

基于安定分析和概率密度演化理论的 杆系结构整体可靠度分析

祖云飞¹,李正良^{1,2},范文亮^{1,2†},刘蜀宇³

(1. 重庆大学 土木工程学院,重庆 400045;
2. 重庆大学 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室,重庆 400045;
3. 顺泰铁塔制造有限公司,重庆 400000)

摘要:经典体系可靠度仅涉及量值保持不变的随机静力荷载,对于随机变值静力荷载作用下的工程结构将给出不合理的评估结果,低估了结构面临的风险.鉴于此,基于安定理论提出了杆系结构在变值静力荷载作用下以安定状态作为极限状态的整体可靠度分析方法.首先,建议了具有单一功能函数的极限状态方程,并引入了两类计算功能函数的实用方法;进而,在概率密度演化理论的基础上,推导了功能函数的广义密度演化方程,并引入 Dirac δ 序列算法获得了其近似解;然后,对功能函数的概率密度进行一维积分即可得到结构整体可靠度;最后,通过多个算例验证了本文建议方法.结果表明:1) 建议方法有较好的精度和计算效率;2) 建议方法所得整体可靠度能更合理地评估变值静力荷载作用下结构的安全性.

关键词:随机变值静力荷载;可靠度;安定理论;概率密度演化理论;Dirac δ 序列算法
中图分类号:TU311.2;TB114.3 **文献标志码:**A

Global Reliability Assessment of Framed Structures Based on Shakedown Analysis and Probability Density Evolution Method

ZU Yunfei¹, LI Zhengliang^{1,2}, FAN Wenliang^{1,2†}, LIU Shuyu³

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
2. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area of Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400045, China;
3. Shuntai Towel Manufacturing Co Ltd, Chongqing 400000, China)

Abstract: The classical system reliability theory only involves random static load with constant value, which cannot provide reasonable estimation for the structure under random static load with variable value, and underestimates the risk of the structure. In view of this, a global reliability evaluation method for framed structures under static load with variable value is proposed, which is based on the shakedown theory with the shakedown state defined as the limit state. Firstly, a single performance function is proposed, and two implementations for calculating the performance function are introduced; Secondly, based on the probability density evolution method (PDEM), a generalized density evolution equation of the performance function is derived, and its approximate solution is obtained by introducing

* 收稿日期:2018-12-05

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478064,51678092), National Natural Science Foundation of China(51478064,51678092)

作者简介:祖云飞(1988—),男,重庆人,重庆大学博士研究生

† 通讯联系人, E-mail: davidfwl@126.com

Dirac δ sequence algorithm, and then the global reliability of the structure can be obtained by the one-dimensional integral of the probability density of performance function. Finally, several examples are investigated to verify the proposed method. The results show that: 1) the proposed method is of high accuracy and efficiency; 2) The global reliability obtained by the proposed method can evaluate the safety of the structure under static load with variable value more rationally.

Key words: random static load with variable value; reliability; shakedown theory; probability density evolution method; Dirac δ sequence algorithm

由于工程结构自身及其所处环境存在各种不确定性,可靠度分析成为结构安全性评估的重要方法^[1],其中经典的体系可靠度是重要组成部分.不同于构件可靠度,经典的体系可靠度主要研究理想弹塑性或弹脆性杆系结构在静力荷载作用下的不倒概率,即结构整体不发生倒塌的概率.历经半个多世纪的发展,研究者提出了 PNET 法、分支约界法、优化准则法、最小荷载增量法等分析方法^[2-5].仔细考察不难发现,经典体系可靠度仅涉及时不变的静力荷载,即量值保持不变的静力荷载;然而,实际工程中结构亦可能会遭遇另一类静力荷载——量值随时间变化的时变静力荷载.例如,输电导线的覆冰荷载,由于结冰、融冰过程的缓变特性,以及可能出现的冻融循环,属于典型的变值静力荷载;又如储油罐对其支撑刚架的作用亦属于变值静力荷载.

杆系结构在变值静力荷载作用下可能的最终破坏状态包括增量塑性破坏、交互塑性破坏、瞬时塑性倒塌破坏^[6],若仍采用经典的体系可靠度方法研究结构安全,实质上仅考虑结构的不倒概率,忽略了结构可能的最终破坏状态中的交互塑性破坏.当发生交互塑性破坏时,结构中出现断裂杆件,不同于杆件进入塑性,杆件的断裂使杆件完全退出承载,随之产生的内力重分布引发多米诺效应可能导致结构整体倒塌.即使杆件断裂后结构依然能保持不倒,断裂杆件的更换仍会影响结构正常服役.因此,采用经典的体系可靠度研究变值静力荷载下杆系结构的安全性是不合理的,低估了结构面临的风险.

幸运的是,安定理论^[6-8]为研究变值荷载作用下结构行为提供了有效工具.近年来,研究者对基于经典安定理论的结构可靠度分析开展了一系列研究,亦取得了一定的进展^[9-14],然而现有成果存在较大的局限性:一方面,由于与 FORM^[10,12-14]、SORM^[12]及响应面法^[11]等基于验算点的可靠度方法相结合,对于体

系可靠度中出现的多验算点问题无能为力;另一方面,现有研究通常针对已知的失效模式进行安定分析,但失效模式识别恰恰是复杂杆系结构体系可靠度分析的最大困难,因此,现有研究多局限于平板结构^[10,14]、压力容器^[11,13,14]、管道结构^[10,12-14]以及非常简单的杆系结构^[11,13,14]等,实用性不强.

鉴于此,本文以安定状态作为杆系结构在变值静力荷载作用下的极限状态,并定义与之对应的整体可靠度概念,建议了具有单一功能函数的极限状态方程,并引入实用安定分析方法计算隐式功能函数;进而,根据概率密度演化理论,推导了功能函数的广义密度演化方程的近似解;最后,经由一维积分给出结构整体可靠度.本文将安定分析与概率密度演化理论^[15]相结合,提出了杆系结构在变值静力荷载作用下整体可靠度的实用、高效分析方法.尤其值得指出的是,经典体系可靠度所涉及时的不变的静力荷载仅为变值静力荷载中的一种特殊情况,显然,本文建议方法同样可解决经典的体系可靠度问题.因此,发展基于安定理论的结构整体安全性分析既是解决变值静力荷载作用下理想弹塑性杆系结构整体可靠度的合理途径,亦是经典体系可靠度的有益拓展.

