

## 磁电弹结构多场耦合分析的 稳定 Node-based 光滑径向基点插值法

任书慧,孟广伟,王吉贤,周立明<sup>†</sup>

(吉林大学 机械与航空航天工程学院,吉林 长春 130025)

**摘要:**为提高磁电弹结构分析的精度,提出稳定 Node-based 光滑径向基点插值法(SNS-RPIM)。基于传统 Node-based 光滑径向基点插值法(NS-RPIM),引入与场变量梯度方差有关的稳定项,消除不确定参数,推导了多场耦合问题的 SNS-RPIM 方程,求解了磁电弹结构静力响应问题,并与有限元法计算结果进行比较。数值算例结果表明,SNS-RPIM 能够得到更加接近真实解的结果,有效解决了有限元系统刚度偏硬的问题;在精度与收敛性方面,SNS-RPIM 比有限元法表现得更加出色,从而为磁电弹材料的进一步应用提供了有效的分析方法。

**关键词:**稳定光滑径向基点插值法;磁电弹材料;复合材料;梯度光滑技术;数值方法

**中图分类号:**TB115

**文献标志码:**A

## Stabilized Node-based Smoothed Radial Point Interpolation Method for Multi-field Coupling Analysis of Magneto-electro-elastic Structures

REN Shuhui, MENG Guangwei, WANG Jixian, ZHOU Liming<sup>†</sup>

(School of Mechanical and Aerospace Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

**Abstract:** In order to improve the accuracy in analyzing magneto-electro-elastic (MEE) structures, a stabilized node-based smoothed radial point interpolation method (SNS-RPIM) was proposed. Based on the traditional node-based smoothed radial point interpolation method, the stable item related to the gradient variance of the field variables was introduced to eliminate the uncertain parameter. The SNS-RPIM equations for multi-field coupling problems were derived, and the static responses of MEE structures were also solved. The results of SNS-RPIM were compared with those of finite element method. Numerical examples showed that SNS-RPIM can provide the result closer to the real solution and effectively solve the problem of 'overly-stiff' of finite element method. SNS-RPIM is better than FEM in terms of accuracy and convergence, which provides an effective analysis method for further application of MEE materials.

\* 收稿日期:2019-10-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975243), National Natural Science Foundation of China(51975243);吉林省教育厅资助项目(JJKH20200952KJ);吉林大学研究生创新研究计划资助项目(101832018C184)

作者简介:任书慧(1994—),女,吉林长春人,吉林大学博士研究生

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail:lmzhou@jlu.edu.cn

**Key words:** stabilized smoothed radial point interpolation method; magneto-electro-elastic (MEE) material; composite material; gradient smoothing technique; numerical methods

磁电弹材料是一种由压电相( $\text{BaTiO}_3$ )与压磁相( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ )复合而成的智能材料,能够将机械能、电能与磁能相互转化<sup>[1-2]</sup>. 磁电弹材料因其具有力电、力磁、磁电效应而被广泛应用于智能结构中,引起了国内外学者的广泛关注<sup>[3-4]</sup>. Jiang 等<sup>[5]</sup>推导了在均布载荷作用下磁电弹悬臂梁响应的解析解,为未来磁电弹结构的设计与分析奠定了基础. Wang 等<sup>[6]</sup>求解了三维磁电弹圆柱板的自由振动问题,得出了频率方程. Ebrahimi 等<sup>[7-8]</sup>利用 Hamilton 原理推导了磁电弹纳米板的非局部控制方程,研究了纳米板的屈曲行为.

