

## 考虑温度效应的斜齿轮时变啮合刚度解析算法

林腾蛟<sup>†</sup>, 赵子瑞, 江飞洋, 陈兵奎  
(重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

**摘要:**以斜齿轮副为研究对象, 基于切片法和积分思想, 计入齿面接触温度变化引起的齿廓形变, 结合轮齿接触、弯曲、剪切、轴向压缩及基体弹性变形, 提出了考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度解析算法, 并通过有限元法验证了算法的准确性. 分析了不同摩擦因数、输入转矩、输入转速等工况参数对斜齿轮啮合刚度的影响规律. 结果表明, 考虑齿轮温升影响后, 轮齿从啮入到啮出整个过程的啮合刚度均有所增大; 随着摩擦因数、输入转矩和输入转速的增大, 斜齿轮本体温度及啮合齿面瞬时闪温升高, 单齿啮合刚度和综合啮合刚度均值呈增大趋势. 研究结果可为高速重载齿轮系统准确高效的动力学分析提供理论依据.

**关键词:**斜齿轮; 温度效应; 时变啮合刚度; 势能法

**中图分类号:**TH132.41

**文献标志码:**A

## An Analytic Algorithm of Time-varying Mesh Stiffness of Helical Gears Considering Temperature Effect

LIN Tengjiao<sup>†</sup>, ZHAO Zirui, JIANG Feiyang, CHEN Bingkui  
(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** Taking a helical gear pair as the research object, the analytic algorithm of time-varying mesh stiffness of helical gears with temperature was proposed based on slicing method and integral thought. In this algorithm, the tooth profile deformation caused by change of tooth contact temperature, elastic deformation of tooth contact, bending, shear, axial compression and the wheel were taken into account. The accuracy of the algorithm was verified by using finite element method. Then the influence of working parameters, such as friction coefficient, input torque and input speed, on the mesh stiffness of gears was analyzed. The results show that the mesh stiffness of teeth increases in the whole meshing process after considering the influence of temperature. Besides, the body temperature and instantaneous flash temperature of helical gears increase with the increase of friction coefficient, input torque and input speed, so the single mesh stiffness and the mean of total mesh stiffness increase. The research results can provide a theoretical basis for accurate and efficient dynamic analysis of the high-speed and heavy-duty gear system.

**Key words:** helical gears; temperature effect; time-varying mesh stiffness; potential energy method

\* 收稿日期: 2019-05-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51875057), National Natural Science Foundation of China(51875057); 重庆市重点产业共性关键技术创新专项(CSTC2015ZDCY-ZTZX70013), Industrial Common Key Technology Innovation of Chongqing(CSTC2015ZDCY-ZTZX70013)

作者简介: 林腾蛟(1968—), 男, 重庆人, 重庆大学教授, 博士生导师

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: tjlin@cqu.edu.cn

齿轮系统作为机械装置中最为广泛的动力和运动传递形式,正朝着大功率、高转速、低噪声和轻量化方向发展.在高速重载工况下,由于啮合齿面相对滑动速度大,瞬时温升高,直接影响齿轮系统内部的温度分布,引起结构热应力及热变形,进而对齿轮啮合刚度产生较大影响,而准确高效的啮合刚度计算方法又是齿轮系统动力学分析的关键.因此,综合考虑温度影响,开展斜齿轮时变啮合刚度解析算法研究,对高速重载齿轮系统动力学设计有着重要的工程意义.

近年来,对于齿轮系统时变啮合刚度的研究非常活跃.在解析算法方面,Cui等<sup>[1]</sup>、Chaari等<sup>[2]</sup>和Liang等<sup>[3]</sup>基于材料力学理论,运用势能法计算了直齿轮的啮合刚度;在直齿轮啮合刚度算法的基础上,Wan等<sup>[4]</sup>提出了一种累积积分势能法计算斜齿轮的啮合刚度,并研究了齿轮参数与齿根裂纹对啮合刚度的影响;万志国等<sup>[5]</sup>、刘文等<sup>[6]</sup>考虑了基圆与齿根圆不重合的问题,运用势能法分别提出了求解直齿轮及斜齿轮啮合刚度的改进算法.在有限元法方面,Cooley等<sup>[7]</sup>、Liang等<sup>[8]</sup>提出了多种基于有限元法的直齿轮时变啮合刚度计算方法,并评估了各种方法的应用条件及优缺点;Fernandez等<sup>[9-10]</sup>和Ma等<sup>[11]</sup>综合考虑加工误差、齿顶修形或齿轮摩擦等非线性因素,采用有限元法与弹性接触理论相结合的方式,计算了直齿轮的时变啮合刚度.在考虑温度效应方面,苟向锋等<sup>[12]</sup>建立了由齿面接触温度变化引起直齿轮齿廓形变的数学表征,而后基于Hertz接触理论研究了接触温度对直齿轮啮合刚度的影响;罗彪等<sup>[13]</sup>基于石川模型,将轮齿齿廓简化为由梯形和矩形组成的当量齿形,综合考虑温度对直齿轮刚度的影响,引入了热刚度的概念,并提出了一种直齿轮热刚度的解析算法,计算结果与有限元法基本吻合.目前有关考虑温度效应的齿轮啮合刚度研究已取得一定的成果,但有限元法计算规模较大,解析法仅针对直齿轮开展了相关研究,关于考虑温度效应的斜齿轮时变啮合刚度解析算法鲜有报道.

在上述研究成果的基础上,本文以斜齿轮副为研究对象,提出一种考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度解析算法.将轮齿简化为齿根圆上的变截面悬臂梁,基于切片法和积分思想,在考虑基圆与齿根圆不重合因素的同时,计入齿面接触温度变化引起的轮齿齿廓形变,以确保啮合刚度计算结果准确性;而后分析摩擦因数、输入转矩、输入转速等工况参数对斜齿轮啮合刚度的影响规律.