1 杆系结构的安定极限状态及确定性安定分析

1.1 变值荷载作用下结构的临界极限状态

根据安定理论,杆系结构在变值荷载作用下可能进入五种不同的状态^[6]:1)纯弹性状态;2)安定状态;3)增量塑性破坏;4)交互塑性破坏;5)瞬时塑性倒塌.由于增量塑性破坏和瞬时塑性倒塌将引起结构的整体倒塌,而发生交互塑性破坏时,尽管结构可能维持不倒,但断裂杆件的更换会迫使结构退出正常

工作. 因此, 世界各国近年来出版的强度设计与安全设计评定规范(如美国 ASME 和 API 规范、英国 BSI 标准、法国 RCC-MR 标准等), 越来越多地采用安定载荷为控制界限的塑性失效准则. 因此, 本文定义增量塑性破坏、交互塑性破坏和瞬时塑性倒塌为结构的三种最终破坏状态, 定义结构在变值荷载作用下不进入上述破坏状态的概率为整体可靠度. 又因上述破坏状态均以安定状态为临界过渡状态, 所以安定状态可作为杆系结构在变值荷载作用下失效分析的临界极限状态.

1.2 结构确定性安定分析

1.2.1 安定极限状态方程

若定义 λ 为外荷载的比例系数, 安定状态的临界荷载系数 λ_p 为恰使结构维持安定状态的 λ 值, 安定状态的极限状态方程可表示为

$$G = \lambda_p - 1 = 0 \tag{1}$$

式中: G 为结构功能函数的值, 当 $G > 0$ 时, $\lambda_p > 1$, 意味着结构达到安定状态所能承受的荷载大于实际外荷载, 结构安全; 反之, 结构失效. 因此, λ_p 的确定是判断结构状态的核心.

1.2.2 λ_p 的确定

根据安定下限定理, λ_p 可由如下优化问题确定

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \max_{\rho, \lambda} \lambda \\ \text{s.t. } f(\rho + \lambda \tilde{\mathbf{S}}(t)) &\leq \sigma \\ \mathbf{C}^T \rho &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

式中: ρ 表示与时间无关的自平衡残余应力场, $\tilde{\mathbf{S}}(t)$ 表示将结构假定为纯弹性后的应力场, $f(\cdot)$ 表示材料屈服条件; \mathbf{C}^T 为结构总平衡矩阵, 在小变形假设下, 仅取决于结构体系的几何关系^[16-17], $\mathbf{C}^T \rho = 0$ 表示残余力系自平衡方程.

由于屈服约束条件 $f(\rho + \lambda \tilde{\mathbf{S}}(t)) \leq \sigma$ 包含时变的 $\tilde{\mathbf{S}}(t)$, 式(2)所示优化问题不便于直接求解. 文献^[18-21]指出, 若结构的荷载变化域为凸域, 且在变化域的所有顶点上结构均保持安定状态, 则结构在该荷载变化域内任一变值荷载作用下亦能保持安定状态, 于是式(2)可改写为

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \max_{\rho, \lambda} \lambda \\ \text{s.t. } f(\rho + \lambda \mathbf{S}(\mathbf{P}_k)) &\leq \sigma \\ \mathbf{C}^T \rho &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N_l) \end{aligned} \tag{3}$$

式中: \mathbf{P}_k 表示荷载变化域的第 k 个顶点, N_l 为顶点的总数, $\mathbf{S}(\mathbf{P}_k)$ 表示结构在 \mathbf{P}_k 所对应的时不变荷载下的应力场, 显然式(3)为时不变的优化问题.

若假设结构承受 d 个相互独立的变值荷载, 且

第 i 个变值荷载的上、下界值分别为 a_i, b_i ($i = 1, \dots, d$), 则这些荷载变化的凸域包含 $N_l = 2^d$ 个顶点, 且有

$$\mathbf{P}_k = (P_{1,k}, P_{2,k}, \dots, P_{i,k}, \dots, P_{d-1,k}, P_{d,k}) \tag{4}$$

$$P_{i,k} = a_i \text{ 或 } b_i \tag{5}$$

图 1 给出了仅有两个变值荷载时的凸域及顶点示意图. 根据线性叠加原理, 可有

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{P}_k) &= \sum_{i=1}^d \mathbf{S}(0, \dots, 0, P_{i,k}, 0, \dots, 0) = \\ &= \sum_{i=1}^d P_{i,k} \cdot \mathbf{S}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^d P_{i,k} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{F}_i^e) \end{aligned} \tag{6}$$

式中: $\mathbf{S}(\mathbf{F}_i^e)$ 表示结构在与第 i 个变值荷载作用位置和正方向相同的单位力 \mathbf{F}_i^e 作用下的应力场. 显然, 仅需得到各变值荷载对应单位力下的应力场 $\mathbf{S}(\mathbf{F}_i^e)$, ($i = 1, 2, \dots, d$), $\mathbf{S}(\mathbf{P}_k)$ 可根据式(6)由代数运算直接得到, 因此, 尽管存在 2^d 个顶点, 求解 $\mathbf{S}(\mathbf{P}_k)$ 所需的线弹性结构响应分析次数仅为 d 次.