由于传统有限元法(FEM)在求解中存在“过刚”、体积自锁等问题,导致结果不准确. 近年来, Liu 等<sup>[9]</sup>提出了广义梯度光滑技术,并基于该方法构造出了一系列光滑有限元法(S-FEM)<sup>[10]</sup>和光滑径向基点插值法(S-RPIM)<sup>[11]</sup>. 何智成等<sup>[12-13]</sup>和陈泽聪等<sup>[14]</sup>将光滑有限元应用到声学模拟中. 周立明等<sup>[15-16]</sup>将光滑有限元扩展到了求解裂纹问题和多场耦合问题中,验证了光滑方法的准确性. 在 S-RPIM 中, Node-based 光滑径向基点插值法(NS-RPIM)能够消除 FEM 中“过刚”的问题,为所求解问题提供能量范数的上界解<sup>[9]</sup>. 该方法使用径向基函数对场函数进行近似,其形函数具有 Kronecker Delta 函数属性,边界条件可以如 FEM 一样直接施加. 基于伽辽金弱形式与节点积分技术,推导出系统方程. 基于这些优点, NS-RPIM 在求解静力学以及多场耦合问题中得到了广泛的应用. Li 等<sup>[17]</sup>采用 NS-RPIM 分析了二维、三维固体力学问题,验证了此算法的准确性与优越性. Zhou 等<sup>[18]</sup>将 NS-RPIM 引入多场耦合问题的研究中,结果表明, NS-RPIM 对于求解磁电弹结构的响应问题是有效且可靠的.

尽管 NS-RPIM 在求解许多问题时表现良好,但研究表明<sup>[11,19]</sup>,由于 NS-RPIM 的模型过于柔软,会令其在求解动态问题时产生伪非零能量模式,导致算法存在时间不稳定性. 为增强系统刚度,解决时间不稳定性, Wang 等<sup>[20]</sup>提出了一种稳定算法,解决了 Node-based 光滑有限元方法中的缺陷并且减少了求解声学问题中的色散误差. Feng 等<sup>[21]</sup>提出了一种稳定的节点积分方法,分析了电磁问题. Yang 等<sup>[22]</sup>解决了 Node-based 光滑有限元方法中的时间不稳定性,

更准确的求解了金属成型问题.

本文提出了稳定 NS-RPIM (SNS-RPIM), 基于传统 NS-RPIM 方法,引入与场变量梯度方差相关的稳定项,消除了不确定参数,推导了求解多场耦合问题的 SNS-RPIM 方程,分析了磁电弹结构在静力作用下的响应,并将所得结果与有限元法计算结果进行了对比.

## 1 基本方程

磁电弹材料平衡方程如下:

$$\sigma_{ij,j} = 0, (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

$$D_{l,l} = 0, (l = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$B_{l,l} = 0, (l = 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中:  $\sigma_{ij}$ 、 $D_l$ 、 $B_l$  分别为应力分量、电位移分量、磁感应强度分量.

磁电弹材料的几何方程如下:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), (i, j = 1, 2, 3) \quad (4)$$

$$E_k = -\Phi_{,k}, (k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

$$H_k = -\Psi_{,k}, (k = 1, 2, 3) \quad (6)$$

式中:  $S_{ij}$  为应变分量;  $E_k$  为电场强度分量;  $H_k$  为磁场强度分量;  $\Phi$  与  $\Psi$  为电势与磁势.

磁电弹材料的本构方程如下:

$$\sigma_i = C_{ij}S_j - e_{ki}E_k - q_{ki}H_k \quad (7)$$

$$D_l = e_{lj}S_j + \varepsilon_{lk}E_k + m_{lk}H_k \quad (8)$$

$$B_l = q_{lj}S_j + m_{lk}E_k + \mu_{lk}H_k \quad (9)$$

式中:  $C_{ij}$ 、 $e_{ki}$ 、 $q_{ki}$  分别为弹性常数、压电系数与压磁系数;  $\varepsilon_{lk}$ 、 $m_{lk}$ 、 $\mu_{lk}$  分别为介电常数、磁电耦合系数与磁导率.  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ;  $l = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3$ .