## 1 考虑热变形的斜齿轮端面齿廓方程

### 1.1 斜齿轮基体热变形

斜齿轮副达到热平衡状态后,本体温度场基本稳定,但各处温度非均一.对于齿轮基体,尽管本体温度场稳定,但与轮齿相固联的基体部分温度不同,因此将斜齿轮基体温度场处理为无内热源稳态非均匀温度场,其在柱面坐标系下的导热微分方程为<sup>[14]</sup>:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (1)$$

式中: $T$ 为斜齿轮基体内任意点的温度; $r$ 、 $\varphi$ 、 $z$ 分别为柱面坐标系中的坐标分量; $\lambda$ 为材料热膨胀系数.

假定斜齿轮副啮合为理想接触,沿齿面无偏载,且轮齿膨胀导致齿侧间隙减小后仍可保证最小油膜厚度.设热平衡状态下,斜齿轮基体温度仅随径向坐标 $r$ 变化,即一维稳态温度场,则导热微分方程(1)可简化为:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2)$$

其积分解为:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3)$$

式中: $C_1$ 、 $C_2$ 均为积分常量.满足热力学第一类边界条件,即 $r=R_i$ 时, $T=T(R_i)$ ;  $r=R_0$ 时, $T=T(R_0)$ ,将其代入微分方程通解(3)中解得斜齿轮基体温度为:

$$T(r) = T(R_i) + [T(R_0) - T(R_i)] \frac{\ln r - \ln R_i}{\ln R_0 - \ln R_i} \quad (4)$$

式中: $R_i$ 为斜齿轮的轴孔半径; $T(R_i)$ 为热平衡时斜齿轮的轴孔温度; $R_0 = \max(R_b, R_f)$ ,  $R_b$ 为基圆半径,  $R_f$ 为齿根圆半径; $T(R_0)$ 为热平衡时基体相应柱面的温度.

当不考虑外力、表面残余应力等因素的作用,即认为柱体的应力仅由温度改变而引起的,按位移法求解基体的热变形,得到基体径向位移函数为:

$$u = \frac{(1+\nu)\lambda}{r} \int_{R_i}^r T r dr + \frac{r\lambda(1-\nu)}{R_0^2 - R_i^2} \int_{R_i}^{R_0} T r dr + \frac{\lambda(1+\nu)R_i^2}{r(R_0^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_0} T r dr \quad (5)$$

式中: $u$ 为基体内任一点的径向位移; $\nu$ 为泊松比.

当 $R_b > R_f$ 时,有 $R_0 = R_b$ ,令 $r = R_b$ ,将式(4)代入式(5)可得热平衡时斜齿轮基圆的热变形量:

$$u_b = u|_{r=R_b} = R_b \lambda T(R_i) + \frac{\lambda R_b^3 [T(R_b) - T(R_i)]}{R_b^2 - R_i^2} - \frac{\lambda R_b [T(R_b) - T(R_i)]}{2(\ln R_b - \ln R_i)} \quad (6)$$

同理,令  $r=R_f$ , 可得热平衡时齿根圆的热变形量:

$$u_f = u|_{r=R_f} = \frac{\lambda [(1+\nu)R_f^2 + (1-\nu)R_i^2]}{R_f(R_f^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_f} Trdr + \frac{(1+\nu)\lambda}{R_f} \int_{R_i}^{R_f} Trdr \quad (7)$$

当  $R_f > R_b$  时, 则有  $R_0 = R_f$ , 令  $r=R_b$ , 将式(4)代入式(5)可得热平衡时斜齿轮基圆的热变形量:

$$u_b = u|_{r=R_b} = \frac{\lambda [(1+\nu)R_b^2 + (1-\nu)R_i^2]}{R_b(R_b^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_b} Trdr + \frac{(1+\nu)\lambda}{R_b} \int_{R_i}^{R_b} Trdr \quad (8)$$

同理,令  $r=R_f$ , 可得热平衡时齿根圆的热变形量:

$$u_f = u|_{r=R_f} = R_f \lambda T(R_i) + \frac{\lambda R_f^3 [T(R_f) - T(R_i)]}{R_f^2 - R_i^2} - \frac{\lambda R_f [T(R_f) - T(R_i)]}{2(\ln R_f - \ln R_i)} \quad (9)$$

## 1.2 热平衡时斜齿轮的端面齿廓方程

当斜齿轮受热变形时,基圆半径增加,齿轮实际齿廓在齿厚和齿高方向都将发生热膨胀,其中端面齿廓如图1所示.仅考虑齿面接触温度对齿廓曲线的影响,则实际端面齿廓上任一点的半径  $R'_k$  为:

$$R'_k = R_k + \Delta R_k = R_k + u_b + \Delta T \lambda \overline{BK} = R_k + u_b + \Delta T \lambda (R_b / \cos \alpha_k - R_b) \quad (10)$$

根据几何关系,展角改变量为:

$$\Delta \theta_k = \frac{\Delta s_k}{R'_k} = \frac{\Delta T \lambda s_k}{2R'_k} \quad (11)$$

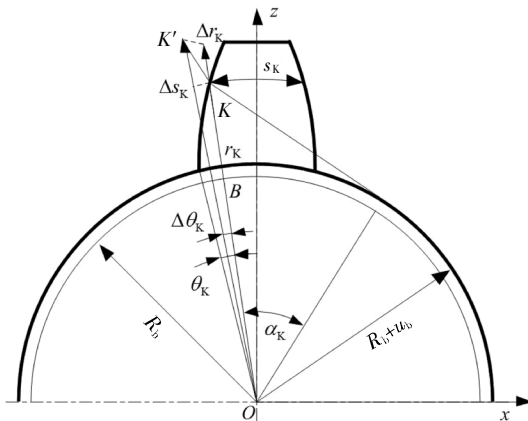


图1 斜齿轮端面齿廓热膨胀示意图

Fig.1 Sketch map of thermal expansion of gear transverse profile

斜齿轮热变形后端面齿廓极坐标参数方程为:

$$\left\{ \begin{aligned} R'_k(\alpha_k) &= R_k + \Delta R_k = \\ &= \frac{R_b + u_b \cos \alpha_k + \Delta T \lambda R_b (1 - \cos \alpha_k)}{\cos \alpha_k} \\ \theta'_k(\alpha_k) &= \theta_k - \Delta \theta_k = \text{inv } \alpha_k - \frac{\Delta T \lambda s_k}{2R'_k(\alpha_k)} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