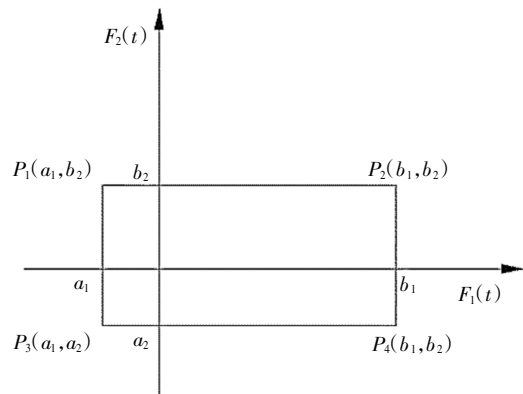


图 1 荷载变化域及其顶点 P_k ($d = 2$)

Fig.1 The load variation domain and vertices P_k ($d = 2$)

得到 $\mathbf{S}(\mathbf{P}_k)$ 后, 求解式(3)所示优化问题还需确定 \mathbf{C}^T 的具体参数. 在经典安定分析中 \mathbf{C}^T 常根据结构的失效模式由运动机构分析法得到^[6]. 显然上述方法仅适用于运动机构(失效模式)已知的简单情况. 近年来, 有限单元法由于其适用性强, 便于计算机进一步分析等优点, 成为确定 \mathbf{C}^T 的主流方法^[9-14], 由有限单元法建立 \mathbf{C}^T 与结构系统总刚矩阵的建立过程类似, 首先根据单元类型以及单元基本内力参数在局部坐标系下建立单元平衡矩阵, 对于本文研究的杆系结构, 其单元平衡矩阵建立过程可参考文献 [16, 17], 然后考虑各单元之间的几何连接关系以及边界条件, 按结构矩阵分析理论在全局坐标系下组装各单位平衡矩阵即可得到总平衡矩阵 \mathbf{C}^T .

上述确定 \mathbf{C}^T 的方法通常需通过自编程实现, 较

为繁琐. 对于常见的桁架结构和平面抗弯刚架结构等两类杆系结构, 可基于虚力法建立与式(3)等价但更易于实现的优化问题.

对于 M 杆的理想弹塑性空间桁架, 根据虚力法, 式(3)可改写为^[21]:

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \max_{\rho, \lambda} \lambda \\ \text{s.t. } \rho_m + \lambda S_m^{\max} &\leq \sigma_m \\ \rho_m + \lambda S_m^{\min} &\geq -\sigma_m' \\ \lambda(S_m^{\max} - S_m^{\min}) &\leq \sigma_m + \sigma_m' \quad (m=1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{m=1}^M \frac{l_m S_{mj}^v}{E_m} \rho_m = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_s) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_m^{\max} &= \max\{S_m(P_1), S_m(P_2), \dots, S_m(P_{N_s})\} \\ S_m^{\min} &= \min\{S_m(P_1), S_m(P_2), \dots, S_m(P_{N_s})\} \end{aligned} \quad (9)$$

式(7)表示桁架的拉压屈服条件, 即为式(3)中材料屈服条件 $f(\cdot)$ 在此情况下的具体形式, 其中 ρ_m 是第 m 杆的残余轴向应力, S_m^{\max} , S_m^{\min} 分别表示假定结构为纯弹性后考虑所有可能荷载时程组合条件下第 m 杆的最大纯弹性拉应力和压应力, 其可由式(9)计算得到, $S_m(P_k)$ 为顶点 P_k 所对应条件下第 m 杆的纯弹性轴向应力, 其可由式(6)所示线性叠加得到. σ_m , σ_m' 是第 m 杆的全塑性抗拉强度和全塑性抗压强度. 式(8)为由虚力法得到的 $C^T \rho = 0$ 的等价虚功方程组, 其中 l_m 表示第 m 杆的长度, S_{mj}^v 表示由第 j 个虚力所引起的第 m 杆内的轴向应力, E_m 表示第 m 杆的弹性模量, $l_m S_{mj}^v / E_m$ 表示第 m 杆的虚位移, 等于其在第 j 个虚力下对应的弹性变形, 式(8)中虚力为对应于某个节点位移自由度方向的单位力, 其总数 N_s 等于节点位移自由度总数, 因此, 式(8)中各参数的确定需 N_s 次结构响应分析.

对于由理想弹塑性材料构成的平面抗弯刚架, 根据虚力法, 式(3)可改写为^[22,23]:

$$\begin{aligned} \lambda_p &= \max_{\rho, \lambda} \lambda \\ \text{s.t. } \rho_m + \lambda M_m^{\max} &\leq M_{pm} \\ \rho_m + \lambda M_m^{\min} &\geq -M_{pm} \\ \lambda(M_m^{\max} - M_m^{\min}) &\leq 2M_{ym} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{N_s} a_{mj} \rho_m = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_s) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M_m^{\max} &= \max\{S_m(P_1), S_m(P_2), \dots, S_m(P_{N_s})\} \\ M_m^{\min} &= \min\{S_m(P_1), S_m(P_2), \dots, S_m(P_{N_s})\} \end{aligned} \quad (12)$$

式(10)表示刚架的受弯屈服条件, 同样为式(3)中材料屈服条件 $f(\cdot)$ 在此情况下的具体形式, 其中 ρ_m 为第 m 个塑性铰的残余弯矩, M_m^{\max} , M_m^{\min} 分别表示假定结构为纯弹性后, 考虑所有可能荷载时程组合

条件下第 m 个塑性铰的最大纯弹性弯矩和最小纯弹性弯矩, 其由式(12)计算得到, $S_m(P_k)$ 为顶点 P_k 所对应条件下第 m 个塑性铰的弯矩, 其同样可由式(6)所示线性叠加得到. M_{pm} 是第 m 个塑性铰的全塑性极限弯矩, M_{ym} 是第 m 个塑性铰仅截面外边缘屈服的弹性极限弯矩. 式(11)为由虚力法得到的 $C^T \rho = 0$ 的等价虚功方程组, a_{mj} 为对应于在第 j 个虚力作用下第 m 个塑性铰的系数, 其取值方法详见文献[22], N_j 为预定义的可能塑性铰的总数. N_s 为对应刚架全部基本变形的所有虚力的总数, 其与结构自由度正相关, N_s 和各虚力的施加方式由文献[22]给出的三个准则确定, 因此, 式(11)中各参数的确定需 N_s 次结构响应分析.

