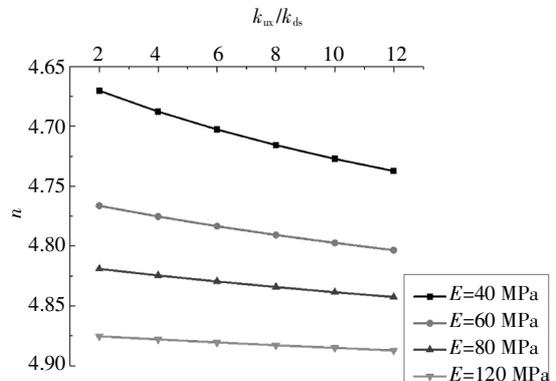


图12 界面摩阻系数比和桩土应力比的关系

Fig.12 Relation between  $k_{xu}/k_{xd}$  and  $n$

如图 13 所示, 桩土应力比随着面积置换率的增大而减小. 且当面积置换率相同时, 格室体的弹性模量越大, 桩土应力比越大.

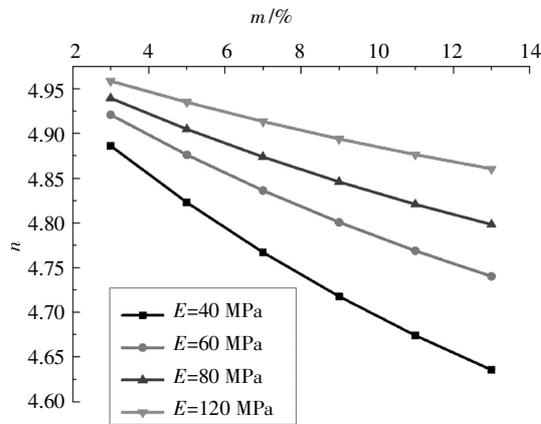
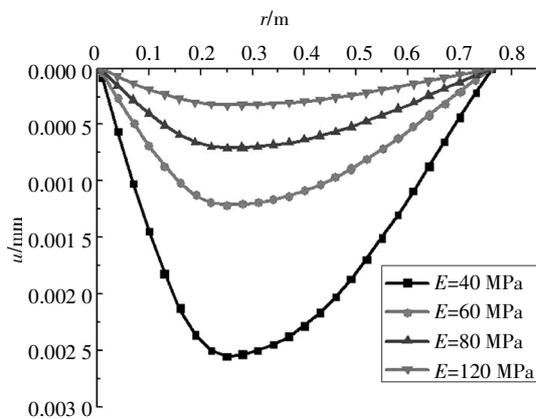


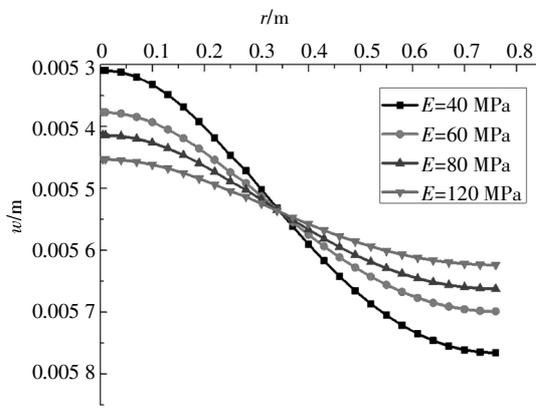
图 13 面积置换率和桩土应力比的关系  
Fig.13 Relation between  $m$  and  $n$