式中:  $\alpha_k$ 、 $R_k$  分别为不计热变形时端面齿廓上任一点  $K$  的压力角和半径;  $s_k$  为不计热变形时端面齿廓上任意圆的齿厚;  $\Delta T$  为啮合齿面瞬时闪温,其表达式为<sup>[12]</sup>:

$$\Delta T = \frac{\psi_T f_m f_c |v_1 - v_2|}{(\sqrt{g_1 \rho_1 c_1 v_1} + \sqrt{g_2 \rho_2 c_2 v_2}) \sqrt{B_c}} \quad (13)$$

式中:  $\psi_T$  为斜齿轮温升系数;  $f_m$  为平均摩擦因数;  $f_c$  为单位齿宽上的齿面法向载荷;  $v_i$ 、 $g_i$ 、 $\rho_i$ 、 $c_i$  ( $i=1,2$ ) 分别为主、从动轮的齿面切向速度、热传导系数、材料密度以及比热容;  $B_c$  为接触带半宽。

## 2 考虑温度效应的时变啮合刚度算法

啮合刚度是随啮合齿数和轮齿接触位置周期变化的时变函数,由于斜齿轮存在螺旋角,啮合过程由轮齿一端面进入啮合到另一端面退出啮合,接触线长度具有时变性,其啮合刚度算法与直齿轮不同.基于积分方法,将其轮齿沿齿宽方向切分成若干薄片,每一薄片可近似视为直齿轮,通过计算各薄片的啮合刚度并积分,即可得到斜齿轮啮合刚度。

综合考虑轮齿接触、弯曲、剪切、轴向压缩及基体弹性刚度,采用能量法计算斜齿轮副啮合刚度,其综合啮合刚度可表示为:

$$k_t = \frac{1}{\frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{f2}} + \frac{1}{k_h}} \quad (14)$$

式中:  $k_b$  为弯曲刚度;  $k_s$  为剪切刚度;  $k_a$  为轴向压缩刚度;  $k_f$  为基体弹性刚度;  $k_h$  为接触刚度。

### 2.1 弯曲、剪切及轴向压缩刚度

对于高速重载齿轮传动,由于啮合齿面瞬时温升较高,斜齿轮实际截面齿廓已不再满足理论渐开线方程,存在较大的非渐开线误差.由于未考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度算法是基于渐开线基本性质推导的,对于计及热变形的啮合刚度计算不再适用,为此需重新推导考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度。

将轮齿假设为齿根圆上的悬臂梁,如图 2 所示,采用直线  $CC_1$  和  $DD_1$  简化表示齿根处齿廓。

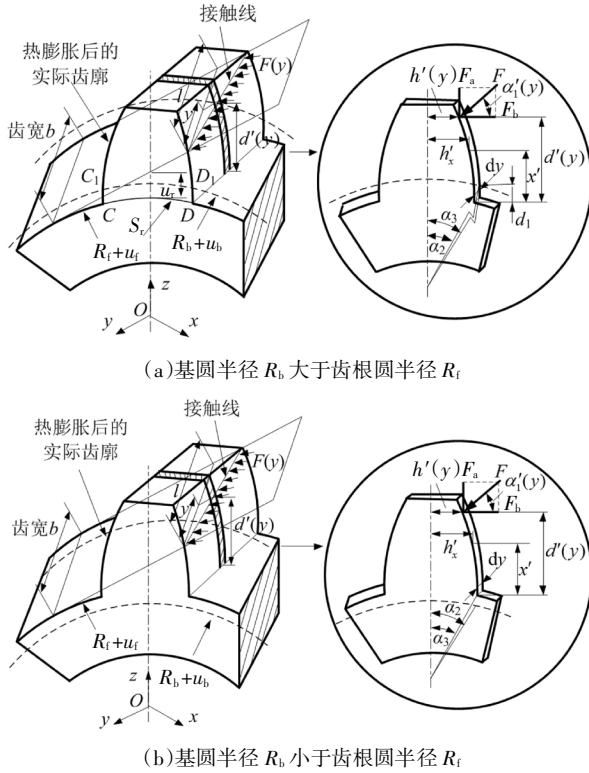


图 2 考虑温度效应的斜齿轮轮齿悬臂梁模型  
Fig.2 Cantilever beam model of helical gear tooth considering temperature effect

将端面齿廓的极坐标参数方程转换至随动笛卡尔坐标系  $S(x, y, z)$  下. 利用坐标变换, 可得如下转换关系:

$$\begin{bmatrix} x(\alpha_k) \\ z(\alpha_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \\ -\cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_k(\alpha_k) \sin \theta'_k(\alpha_k) \\ R'_k(\alpha_k) \cos \theta'_k(\alpha_k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中:  $\alpha_2 = \pi/2Z + \text{inv } \alpha_0 + \theta'_k(0)$ , 其中  $Z$  表示齿轮齿数;  $\alpha_0$  为分度圆端面压力角.

采用切片方法, 厚度为  $dy$  的每一薄片轮齿的弯曲刚度可表示为:

$$dk_b = 1/l \left[ \int_0^{d'(y)} \frac{[(d'(y) - x') \cos \alpha'_1(y) - h'(y) \sin \alpha'_1(y)]^2}{EdI'_x} dx' \right] \quad (16)$$

式中:  $\alpha'_1(y)$  为计及热变形时啮合力  $F$  与轮齿中心线垂直方向的夹角;  $d'(y)$  为啮合点和基圆在齿高方向的距离;  $h'(y)$  为啮合点和齿轮中心线的距离;  $dI'_x$  表示距齿根  $x$  处截面的面积惯性距.