综上所述, λ_p 可由式(3)所示优化分析得到, 而式(3)中的残余力系自平衡方程 $C^T \rho = 0$, 可由有限单元法得到或虚力法建立其等价虚功方程组. 虚力法可以避免有限单元法自编程建模型的繁琐过程, 但将引入额外的结构分析. 因此, 选择虚力法或是有限单元法应根据分析结构的自由度总数进行权衡, 在结构自由度总数较高时, 宜选择有限单元法.

1.3 λ_p 的求解步骤

根据 1.2 节的分析, 杆系结构 λ_p 可按下述步骤求解:

①对各变值荷载对应的单位力 F_i^e 作用下的结构进行受力分析, 得到应力场 $S(F_i^e)$, ($i=1, 2, \dots, d$). 将 $S(F_i^e)$ 代入式(6)由代数运算得到结构在各顶点 P_k 对应的时不变荷载条件下的响应应力场 $S(P_k)$, 本步骤所需线性弹性结构受力分析次数为 d 次.

②建立残余力系自平衡方程. 若直接基于 $C^T \rho = 0$, 则需通过自编程序确定 C 矩阵; 若采用虚力法, 则可引入有限次附加结构分析得到 $C^T \rho = 0$ 的等价虚功方程组式(8)或式(11).

③采用 MATLAB 优化求解工具箱求解相应的优化问题, 得到临界安定荷载系数 λ_p .

2 基于概率密度演化理论的杆系结构整体可靠度分析

2.1 考虑随机性的安定极限状态方程

在安定分析中, 尽管结构承受时变荷载, 但由式(3)可知, λ_p 仅取决于结构参数、时不变荷载以及时变荷载的时不变参数. 显然, 当结构参数及外荷载具有随机性时, λ_p 可表示为随机量的函数, 即

$$\lambda_p = \psi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N_l) \quad (13)$$

式中:随机向量 $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\theta}_s, \boldsymbol{\theta}_{LO}), \boldsymbol{\theta}_s=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{s1})$ 表示随机结构参数, $\boldsymbol{\theta}_{LO}=(\theta_{s1+1}, \theta_{s1+2}, \dots, \theta_{s1+s2})$ 表示时不变的随机荷载; \mathbf{P}_k 为变值荷载域的随机顶点, 取决于描述变值荷载上下界的时不变随机参数 $\boldsymbol{\theta}_{LR}$, 即

$$\mathbf{P}_k \triangleq \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR}) \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入式(1)可得考虑随机性的安定极限状态方程为

$$G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) = \lambda_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) - 1 = 0 \quad (15)$$

由于仅涉及一个极限状态方程, 经典体系可靠度分析中存在的失效模式相关性问题的迎刃而解。进而, 结构整体可靠度为

$$R = \int_0^{+\infty} P_c(g) dg \quad (16)$$

式中: $p_c(g)$ 指随机变量 $G = G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR}))$ 的概率密度函数。显然, 可靠度 R 对应的失效概率为 $1-R$ 。

2.2 整体可靠度的概率密度演化分析

概率密度演化理论为获得 $p_c(g)$ 的数值解提供了可行的途径。

首先, 构造虚拟随机过程 $Z(\tau)$

$$Z(\tau) = G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) \cdot \tau \triangleq \varphi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau) \quad (17)$$

类似于随机动力系统的广义密度演化方程的推导^[15], $(Z(\tau), \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR})$ 联合密度函数 $P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau)$ 服从如下方程

$$\frac{\partial P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau)}{\partial \tau} + G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) \frac{\partial P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau)}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

其初始条件为

$$P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau)|_{\tau=0} = \delta(z - \varphi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, 0)) p_{\theta}(\boldsymbol{\theta}) p_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR}) = \delta(z) p_{\theta}(\boldsymbol{\theta}) p_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR}) \quad (19)$$

式中: $\delta(\cdot)$ 为狄拉克函数, $P_{\theta}(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的概率密度函数, $P_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR})$ 为 $\boldsymbol{\theta}_{LR}$ 的概率密度函数。引入特征线法^[24]可导出式(18)和式(19)的形式解析解^[25]为

$$P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau) = \delta(z - G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) \cdot \tau) p_{\theta}(\boldsymbol{\theta}) p_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR}) \quad (20)$$

结合式(17)可知

$$p_c(g) = p_z(z, \tau)|_{\tau=1} = \int_{\Omega_{\theta}} \int_{\Omega_{\theta_{LR}}} P_{Z\theta\theta_{LR}}(z, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{LR}|_{\tau=1} = \int_{\Omega_{\theta}} \int_{\Omega_{\theta_{LR}}} \delta(z - G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR}))) p_{\theta}(\boldsymbol{\theta}) p_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{LR} \quad (21)$$

式中: Ω_{θ} 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的分布域, $\Omega_{\theta_{LR}}$ 为 $\boldsymbol{\theta}_{LR}$ 的分布域。为避免广义函数 $\delta(\cdot)$ 的直接积分, 可以 δ 序列

替代 $\delta(\cdot)$ 获得 $p_c(g)$ 近似解为^[25]

$$p_c(g) = \int_{\Omega_{\theta}} \int_{\Omega_{\theta_{LR}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha \varphi_{\max}} \exp \left[\frac{-1}{2\alpha^2} \left(\frac{z - G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR}))}{\varphi_{\max}} \right)^2 \right] p_{\theta}(\boldsymbol{\theta}) p_{\theta_{LR}}(\boldsymbol{\theta}_{LR}) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\theta}_{LR} \quad (22)$$

式中: $\varphi_{\max} = \max \{ \varphi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR}, \tau) |_{\tau=1} \} = \max \{ G(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR})) \}$, α 为一适当小的常量。进一步可给出其数值解为

$$p_c(g) \approx \sum_{q=1}^{N_{sel}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha \varphi_{\max}} \exp \left[\frac{-1}{2\alpha^2} \left(\frac{z - G(\boldsymbol{\theta}_q, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR,q}))}{\varphi_{\max}} \right)^2 \right] U_q \quad (23)$$

式中: 代表点集 $(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\theta}_{LR,q}) (q = 1, \dots, N_{sel})$ 可由数论选点策略^[26]得到, 同时给出其赋得概率为 U_q , 其中 N_{sel} 为代表点的数量。