### 6.2 复合弹性模量对格室垫层的变形影响

图 14 为格室体受复合弹性模量影响的变形情况. 因为本文的  $u$  只代表了由于格室体上下界面摩阻差异所引起的中面径向位移, 所以随着弹性模量



(a) 复合模量对格室垫层径向位移的影响



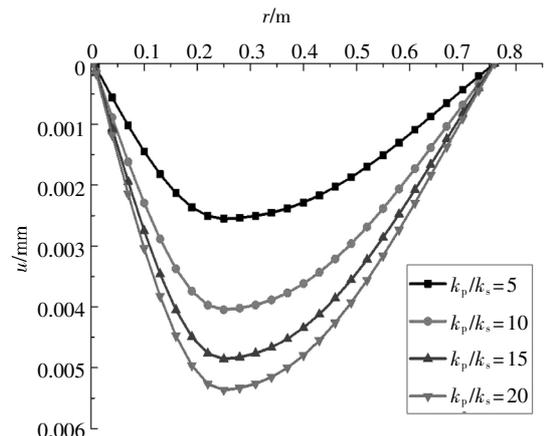
(b) 复合模量对格室体挠曲变形的影响

图 14 不同  $E$  条件下格室垫层的变形影响  
Fig.14 Influence of geocell deformation in different  $E$

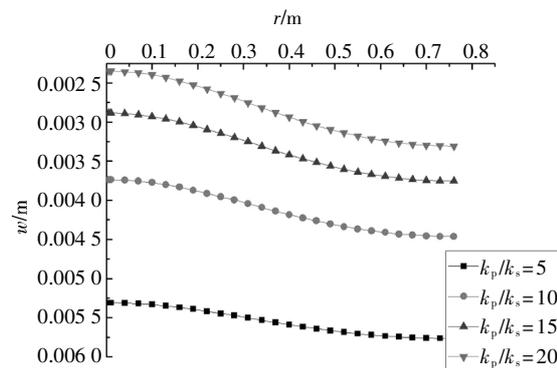
的增大, 上下界面摩阻力差异减小的同时, 中面径向位移也随之减小. 且沿着格室体的径向方向呈先增大后减小的趋势, 其位移最大值在桩边缘处. 由图 14 可知, 复合弹性模量的增大导致了格室体的最大沉降值及沉降差减小, 这是因为随着弹性模量的增大, 格室体的弯曲刚度增大, 导致格室体更趋近于刚性体, 从而产生更小的弯曲挠曲.

### 6.3 桩土刚度比对格室垫层的变形影响

图 15 为格室体的中面径向位移及挠曲变形随  $k_p/k_s$  变化的关系曲线. 由图 15 可知,  $u$  随着  $k_p/k_s$  的增大而增大, 而  $w$  则随着  $k_p/k_s$  的增大而减小. 格室体的最大沉降量  $w_{max}$  从 5.77 cm (当  $k_p/k_s = 5$  时) 减小到 3.3 cm (当  $k_p/k_s = 20$  时), 可见增加桩体刚度可有效减少沉降. 同时, 当桩土刚度比较大时, 增大桩土刚度比对格室体的径向和竖向位移的影响较小, 这表明在实际工程中应对  $k_p/k_s$  采取一定的合理取值范围.