当  $R_b > R_f$  时, 相关表达式为:

$$\begin{cases} dI'_x = \frac{1}{12} (2h_x)^3 dy = \frac{2}{3} h_x^3 dy \\ d'(y) = x[\alpha_m(y)] - (R_f + u_f) \cos \alpha_3 \\ h'(y) = z[\alpha_m(y)] \\ x' = x(\alpha_k) - (R_f + u_f) \cos \alpha_3 \\ \alpha_3 = \arcsin[(R_b + u_b) \sin \alpha_2 / (R_f + u_f)] \\ h_x = \begin{cases} z(0), & \text{if } 0 < x \leq d_1 \\ z(\alpha_k), & \text{if } d_1 < x \leq d(y) \end{cases} \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\alpha_m(y)$  表示不计热变形时斜齿轮端面齿廓矢径在  $z$  轴的投影为  $h(y)$  时对应的压力角, 其中  $h(y)$  为啮合点和齿轮中心线的距离, 是轴向坐标  $y$  的函数.

将以上变量代入式(16)得到每一薄片轮齿的弯曲刚度  $dk_b$ , 而后对其积分即可得到考虑温度效应的斜齿轮弯曲刚度  $k_b$ :

$$k_b = \int_0^l dy/l \left[ \int_0^{\alpha_m} \frac{3A^2 x'(\alpha_k)}{2Ez^3(\alpha_k)} d\alpha_k + \frac{B^3 - C^2}{2E \cos \alpha_m(y) z^3(0)} \right] \quad (18)$$

式中:

$$\begin{aligned} A &= [x(\alpha_m) - x(\alpha_k)] \cos \alpha'_1(y) - z(\alpha_m) \sin \alpha_m(y) \\ B &= [x(\alpha_m) - (R_f + u_f) \cos \alpha_3] \cos \alpha_m(y) - z(0) \sin \alpha_m(y) \\ C &= [x(\alpha_m) - (R_b + u_b) \cos \alpha_3] \cos \alpha_m(y) - z(0) \sin \alpha_m(y) \end{aligned}$$

式(18)不可积分, 因此采用求和方法替代积分方法求解斜齿轮的啮合刚度, 于是斜齿轮弯曲刚度  $k_b$  可重新表示为:

$$k_b = \sum_{i=1}^N 1/l \left[ \int_0^{\alpha_m} \frac{3A^2 x'(\alpha_k)}{2Ez^3(\alpha_k) \Delta y} d\alpha_k + \frac{B^3 - C^2}{2E \cos \alpha_m(y) z^3(0) \Delta y} \right] \quad (19)$$

式中:  $\Delta y = l/N$ ;  $l$  为时变接触线长度  $L$  在齿宽方向上的投影,  $l = L \cos \beta_b$ ;  $N$  为斜齿轮沿齿宽方向切分的切片份数. 根据单齿接触线长度表达式<sup>[6]</sup>,  $\alpha'_1(y)$  的求解方法如下.

当端向重合度大于轴向重合度 ( $\varepsilon_\alpha > \varepsilon_\beta$ ) 时, 啮合力  $F$  与主动轮轮齿中心线垂直方向的夹角  $\alpha'_{11}$  为:

$$\alpha'_{11} = \begin{cases} \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(0)]/i/N, & t \in [0, \varepsilon_\beta t_z] \\ \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(t - \varepsilon_\beta t_z)]/i/N, & t \in [\varepsilon_\beta t_z, \varepsilon_\alpha t_z] \\ \alpha_{1t}(\varepsilon_\alpha t_z) - [\alpha_{1t}(\varepsilon_\alpha t_z) - \alpha_{1t}(t - \varepsilon_\beta t_z)]/i/N, & t \in [\varepsilon_\alpha t_z, (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) t_z] \end{cases}$$

其中,  $\alpha_{1t}(t)$  为  $\alpha'_{11}$  在主动轮端面齿廓上对应的角度, 其表达式为:

$$\alpha_{1t}(t) = w_1(t) + \text{arccot} \left[ -\frac{x'(\alpha_{c1})}{z'(\alpha_{c1})} \right] \quad (20)$$

式中:  $\alpha_{c1}$  为主动轮进入啮合时端面齿廓处的压力角. 可由下式计算得到:

$$\alpha_{c1} = \arccos \left[ \frac{(1 + \Delta T \lambda) r_b}{r_{c1} + \Delta T \lambda r_b - u_b} \right] \quad (21)$$

式中:  $r_{c1}'$  为主动轮进入啮合时端面齿廓上的半径,

$$r_{c1}' = \sqrt{(r_{at2}')^2 + a'^2 - 2r_{at2}' a' \cos(\tan \alpha_{at2}' - \theta_{at2}' - \alpha')} \quad (22)$$

式中:  $a'$  代表实际中心距;  $\alpha'$  表示啮合角;  $\alpha_{at2}'$  为从动轮端面齿顶圆压力角.

啮合力  $F$  与从动轮轮齿中心线垂直方向的夹角  $\alpha_{12}'$  为:

$$\alpha_{12}' = \begin{cases} \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(t)]i/N, t \in [0, \varepsilon_{\beta} t_z] \\ \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(t - \varepsilon_{\beta} t_z) - \alpha_{2t}(t)]i/N, t \in [\varepsilon_{\beta} t_z, \varepsilon_{\alpha} t_z] \\ \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) + [\alpha_{2t}(t - \varepsilon_{\beta} t_z) - \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z)]i/N, \\ t \in [\varepsilon_{\alpha} t_z, (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) t_z] \end{cases}$$

其中,  $\alpha_{2t}(t)$  为  $\alpha_{12}'$  在从动轮端面齿廓上对应的角度, 其表达式为:

$$\alpha_{2t}(t) = -\frac{z_1}{z_2} u_1 t + \arccot \left[ -\frac{x'(\alpha_{at2})}{z'(\alpha_{at2})} \right] \quad (23)$$