2.3 杆系结构整体可靠度的数值实现

综上所述, 基于安定理论的结构整体可靠度数值求解步骤如下:

①由数论选点策略^[26]在多维联合变量空间 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR})$ 中选取代表点集 $(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\theta}_{LR,q}) (q = 1, \dots, N_{sel})$, 并得到各代表点的赋得概率 U_q 。当 $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{LR})$ 为相关向量且仅已知各变量的边缘概率密度函数和相关系数矩阵时, 可以引入 Nataf 逆变换^[27]进行处理。

②对于给定代表点 $(\boldsymbol{\theta}_q, \boldsymbol{\theta}_{LR,q})$, 由 2.3 节所述步骤确定 λ_p , 进而确定功能函数值 $G(\boldsymbol{\theta}_q, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR,q}))$, 重复以上步骤, 求得所有代表点的功能函数值。

③将上述所有 $G(\boldsymbol{\theta}_q, \mathbf{P}_k(\boldsymbol{\theta}_{LR,q})) (q = 1, \dots, N_{sel})$ 及 U_q 代入式(23), 得到 $p_c(g)$ 的数值解。

④将 $p_c(g)$ 的解代入式(16), 由一维数值积分即可得到结构整体可靠度 R 。

3 算例分析

本节由三个算例验证建议方法的有效性。算例 1 为一涉及六杆桁架结构的经典体系可靠度问题, 通过建议方法结果与已有结果的对比验证建议方法的准确性和效率; 算例 2 以单层两跨平面抗弯刚架结构为对象, 比较了时不变静力荷载下的经典体系可靠度与时变静力荷载下的整体可靠度的差异, 验证了建议方法的必要性; 算例 3 采用建议方法分析了相对较为复杂的空间二十五杆桁架, 体现了建议方法的普遍适用性。

3.1 算例 1

某六杆桁架如图 2 所示, 其 1、2、5、6 杆的截面

积为 $1.33 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 3、4 杆的截面积为 $1.49 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. 各杆由理想弹塑性材料组成, 其初始弹性模量为 $2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$; F 为随机时不变荷载, σ_m ($m=1, 2, \dots, 6$) 为第 m 杆的随机屈服强度, 随机变量的概率信息如表 1 所示, 且假设各变量均相互独立. 对该桁架的不倒概率进行分析.

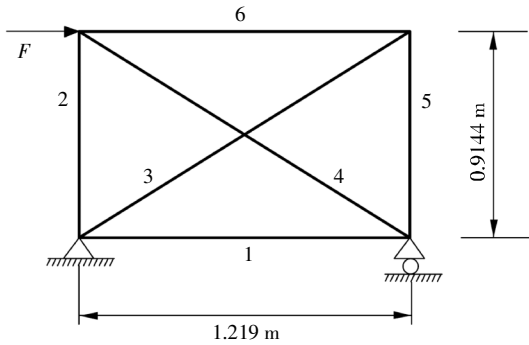


图2 6杆桁架
Fig.2 A 6-bar truss

表 1 算例 1 中随机变量的概率信息

Tab.1 The statistical information of random variables involved in example 1

	均值	变异系数	分布类型
F	44.45 kN	0.1	正态分布
$\sigma_m (m = 1, 2, \dots, 6)$	250 MPa	0.1	正态分布

显然, 该问题属于经典的体系可靠度问题, 但亦可用建议方法求解.

首先, 利用数论选点策略在 F 和 σ_m 组成的七维随机向量空间选取 1752 个代表点, 并得到各代表点的赋值概率 U_q ($q = 1, 2, \dots, 1752$). 然后, 对于任一代表点, 均可由前述的确定性安定分析得到对应的功能函数值 $G(\theta_q, \mathbf{P}_k(\theta_{LR,q}))$. 不难发现, 确定性安定分析的屈服约束条件仅由结构的线性分析确定, 而对于此结构 1752 个代表点对应着相同的线性结构, 换言之, 仅需 1 次线性结构分析即可确定所有代表点的屈服约束条件. 若采用虚力法以避免残余力系自平衡方程 $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\rho} = 0$ 的建立, 尚需补充 4 次线性结构分析. 由于采用虚力法总共仅需 5 次线性结构分析, 较直接建立 $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\rho} = 0$ 更为简便, 因此, 此处采用虚力法. 获得所有样本点的功能函数值后, 可由式 (23) 得到功能函数概率密度函数的数值解 $p_c(g)$, 其中参数 α 由文献[25]中所述方法确定, 其值为 0.0055, 求得的 $p_c(g)$ 如图 3 所示. 最后, 由式 (16) 得到结构的经典体系可靠度, 其对应失效概率为 5.64×10^{-4} .

此外, 文献[28]给出了近似解为 5.92×10^{-4} , 文献[29]给出的失效概率上下界限为 $[5.02 \times 10^{-4}, 7.16 \times 10^{-4}]$. 显然, 建议方法所得结果是合理、有效的. 由于涉及很少的线性结构分析和非常成熟高效的线性优化问题的求解, 建议方法的高效性是显而易见的.

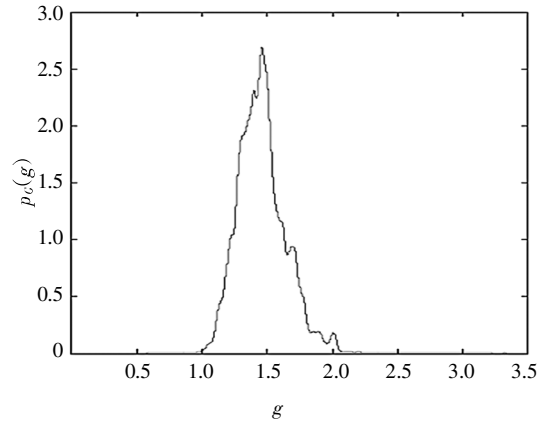


图3 6杆桁架的概率密度分布 $p_c(g)$
Fig.3 Probability density function of G for the 6-bar truss

3.2 算例 2

某一承受 F_1, F_2 和 F_3 三个外荷载的理想弹塑性材料组成的单层两跨平面抗弯刚架如图 4 所示, 其中, 各杆截面相同, M_p 为截面全塑性极限弯矩, 而截面弹性极限弯矩为 $0.8M_p$, 结构可能的塑性铰总数为 11. F_2 和 F_3 为随机时不变荷载, 根据 F_1 特性的不同, 分为以下 2 种情况.