(a) 桩土刚度比对格室垫层径向位移的影响



(b) 桩土刚度比对格室垫层挠曲变形的影响

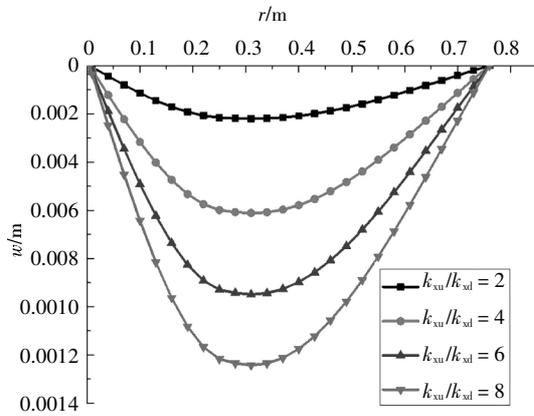
图 15 不同  $k_p/k_s$  条件下格室垫层的变形影响

Fig.15 Influence of geocell deformation in different  $k_p/k_s$

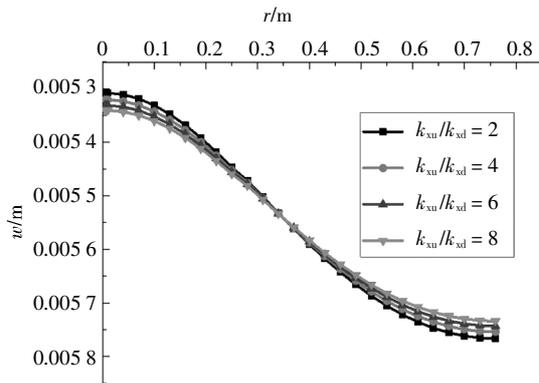
### 6.4 格室体上下表面水平摩阻系数对格室垫层的变形影响

格室体在不同  $k_{xu}/k_{xd}$  下  $u$  和  $w$  沿轴线的变化曲

线如图 16 所示. 由图 16 可知, 垫层上下表面摩阻系数比越大, 垫层与土层间的摩阻效应就越强, 从而导致中面位移的增加. 但薄板在  $k_{xu}/k_{xd}=8$  时的沉降最大值较  $k_{xu}/k_{xd}=2$  时仅降低了 0.63%, 可见其对薄板有减小沉降的作用但不明显.



(a) 水平摩阻系数对格室体径向位移的影响



(b) 水平摩阻系数对格室体挠曲变形的影响

图 16 不同  $k_{xu}/k_{xd}$  条件下格室垫层的变形影响

Fig.16 Influence of geocell deformation in different  $k_{xu}/k_{xd}$

## 7 结论

本文将土工格室加筋体视为弹性圆薄板, 考虑其上下界面摩阻效应, 桩土刚度差异, 以及加筋体的中面位移, 建立相应的变形控制微分方程, 并利用 Bessel 函数对其进行求解, 得到了路堤荷载下双向增强复合地基中土工格室垫层挠曲函数以及中面位移函数. 在此基础上, 利用实际工程对本文方法进行了验证并开展了参数分析, 得出如下结论:

1) 通过与工程实例进行对比验证, 表明本文计算方法得出的桩土应力比及沉降等结果与实测结果较为接近, 从而证明了本文计算方法的合理性, 为工程实践提供了理论参考.

2) 根据本文参数分析可知, 格室体的复合弹性

模量、界面摩阻系数和桩土刚度比在一定取值范围内对降低格室垫层挠曲和调节荷载分配方面, 有着积极作用. 格室体的复合弹性模量越大, 垫层产生的水平位移及挠度越小. 桩土刚度差异越大, 薄板径向位移越大, 但薄板挠度越小. 垫层与土体间的摩阻效应越强, 中面位移越大, 但摩阻系数比对挠度影响较小.

3) 本文只考虑了由于格室垫层上、下界面摩阻差异所导致的中面位移, 未考虑其由挠曲所引起的拉伸变形, 即薄板挠曲时的几何非线性问题, 因此在该方面尚需进一步补充研究.

## 参考文献

- [1] 谢永利, 俞永华, 杨晓华. 土工格室在处治路基不均匀沉降中的应用研究[J]. 中国公路学报, 2004, 17(4):7-10.  
XIE Y L, YU Y H, YANG X H. Application study of treating differential settlement of subgrade with geocell [J]. China Journal of Highway and Transport, 2004, 17(4):7-10. (In Chinese)
- [2] 杨晓华. 土工格室工程性状及应用技术研究[D]. 西安: 长安大学公路学院, 2005:91-146.  
YANG X H. Study on engineering character and applied technique of geocell [D]. Xi'an: School of Highway, Chang'an University, 2005:91-146. (In Chinese)
- [3] 蒋鹏飞, 陈昌富, 赵明华, 等. 土工格室垫层+碎石桩复合地基在高速公路软基处理中的应用与研究[J]. 中国公路学报, 2006, 4(4):135-139.  
JIANG P F, CHEN C F, ZHAO M H, et al. Application and research on geocell and gravel pile composite foundation in soft ground treatment in expressway [J]. China Journal of Highway and Transport, 2006, 4(4):135-139. (In Chinese)
- [4] 龚晓楠. 复合地基理论与工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002:19-55.  
GONG X N. Theory and application of composite foundation [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002:19-55. (In Chinese)
- [5] 赵明华, 张玲, 马缤辉. 基于 Winkler 假定的土工格室加筋体受力分析[J]. 水利学报, 2008, 39(6):697-702.  
ZHAO M H, ZHANG L, MA B H. Deformation analysis of geocell reinforcement based on Winkler model [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 39(6):697-702. (In Chinese)
- [6] 赵明华, 马缤辉, 罗松南. 考虑底面摩阻效应的弹性地基梁微分算子级数法[J]. 水利学报, 2011, 42(4):469-476.  
ZHAO M H, MA B H, LUO S N. Differentiator series calculation method for beams on elastic foundation considering frictional effect of bottom surface [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2011, 42(4):469-476. (In Chinese)
- [7] 张玲. 双向增强体复合地基承载机理及其设计计算理论研究[D]. 长沙: 湖南大学土木工程学院, 2012:39-102.  
ZHANG L. Working mechanism of bidirectional reinforced composite foundation and its design method [D]. Changsha: College of Civil Engineering, Hunan University, 2012:39-102. (In Chinese)