同理, 当端向重合度小于轴向重合度 ( $\varepsilon_{\alpha} < \varepsilon_{\beta}$ ) 时, 啮合力  $F$  与主动轮轮齿中心线垂直方向的夹角  $\alpha_{11}'$  为:

$$\alpha_{11}' = \begin{cases} \alpha_{1t}(t) - [\alpha_{1t}(t) - \alpha_{1t}(0)]i/N, t \in [0, \varepsilon_{\alpha} t_z] \\ \alpha_{1t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) - [\alpha_{1t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) - \alpha_{1t}(0)]i/N, t \in [\varepsilon_{\alpha} t_z, \varepsilon_{\beta} t_z] \\ \alpha_{1t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) - [\alpha_{1t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) - \alpha_{1t}(t - \varepsilon_{\beta} t_z)]i/N, \\ t \in [\varepsilon_{\beta} t_z, (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) t_z] \end{cases}$$

啮合力  $F$  与从动轮轮齿中心线垂直方向的夹角  $\alpha_{12}'$  为:

$$\alpha_{12}' = \begin{cases} \alpha_{2t}(t) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(t)]i/N, t \in [0, \varepsilon_{\beta} t_z] \\ \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) + [\alpha_{2t}(0) - \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z)]i/N, t \in [\varepsilon_{\beta} t_z, \varepsilon_{\alpha} t_z] \\ \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z) + [\alpha_{2t}(t - \varepsilon_{\beta} t_z) - \alpha_{2t}(\varepsilon_{\alpha} t_z)]i/N, \\ t \in [\varepsilon_{\alpha} t_z, (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}) t_z] \end{cases}$$

同求解弯曲刚度  $k_b$  的过程类似, 考虑温度效应的斜齿轮剪切刚度  $k_s$  和轴向压缩刚度  $k_a$  分别为:

$$k_s = \sum_{i=1}^N 1/\left\{ \int_0^{\alpha_m} \frac{1.2(1+\nu) \cos^2 \alpha_i' x'(\alpha_k)}{Ez(\alpha_k) \Delta y} d\alpha_k + \frac{1.2(1+\nu) D \cos^2 \alpha_i'}{Ez(0) \Delta y} \right\} \quad (24)$$

$$k_a = \sum_{i=1}^N 1/\left\{ \int_0^{\alpha_m} \frac{\sin^2 \alpha_i' x'(\alpha_k)}{2Ez(\alpha_k) \Delta y} d\alpha_k + \frac{\sin^2 \alpha_i' D}{2Ez(0) \Delta y} \right\} \quad (25)$$

式中:  $D = (R_b + u_b) \cos \alpha_2 - (R_f + u_f) \cos \alpha_3$ .

当  $R_b < R_f$  时, 考虑温度效应的斜齿轮的弯曲刚度  $k_b$ 、剪切刚度  $k_s$  和轴向压缩刚度  $k_a$  分别表示为:

$$k_b = \sum_{i=1}^N 1/\left\{ \int_{\alpha_f}^{\alpha_m} \frac{3A^2 x'(\alpha_k)}{2Ez^3(\alpha_k) \Delta y} d\alpha_k \right\} \quad (26)$$

$$k_s = \sum_{i=1}^N 1/\left\{ \int_{\alpha_f}^{\alpha_m} \frac{1.2(1+\nu) \cos^2 \alpha_i' x'(\alpha_k)}{Ez(\alpha_k) \Delta y} d\alpha_k \right\} \quad (27)$$

$$k_a = \sum_{i=1}^N 1/\left\{ \int_{\alpha_f}^{\alpha_m} \frac{\sin^2 \alpha_i' x'(\alpha_k)}{2Ez(0) \Delta y} d\alpha_k \right\} \quad (28)$$

式中:  $\alpha_f$  为齿根圆压力角.

## 2.2 基体弹性刚度

将每一片轮齿薄片的基体刚度对  $y$  进行积分, 即可得到轮齿基体刚度<sup>[2]</sup>, 其表达式为:

$$k_f = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha_i'}{E \Delta y} \left\{ L^* \left( \frac{u_r}{S_r} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_r}{S_r} \right) + P^* [1 + Q^* \tan^2(\alpha_i')] \right\}} \quad (29)$$

式中:  $L^*$ 、 $M^*$ 、 $P^*$ 、 $Q^*$  均为尺寸系数, 其计算式参见文献[2].  $u_r$  和  $S_r$  如图 2(a) 所示, 其表达式为:

$$u_r = x[\alpha_m(y)] - (R_f + u_f)$$

$$S_r = 2(R_f + u_f) \alpha_3$$

## 2.3 赫兹接触刚度

根据赫兹接触理论, 啮合斜齿轮副的赫兹接触刚度  $k_h$  可表示为:

$$k_h = \pi E L / [4(1 - \nu^2)] \quad (30)$$

式中:  $E$  为弹性模量;  $L$  为时变接触线长度.

## 3 计及温度影响的时变啮合刚度计算

表 1 给出了一对斜齿轮副的基本参数, 综合考虑温度对啮合刚度的影响, 分别采用本文中的解析算法和有限元法计算斜齿轮的时变啮合刚度, 以验证解析算法的准确性.

表 1 斜齿轮副基本参数

Tab.1 Basic parameter of helical gear pair			
参数名称	数值	参数名称	数值
齿数 $z_1/z_2$	40/162	中心距 $a/\text{mm}$	1 250
模数 $m_n/\text{mm}$	12	功率 $P/\text{kW}$	3 060
法向压力角 $\alpha_n/(\circ)$	20	转速 $n/(\text{r} \cdot \text{min}^{-1})$	1 200
螺旋角 $\beta/(\circ)$	12	密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 850
齿宽 $b/\text{mm}$	180	弹性模量 $E/\text{Pa}$	$2.1 \times 10^{11}$

### 3.1 考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度计算结果

采用本文给出的解析算法, 计算考虑温度影响前后斜齿轮的时变啮合刚度, 得到如图 3 所示的单齿啮合刚度和综合啮合刚度曲线, 图中横坐标  $\tau$  为无量纲时间, 表示轮齿从啮入到啮出的整个过程,  $\tau = t/t_e$ , 其中  $t$  为时间变量,  $t_e$  为单齿啮合时间.