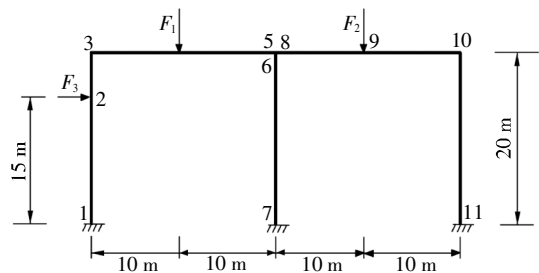


图4 单层两跨平面刚架
Fig.4 A 1-story and 2-bay plane frame

情形 1: F_1 为随机变值静力荷载

假定 a_1 和 b_1 分别为 F_1 的下界和上界, 随机变量的概率信息如表 2 所示, 且假设各变量相互独立. 分析结构在变值荷载作用下的整体可靠度.

按建议方法选取分析 968 个代表点, 并确定参数 $\alpha = 0.0022$, 得到近似概率密度分布 $p_c(g)$ 如图 5 所示, 对其积分得到结构整体可靠度对应的失效概率为 8.16×10^{-4} . 同样, 上述过程中所有代表点的确定性安定分析屈服约束条件由 3 次线性结构分析确

定,而 $C^T p = 0$ 的等价虚功方程组由虚力法补充 2 次线性结构分析得到.此外,将简单蒙特卡罗法与确定性安定分析结合,对 10^6 个样本点分析后得到失效概率为 8.47×10^{-4} . 上述两结果的相对差异为 $(8.47 - 8.16)/8.47 = 3.66\%$,显然,建议方法的高效性和准确性再次得到验证.

表 2 算例 2 中随机变量的概率信息

Tab.2 The statistical information of random variables involved in example 2

	均值	变异系数	分布类型
a_1	-6 kN	0.1	正态分布
b_1	17 kN	0.15	极值 I 型
F_2	17 kN	0.15	极值 I 型
F_3	17 kN	0.15	极值 I 型
M_p	88 kN·m	0.1	对数正态

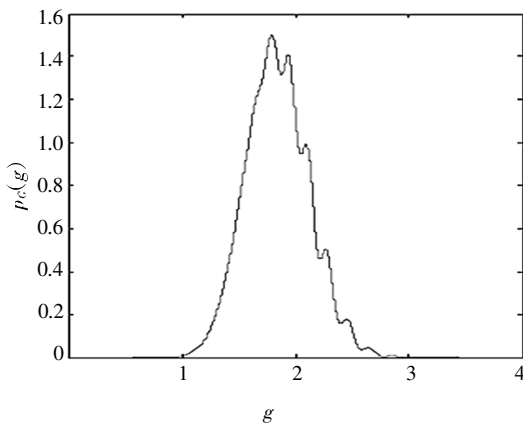


图 5 情形 1 中平面刚架的概率密度分布 $p_c(g)$

Fig.5 Probability density function of G for the plane frame in case 1

情形 2: F_1 为随机时不变静力荷载

在本情形中, F_1 假定为随机时不变静力荷载,其统计信息与情形 1 的上限值 b_1 相同. 其余条件与情形 1 相同.分析结构的不倒概率.

在本情形中,按建议方法选取分析 641 个代表点,并确定参数 $\alpha = 0.0020$,得到 $p_c(g)$ 的概率密度分布如图 6 所示,对其积分得到结构整体可靠度对应的失效概率为 4.73×10^{-4} .

另外,采用抽样数为 106 的蒙特卡罗法可得到结构失效概率为 4.89×10^{-4} . 上述两结果高度吻合.

比较情形 1 和情形 2 的计算结果不难发现,结构在变值荷载作用下的整体可靠度并不等于其在时不变静荷载(取变值荷载的上界)作用下的不倒概率,甚至较后者更低.因此,建议方法所得整体可靠度能更

合理地评估变值静力荷载作用下结构的安全性.

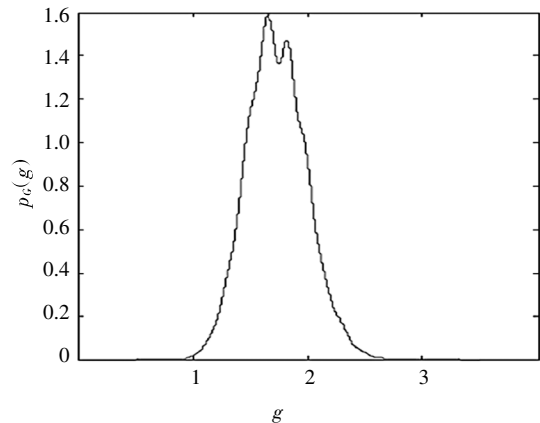


图 6 情形 2 中平面刚架的概率密度分布 $p_c(g)$

Fig.6 Probability density function of G for the plane frame in case 2

3.3 算例 3

某 25 杆理想弹塑性空间桁架结构如图 7 所示,材料初始弹性模量为 2.06×10^5 MPa,各杆属性如表 3 所示. 外荷载包括水平节点荷载 F_1 和竖向节点荷载 F_2 ,其中 F_1 为随机时不变荷载, F_2 为随机变值静力荷载;且假定 F_2 的上界为 b_2 ,下界为 $X \cdot b_2$, X 为一定值. σ 为材料的抗拉屈服强度,抗压屈服强度假定为 $0.9 \cdot \sigma$. 随机变量的概率信息如表 4 所示,且假设各变量均相互独立.分析结构在变值荷载作用下的整体可靠度.