- [8] ZHANG L,ZHAO M H,HU Y X,*et al.* Semi-analytical solutions geocell-reinforced and pile-supported embankment [J].Computers and Geotechnics,2012,44:167—175.
- [9] 饶为国,江辉煌,侯庆华. 桩-网复合地基工后沉降的薄板理论解[J].水利学报,2002,33(4):23—27.  
RAO W G,JIANG H H,HOU Q H. Deformation of sheet plate due-to residual settlement of pile-net composite foundation [J].Journal of Hydraulic Engineering,2002,33(4):23—27. (In Chinese)
- [10] 饶为国,杜文锋,罗卫东等. 三点法推算桩-网复合路基工后沉降量[J].中国公路学报,2001,14(8):92—95.  
RAO W G,DU W F,LUO W D,*et al.* Three point calculation method of residual settlement about pile-net composite foundation [J]. China Journal of Highway and Transport,2001,14(8):92—95. (In Chinese)
- [11] 张福海,俞仲泉. 平面应变条件下土工格室加筋垫层的变形分析[J].岩土力学,2005,26(S):241—243.  
ZHANG F H,YU Z Q. Analysis of deformation of geocell mattress under plane strain condition [J]. Rock and Soil Mechanics,2005,26(S):241—243. (In Chinese)
- [12] 赵明华,刘敦平,张玲. 双向增强体复合地基工后沉降分析[J]. 中国公路学报,2008,25(10):26—30.  
ZHAO M H,LIU D P,ZHANG L. Analysis of residual settlement of two-direction reinforced composite foundation [J]. China Journal of Highway and Transport,2008,25(10):26—30. (In Chinese)
- [13] 赵明华,刘猛,龙军,等. 双向增强复合地基土工格室加筋体变形分析[J]. 中国公路学报,2014,27(5):97—104,124.  
ZHAO M H,LIU M,LONG J,*et al.* Deformation analysis of geocell-reinforcement in bidirection reinforced composite foundation [J]. China Journal of Highway and Transport,2014,27(5):97—104,124. (In Chinese)
- [14] 郑俊杰,张军,马强,等. 双向增强体复合地基桩土应力比三维分析[J].华中科技大学学报(自然科学版),2010,38(2):83—86.  
ZHENG J J,ZHANG J,MA Q,*et al.* Three dimensional analysis of pile-soil stress ratio of biaxial reinforcement composite foundation [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition),2010,38(2):83—86. (In Chinese)
- [15] 赵明华,刘猛,马缤辉. 基于弹性地基板理论的桩网复合地基桩土应力比及沉降计算 [J]. 中南大学学报(自然科学版),2016,47(6):2007—2014.  
ZHAO M H,LIU M,MA B H. Calculation of pile-soil stress ratio and settlement of pile-net composite foundation based on elastic foundation plate [J].Journal of Central South University (Science and Technology),2016,47(6):2007—2014. (In Chinese)
- [16] 马缤辉. 土工格室+碎石桩双向增强复合地基承载特性及沉降计算研究[D].长沙:湖南大学土木工程学院,2012:47—103.  
MA B H.The research on bearing characteristic and settlement of composite foundation bidirectional reinforced by stone columns and geocell [D]. Changsha:College of Civil Engineering,Hunan University,2012:47—103. (In Chinese)
- [17] 陈昌富,周志军. 双向增强体复合地基桩土应力比分析[J].岩土力学,2009,30(9):2660—2666.  
CHEN C F,ZHOU Z J. Analysis of pile-soil stress ratio for double reinforced composite ground [J]. Rock and Soil Mechanics,2009,30(9):2660—2666. (In Chinese)
- [18] 谈至明. 具有水平摩阻力的弹性地基上梁的解 [J]. 力学与实践,1997,19(3):33—35.  