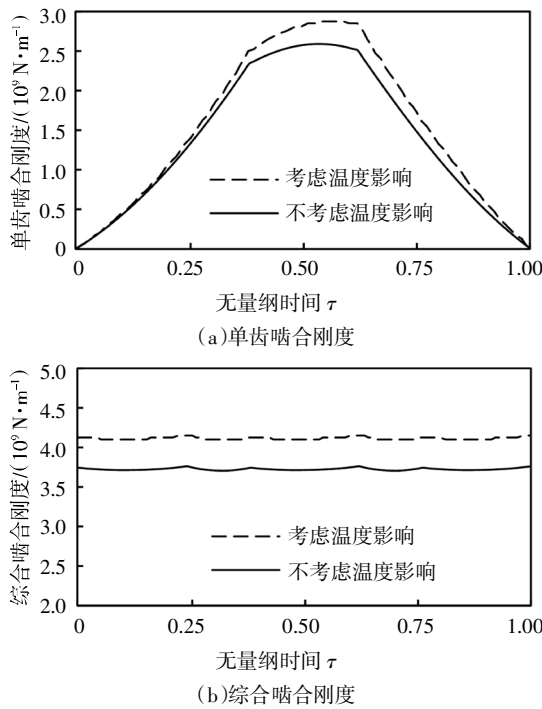


图 3 考虑温度影响前后啮合刚度对比曲线  
Fig.3 Comparison curve of mesh stiffness with and without temperature effect

由图 3 可知,考虑温升影响后,由于齿廓热膨胀导致齿侧间隙减小,轮齿接触区域变大,接触区域平均变形量减小,故斜齿轮副从啮入到啮出整个过程的啮合刚度均有所增大.其中,单齿啮合刚度在啮入和啮出端的增大量较小,在节点附近的增大量较大,最大值由  $2.592 \times 10^9$  N/m 增至  $2.878 \times 10^9$  N/m;综合啮合刚度均值由  $3.726 \times 10^9$  N/m 增至  $4.117 \times 10^9$  N/m.

### 3.2 斜齿轮副啮合刚度有限元模型

主、从动轮齿面摩擦热流密度由齿面摩擦因数、相对速度和齿面接触压力确定,其计算式分别为:

$$q_{1c} = \beta f_m |v_1 - v_2| p_{Nc} \quad (31)$$

$$q_{2c} = (1 - \beta) f_m |v_1 - v_2| p_{Nc} \quad (32)$$

式中: $p_{Nc}$  为啮合齿面的接触压力; $\beta$  为主、从动轮热流密度的分配因子,其计算式参见文献[15].

齿轮对流换热系数可分为齿轮端面对流换热系数  $h_t$  及齿面对流换热系数  $h_s$  两类.将端面对流换热简化为旋转圆盘的对流换热求解,其计算式为<sup>[15]</sup>:

$$h_t = 0.0197(\zeta + 2.6) Re^{0.3} P_\gamma^{0.6} N_{ur} \sqrt{\frac{\pi n}{30 v_0}} \quad (33)$$

式中: $N_{ur}$  为 Nusslet 系数; $\zeta$  为指数常数; $Re$  为雷诺数; $v_0$  为润滑油的运动黏度.

由间歇冷却理论可得齿面对流换热计算式为<sup>[15]</sup>:

$$h_c = \frac{4\sqrt{ng_0\rho_0c_0}}{\sqrt{30\pi}q_{tot}} \left[ \frac{R_k\eta_0b}{v_0A} \right]^{1/4} \quad (34)$$

式中: $q_{tot}$  为标准化总冷却量的渐近水平; $\eta_0 = g_0/\rho_0c_0$  为热扩散系数; $g_0, \rho_0, c_0$  分别为润滑油的热传导系数、密度和比热容; $A$  为齿面表面积.

利用 APDL 参数化语言建立啮合斜齿轮副三维实体模型,采用 SOLID70 单元以及 SURF152 单元进行有限元网格划分,施加啮合齿面摩擦热流密度以及齿轮端面和齿面对流换热系数,求解斜齿轮副的本体温度场,计算结果如图 4 所示;而后采用静态接触分析方法,对主动轮内圈节点施加转矩,并约束其轴向和径向位移;对从动轮内圈节点施加全约束;同时将温度场结果以载荷形式施加至有限元模型,通过提取齿轮副在啮合周期内的法向载荷以及综合变形,如图 5 所示,计算斜齿轮副的时变啮合刚度,其计算式为:

$$k_n = F_n/\delta_n \quad (35)$$

式中: $F_n$  为啮合齿面的法向载荷; $\delta_n$  为计及温度影响后主从动齿轮在啮合区域的综合变形.

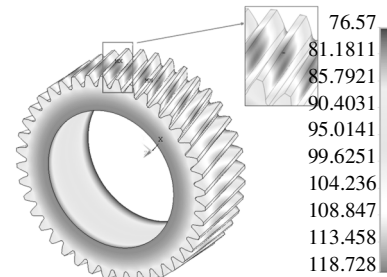


图 4 主动轮本体温度分布  
Fig.4 Bulk temperature distribution of driving gears

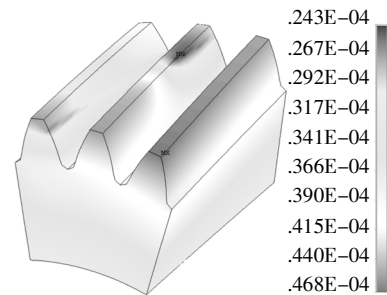


图 5 主动轮综合变形云图  
Fig.5 Integrated deformation nephogram of driving gears

### 3.3 啮合刚度算法对比验证

对比本文所提解析算法和有限元法的计算结果,得到如图 6 所示考虑温度效应的斜齿轮单齿啮合刚度曲线.由图 6 可知,解析算法与有限元法计算结果在节点附件最为接近,在啮入和啮出端误差相对较大,二者的变化趋势完全一致,单齿啮合刚度最大值分别为  $2.878 \times 10^9$  N/m 和  $3.020 \times 10^9$  N/m,单齿啮合刚度平均值误差为 11.59%,误差在可接受范围内.