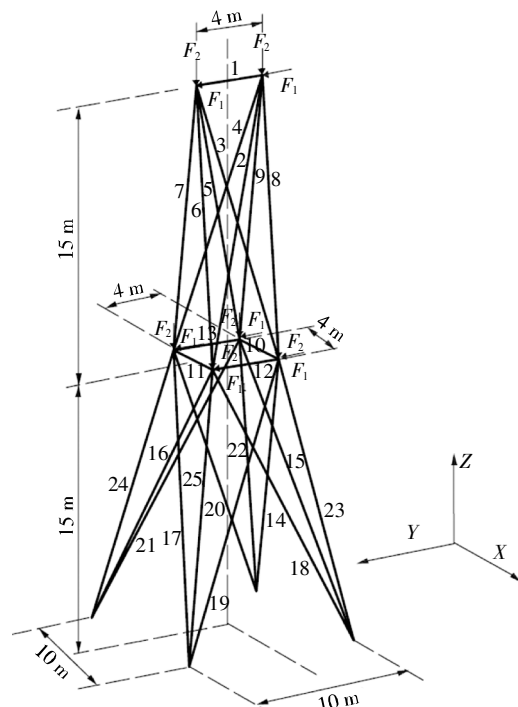


图 7 25 杆空间桁架

Fig.7 A 25-bar space truss

表 3 25 桁架杆件属性表

Tab.3 The attribute of all components for the 25-bar truss

杆件编号	长度/m	截面积/m ²
1	4	1 × 10 ⁻⁴
2~5	15.65	1.5 × 10 ⁻⁴
6~9	15.13	2 × 10 ⁻⁴
10~13	4	1.5 × 10 ⁻⁴
14~21	16.82	2.5 × 10 ⁻⁴
22~25	15.59	3 × 10 ⁻⁴

表 4 算例 3 中随机变量的概率信息

Tab.4 The statistical information of random variables involved in example 3

	均值	变异系数	分布类型
σ	276 MPa	0.1	对数正态
F_1	10 kN	0.15	极值 I 型
b_2	15 kN	0.15	极值 I 型

X 的不同取值对应于不同的变值静力荷载情形。特别地,当 $X = 1$ 时 F_2 退化为时不变静力荷载。

选取 685 个代表点,采用建议方法分别对不同 X 值的情形进行分析,得到近似概率密度分布 $p_c(g)$ 和结构失效概率如图 8 和图 9 所示(参数 α 均为 0.004 5)。上述过程中确定性安定分析的屈服约束条件由 2 次线性结构分析得到,并由虚力法补充 18 次线性结构分析得到 $C^T \rho = 0$ 的等价虚功方程组。

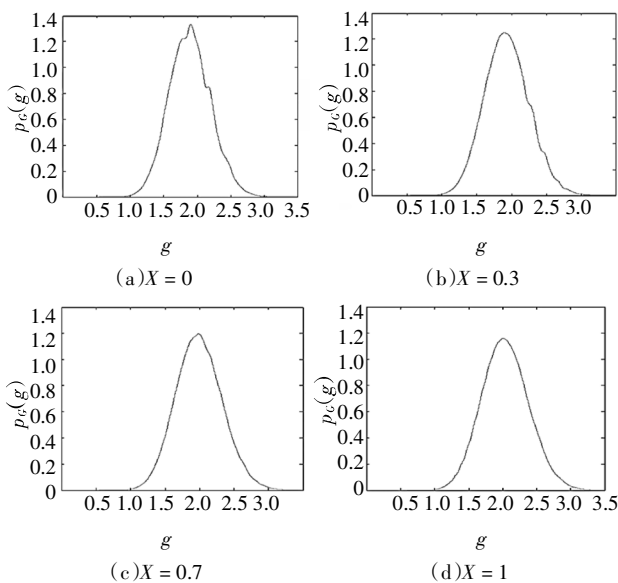


图 8 不同 X 取值时空间桁架的概率分布 $p_c(g)$

Fig.8 Probability density function of G for the space truss with different X

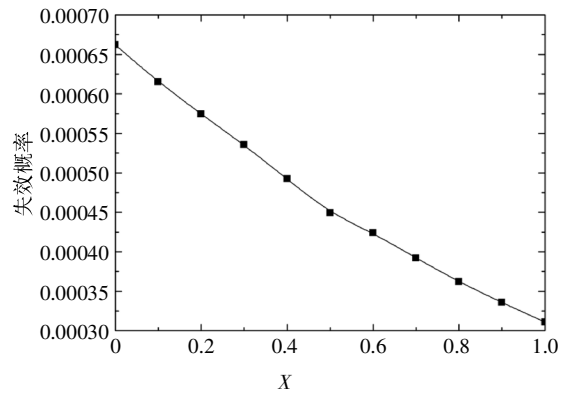


图 9 不同 X 取值时空间桁架的失效概率

Fig.9 The tendency of failure probability for the space truss with different X

由图 9 可见,结构失效概率随着 X 值增大而单调递减。换言之,若变值静力荷载上界保持不变,其变化范围越大,结构失效概率越大。

此外,对 $X = 0$ 的情况,将简单蒙特卡洛法与确定性安定分析结合,当选取 106 个样本点可得到结构失效概率为 6.29×10^{-4} ,与建议方法结果的相对差异为 $(6.62-6.29)/6.29=5.2\%$,再次验证了建议方法的准确性。

4 结论

本文结合安定分析和概率密度演化理论,推导了以安定状态为极限状态的功能函数值 $G(\Theta, P_k(\Theta_{LR}))$ 的概率密度演化方程,并给出了其概率密度的数值求解方法。以此为基础,提出了一种可合理评估杆系结构在变值静力荷载作用下安全性的可靠度分析方法。并通过多个结构算例,验证了建议方法的精度和有效性,分析结果表明,建议方法无需进行失效模式的识别,从而避免了失效模式的组合爆炸问题;并且由于经典体系可靠度所涉及的时不变的静力荷载仅为变值静力荷载中的一种特殊情况,建议方法可直接应用于经典体系可靠度问题的分析;此外,建议方法所涉及计算大部分为线性优化求解,而线性优化求解的研究较成熟,大量已有的高效线性优化算法为建议方法的计算效率提供了坚实保障。值得指出的是,结构在变值荷载作用下的整体可靠度不同于其在时不变静荷载(取变值荷载的上界)作用下的不倒概率,因此应按建议方法评估变值静力荷载作用下结构的安全性。