TAN Z M. The solution of elastic foundation beam considering horizontal frictional resistance [J].Mechanics in Engineering,1997,19(3):33—35. (In Chinese)
- [19] 周继凯,杜钦庆. 考虑水平力作用的改进型文克勒地基模型 [J]. 河海大学学报(自然科学版),2004,32(6):669—673.  
ZHOU J K,DU Q Q. Modified winkler foundation model with horizontal force taken into account [J]. Journal of Hehai University (Natural Sciences),2004,32(6):669—673. (In Chinese)
- [20] 边学成,宋广,陈云敏. Pasternak 地基中土工格室加筋体的受力变形分析[J].工程力学,2012,29(5):147—155.  
BIAN X C,SONG G,CHEN Y M. Deformation behaviors of geocell reinforcement in Pasternak ground [J]. Engineering Mechanics,2012,29(5):147—155. (In Chinese)
- [21] 黄义,何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京:科学出版社,2005:49—91.  
HUANG Y,HE F S. The theory of beam,plate and shell on elastic foundation [M]. Beijing:Science Press,2005:49—91. (In Chinese)
- [22] 袁江雅. 路堤荷载下碎石桩复合地基沉降计算研究[J]. 公路工程,2010,35(2):1—5.  
YUAN J Y. Research on settlement calculation of gravel pile composite foundation under embankment load [J].Highway Engineering,2010,35(2):1—5. (In Chinese)
- [23] 马缤辉,赵明华,张玲,等. 基于能量原理的弹性地基梁底面摩擦效应分析[J]. 铁道学报,2012,34(4):94—100.  
MA B H,ZHAO M H,ZHANG L,*et al.* Analysis on underside friction effect of beam on elastic foundation based on energy principle [J]. Journal of the China Railway Society,2012,34(4):94—100. (In Chinese)
- [24] 刘炜,汪益敏,陈页开. 土工格栅与土工格室加筋土的大型直剪试验和邓肯-张模型参数研究 [J]. 勘察科学技术,2007,3(3):9—12  
LIU W,WANG Y M,CHEN Y K. Research on large size direct shear test between geogrid and geocell reinforced soil and parameters of duncan-chang model [J]. Site Investigation Science and Technology,2007,3(3):9—12. (In Chinese)
- [25] 杨明辉,邓岳宝,赵明华. 基于叠梁试验的土工格室垫层刚度确定方法研究[J]. 土木工程学报,2011,44(11):87—92.  
YANG M H,DENG Y B,ZHAO M H. Study of stiffness test method of geocell cushion based on superposed beam theory [J]. China Civil Engineering Journal,2011,44(11):87—92. (In Chinese)
- [26] ZHANG L,ZHAO M,SHI C,*et al.* Settlement calculation of composite foundation reinforced with stone columns [J]. International Journal of Geomechanics,2012,13(3):248—256.
- [27] 张玲,程钦桂,赵明华. 基于双层 Euler 梁理论的土工格室加筋体变形计算 [J]. 湖南大学学报(自然科学版),2017,44(9):114—121.  
ZHANG L,CHENG Q G,ZHAO M H. Deformation calculation of geocell reinforcement based on the double Euler beams theory [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2017,44(9):114—121. (In Chinese)
- [28] 赵明华,陈艳平,陈昌富,等. 土工格室+碎石垫层结构体的稳定性分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2003,30(2):68—72.  
ZHAO M H,CHEN Y P,CHEN C F,*et al.* Stability analysis of geocell+ gravel cushion structure [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2003,30(2):68—72. (In Chinese)