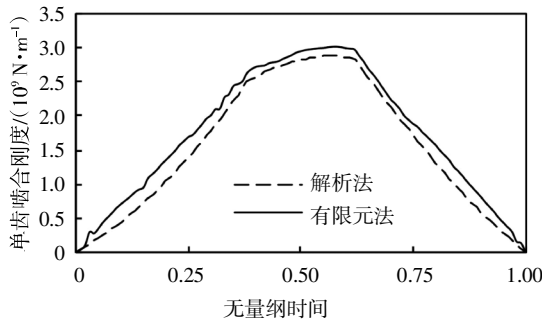


图6 单齿啮合刚度对比曲线

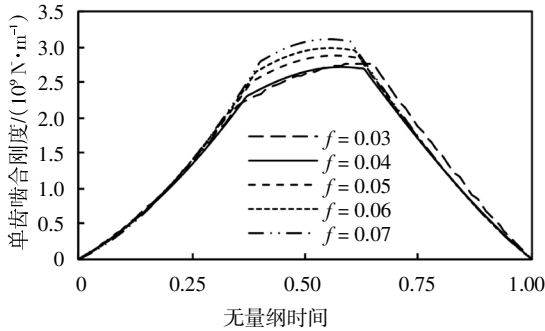
Fig.6 Comparison curve of single mesh stiffness

### 4 工况参数对斜齿轮啮合刚度影响分析

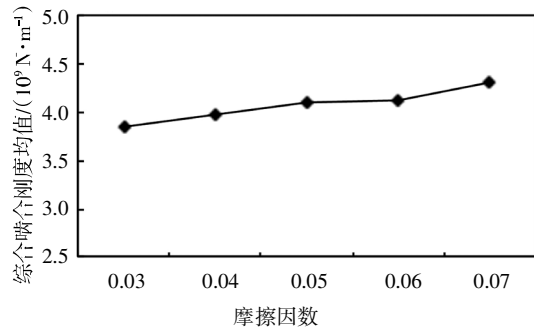
工况参数将影响齿轮的本体温度场,进而引起轮齿时变啮合刚度的变化.本节针对表1所示的斜齿轮副,通过改变摩擦因数、输入转矩和输入转速,开展考虑温度效应的时变啮合刚度影响规律研究.

#### 4.1 摩擦因数

摩擦因数增大将引起齿面摩擦热流量增加,进而使齿轮本体温度及啮合齿面瞬时闪温升高.选取摩擦因数 $f$ 的变化范围为0.03~0.07,不同摩擦因数下的单齿啮合刚度和综合啮合刚度均值分别如图7所示.由图7可知,考虑温度影响后,随着摩擦因数的增大,单齿啮合刚度整体上呈增大趋势;由于摩擦



(a)单齿啮合刚度



(b)综合啮合刚度均值

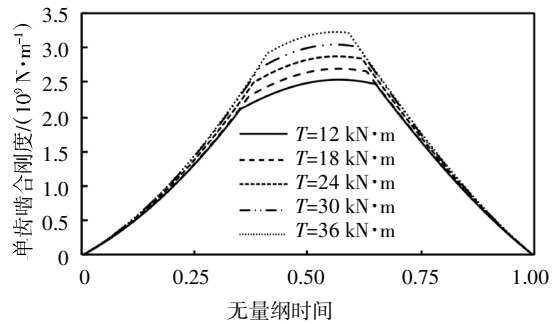
图7 不同摩擦因数下的斜齿轮啮合刚度

Fig.7 Mesh stiffness of helical gears with different friction coefficients

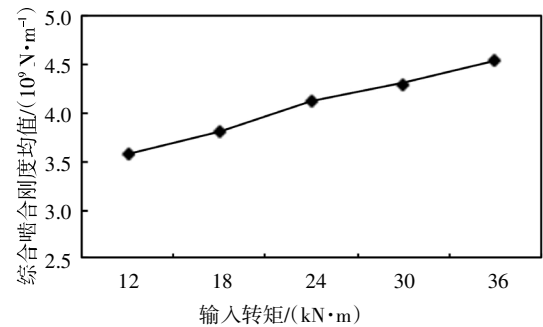
因数增大不影响齿轮副的重合度,因此综合啮合刚度均值也随单齿啮合刚度的增大而增大.当摩擦因数 $f$ 由0.03增至0.07时,啮合刚度均值由 $3.858 \times 10^9$  N/m增至 $4.311 \times 10^9$  N/m,提高了11.74%.

#### 4.2 输入转矩

输入转矩增大使齿面接触压力增大,进而使齿面摩擦热流量增加,齿轮本体温度及啮合齿面瞬时闪温随之升高.保持输入转速1200 r/min不变,输入转矩 $T$ 变化范围为12~36 kN·m,不同转矩下的单齿啮合刚度和综合啮合刚度均值分别如图8所示.由图8可知,考虑温度影响后,随着载荷的增大,轮齿接触迹线增长,单位线载荷减小,单齿啮合刚度随之增大;由于接触迹线增长一定程度上使齿轮副的重合度增加,因此综合啮合刚度均值接近线性规律增大.当输入转矩 $T$ 由12 kN·m增至36 kN·m时,啮合刚度均值由 $3.586 \times 10^9$  N/m增至 $4.454 \times 10^9$  N/m,提高了24.21%.



(a)单齿啮合刚度



(b)综合啮合刚度均值

图8 不同输入转矩下的斜齿轮啮合刚度

Fig.8 Mesh stiffness of helical gears with different input torques

#### 4.3 输入转速

输入转速增大使齿面切向速度增大,从而使齿轮本体温度及啮合齿面瞬时闪温也相应升高.保持输入转矩24 kN·m不变,输入转速 $n$ 的变化范围为1200~6000 r/min,不同输入转速下的单齿啮合刚度和综合啮合刚度均值分别如图9所示.可以看出,考虑温度影响后,随着输入转速的增大,单齿啮合刚度及综合啮合刚度均值随之增大,且增大幅度有所减

小.当输入转速  $n$  由 1 200 r/min 增至 6 000 r/min 时, 啮合刚度均值由  $4.118 \times 10^9$  N/m 增至  $4.554 \times 10^9$  N/m, 提高了 10.59%.