参考文献

- [1] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连:大连理工大学出版社,1996:2—12.
ZHAO G F. The theory of structural reliability and its applications [M]. Dalian:Dalian University of Technology Press,1996:2—12. (In Chinese)
- [2] THOFT C P, MUROTSU Y. Application of structural systems reliability theory[M]. Berlin, Heidelberg:Springer-Verlag,1986:143—199.
- [3] BENNETT R M, ANG H S. Formulations of structural system reliability [J]. Journal of Engineering Mechanics,1986,112(11):1135—1151.
- [4] 董聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2001:186—224.
DONG C. The theory of structural systems reliability and its applications [M]. Beijing:Science Press,2001:186—224. (In Chinese)
- [5] 晏班夫,孙雁峰,邹祺祺. 考虑拉索抗力衰减及破断的斜拉桥可靠性分析 [J]. 湖南大学学报(自然科学版),2017,44(9):10—16.
YAN B F, SUN Y F, ZOU Q Q. System reliability analysis on the cable-stayed bridge considering cable breakage and resistance degradation [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2017, 44(9):10—16. (In Chinese)
- [6] KONIG J A. Shakedown of elastic-plastic structures [M]. Poland: Polish Scientific Publishers,1987:35—56.
- [7] 陈刚. 结构塑性极限与安定分析理论及工程方法 [M]. 北京:科学出版社,2006:68—74.
CHEN G. The structural plastic limit and shakedown analysis and engineering applications [M]. Beijing:Science Press,2006:68—74. (In Chinese)
- [8] 庄妍,王孟,王康宇. 移动荷载作用下结构弹塑性安定分析方法及其应用研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2018,45(7):93—102.
ZHUANG Y, WANG M, WANG K Y. Study on shakedown analysis method of elastic-plastic structures under moving loads structures and its application [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(7):93—102. (In Chinese)
- [9] MARTI K. Limit load and shakedown analysis of plastic structures under stochastic uncertainty [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering,2008,198(1):42—51.
- [10] TRAN T N, KREIBIG R, STAAT M. Probabilistic limit and shakedown analysis of thin plates and shells [J]. Structural Safety, 2009, 31(1):1—18.
- [11] DOLINSKI K, KNABEL J. Reliability-oriented shakedown formulation [C]// Proceedings of the 9th International Conference on Structural Safety and Reliability -Iccosar'05. Rome:IOS Press,2005:2323—2330.
- [12] MANFRED S. Limit and shakedown analysis under uncertainty [J]. International Journal of Computational Methods,2014,11(3):187—136.
- [13] STAAT M. Probabilistic limit and shakedown problems [C]// Numerical methods for limit and shakedown analysis:deterministic and probabilistic problems. Jülich:Publication Series of John von Neumann Institute for Computing (NIC),2007:244—259.
- [14] WEICHERT D, MAIER G. Inelastic behavior of structures under variable repeated loads [M]. New York:Springer-Verlag,2002:333—345.
- [15] LI J, CHEN J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters [J]. Computational Mechanics,2004,34(5):400—409.
- [16] 龙驭球. 结构矩阵分析中的“平衡-几何”互伴定理[J]. 工程力学,2012,29(5):1—7.
LONG Y Q. An adjoint theorem between equilibrium matrix and geometric matrix in structural analysis [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(5):1—7. (In Chinese)
- [17] 钱若军,林智斌,桂国庆. 力法中的平衡方程的建立[J]. 空间结构,2005,11(4):11—15.
QIAN R J, LIN Z B, GUI G Q. Establishment of equilibrium equation in force method [J]. Spatial Structures,2005,11(4):11—15. (In Chinese)
- [18] BORKOWSKI A, KLEIBER M. On a numerical approach to shakedown analysis of structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 1980, 22(1):101—119.
- [19] STEIN E, ZHANG G, KONIG J A. Shakedown with nonlinear strain-hardening including structural computation using Finite Element Method [J]. International Journal of Plasticity, 1992, 8(1):1—31.
- [20] LIU Y H, ZHANG X F, CEN Z Z. Lower bound shakedown analysis by the symmetric Galerkin boundary element method [J]. International Journal of Plasticity, 2005, 21(1):21—42.
- [21] 杨晓峰. 桁架安定荷载的确定 [J]. 上海交通大学学报,1990,24(1):26—32.
YANG X F. Determination of shakedown load for truss [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1990, 24(1):26—32. (In Chinese)
- [22] 杨晓峰. 刚架安定分析中基本弹性变形的直接生成 [J]. 上海交通大学学报,1994,28(5):105—114.
YANG X F. Direct generation of elastic deformation in shakedown analysis of Frames [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 1994, 28(5):105—114. (In Chinese)
- [23] YANG X F. Shakedown analysis in plastic design of steel structures [J]. Eng Mech, 1989, 115(2):304—314.
- [24] FARLOW S J. Partial differential equations for scientists and engineers [M]. New York:Dover Publications Inc, 1993:205—212.
- [25] FAN W L, CHEN J B, LI J. Solution of generalized density evolution equation via a family of delta sequences [J]. Computational Mechanics, 2009, 43(6):781—796.
- [26] LI J, CHEN J B. The number theoretical method in response analysis of nonlinear stochastic structures [J]. Computer Mechanics, 2007, 39(6):693—708.
- [27] FAN W L, YANG P C, ANG H S, *et al.* Analysis of complex system reliability with correlated random vectors [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2016, 45:61—69.
- [28] MUROTSU Y, OKADA H, NIWA K, *et al.* Reliability Analysis of Redundant Truss Structures [J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers A, 1980, 46(404):420—427.
- [29] 董聪. 赘余桁架结构可靠性的计算方法 [J]. 航空学报,1989,10(2):76—78.
DONG C. A method of reliability computation for redundant truss structures [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 1989, 10(2):76—78. (In Chinese)