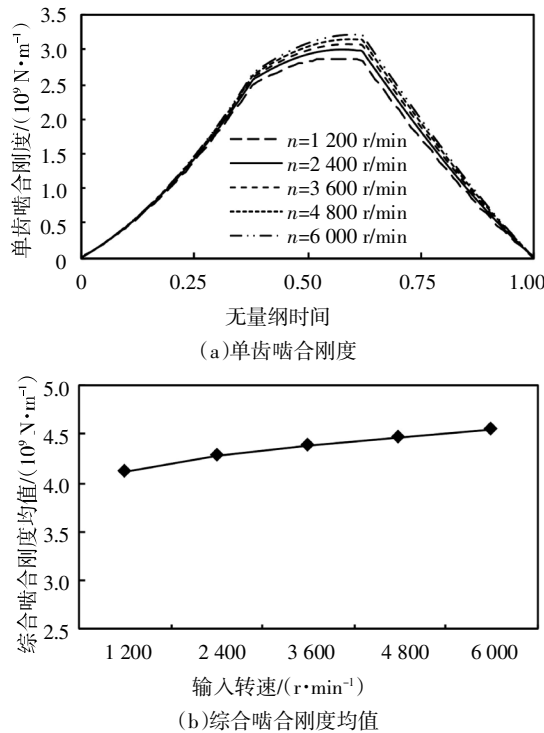


图9 不同输入转速下的斜齿轮啮合刚度

Fig.9 Mesh stiffness of helical gears with different input speeds

## 5 结论

1)将轮齿简化为齿根圆上的变截面悬臂梁,计入齿面接触温度变化引起的轮齿齿廓形变,基于势能法提出了一种考虑温度效应的斜齿轮啮合刚度解析算法,通过与有限元法计算结果对比分析,验证了解析算法的准确性,提升了斜齿轮啮合刚度的计算效率.

2)考虑斜齿轮温升影响后,轮齿从啮入到啮出整个过程的啮合刚度均有所增大.对于单齿啮合刚度,在啮入和啮出端增大量较小,在节点附近增大量较大.

3)通过不同摩擦因数、输入转矩、输入转速等工况参数对斜齿轮啮合刚度的影响分析,得出考虑温度效应后单齿啮合刚度及综合啮合刚度均值均随上述工况参数的增大而增大,其中输入转矩对啮合刚度的影响最大.

## 参考文献

[1] CUI L L,ZHAI H,ZHANG F B. Research on the meshing stiffness

and vibration response of cracked gears based on the universal equation of gear profile [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015,94:80—95.

- [2] CHAARI F,FAKHFAKH T,HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gear mesh stiffness [J]. European Journal of Mechanics- A/Solids,2009,28(3):461—468.
- [3] LIANG X H,ZUO M J,PANDEY M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014,76:20—38.
- [4] WAN Z G,CAO H R,ZI Y Y, *et al.* Mesh stiffness calculation using an accumulated integral potential energy method and dynamic analysis of helical gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015,92:447—463.
- [5] 万志国, 曹宏瑞, 曹宏瑞, 等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. 机械工程学报, 2013, 49(11): 153—160.
- WAN Z G,ZI Y Y,CAO H R, *et al.* Time-varying mesh stiffness algorithm correction and tooth crack dynamic modeling [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(11): 153—160. (In Chinese)
- [6] 刘文, 李锐, 张晋红, 等. 斜齿轮时变啮合刚度算法修正及影响因素研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(2): 1—10.
- LIU W,LI R,ZHANG J H, *et al.* Study on correction algorithm of time-varying mesh stiffness of helical gears and its influencing factors [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018,45(2): 1—10. (In Chinese)
- [7] COOLEY C G,LIU C G,DAI X, *et al.* Gear tooth mesh stiffness: A comparison of calculation approaches [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105: 540—553.
- [8] LIANG X H,ZHANG H S,ZUO M J, *et al.* Three new models for evaluation of standard involute spur gear mesh stiffness [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 101: 424—434.
- [9] FERNÁNDEZ A,VIADERO F,IGLESIAS M, *et al.* A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 61: 30—58.
- [10] FERNÁNDEZ A,IGLESIAS M,DE -JUAN A, *et al.* Gear transmission dynamic: effects of tooth profile deviations and support flexibility[J]. Applied Acoustics, 2014, 77(3): 138—149.
- [11] MA H,ZENG J,FENG R J, *et al.* An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016,98:64—80.
- [12] 苟向锋, 祁常君, 陈代林. 考虑齿面接触温度的齿轮系统非线性动力学建模及分析[J]. 机械工程学报, 2015, 51(11): 71—77.
- GOU X F,QI C J,CHEN D L. Nonlinear dynamic modelling and analysis of gear system with tooth contact temperature[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(11): 71—77. (In Chinese)
- [13] 罗彪, 李威, 李林升. 基于热弹耦合的齿轮热刚度研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2017, 48(12): 3209—3215.
- LUO B,LI W,LI L S. Research on thermal stiffness of gear based on thermo-elastic coupling [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2017,48(12): 3209—3215. (In Chinese)
- [14] 李桂华. 复杂规则曲面机械零件的热变形理论及应用研究[D]. 合肥: 合肥工业大学机械工程学院, 2006: 54—70.
- LI G H. Theoretical and applied research of thermal deformation of complicated components with regular camber [D]. Hefei: College of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, 2006: 54—70. (In Chinese)
- [15] 李润方. 齿轮传动的刚度分析和修形方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1998: 128—133.
- LI R F. Stiffness analysis and modification method of gear transmission [D]. Chongqing: Chongqing University Press, 1998: 128—133. (In Chinese)