边界条件为:

$$u_i = \tilde{u}_i, \text{在 } \Gamma_d \text{ 上} \quad (10)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \tilde{\beta}_i, \text{在 } \Gamma_s \text{ 上}, \Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_s \quad (11)$$

$$\Phi = \tilde{\phi}, \text{在 } \Gamma_e \text{ 上} \quad (12)$$

$$D_l n_l = \tilde{Q}_i, \text{在 } \Gamma_t \text{ 上}, \Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_t \quad (13)$$

$$\Psi = \tilde{\psi}, \text{在 } \Gamma_m \text{ 上} \quad (14)$$

$$B_l n_l = \tilde{R}, \text{在 } \Gamma_i \text{ 上}, \Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_i \quad (15)$$

式中： $\Gamma_d$ 与 $\Gamma_s$ 分别为位移边界与力边界； $\Gamma_e$ 与 $\Gamma_i$ 分别为电势边界与电位移边界； $\Gamma_m$ 与 $\Gamma_f$ 分别为磁势边界与磁通量边界； $\bar{u}$ 为 $\Gamma_d$ 上给定的位移； $\bar{\beta}$ 为 $\Gamma_e$ 上给定的面力； $\bar{\phi}$ 为 $\Gamma_e$ 上给定的电势； $\bar{q}$ 为 $\Gamma_i$ 上给定的电位移； $\bar{\psi}$ 为 $\Gamma_m$ 上给定的磁势； $\bar{r}$ 为 $\Gamma_f$ 上给定的磁通量。

## 2 稳定 Node-based 光滑径向基点插值法

### 2.1 Cell-based T2L 方案

Cell-based T2L 方案<sup>[9]</sup>为计算  $x_Q$  的形函数值选择合适的局部支持节点. 该方案选择  $x_Q$  周围的两层节点作为局部支持节点. 第一层节点为  $x_Q$  所在三角形单元的顶点；第二层节点为与第一层节点直接连接的那些节点,如图 1 所示.

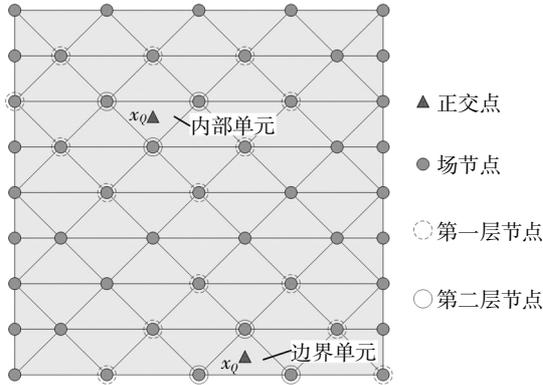


图 1 Cell-based T2L 方案  
Fig.1 Cell-based T2L scheme

### 2.2 Node-based 光滑径向基点插值法

二维问题域  $\Omega$  被离散为  $n_e$  个三角形单元, 包含  $n_n$  个节点. 通过将节点  $\mathbf{x}_i = [x_i, z_i]^T$  周围三角形的边中点与质心依次相连, 构造以  $\mathbf{x}_i$  为中心的光滑域  $\Omega_i$ , 如图 2 所示.

问题域内任一点  $\mathbf{x}_i$  处的近似位移  $\bar{\mathbf{u}}$ 、近似电势  $\bar{\Phi}$  与近似磁势  $\bar{\Psi}$  可表示为:

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n_s} N_u^k(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_i) = N_u(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \quad (16)$$

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n_s} N_\Phi^k(\mathbf{x}_i) \Phi_k(\mathbf{x}_i) = N_\Phi(\mathbf{x}_i) \Phi(\mathbf{x}_i) \quad (17)$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n_s} N_\Psi^k(\mathbf{x}_i) \Psi_k(\mathbf{x}_i) = N_\Psi(\mathbf{x}_i) \Psi(\mathbf{x}_i) \quad (18)$$

式中： $N_u(\mathbf{x}_i)$ 、 $N_\Phi(\mathbf{x}_i)$ 与 $N_\Psi(\mathbf{x}_i)$ 分别为 NS-RPIM 的位移形函数、电势形函数与磁势形函数； $n_s$ 为局部支持节点的数量； $\mathbf{u}$ 、 $\Phi$ 和 $\Psi$ 分别表示位移向量、电势向量和磁势向量.

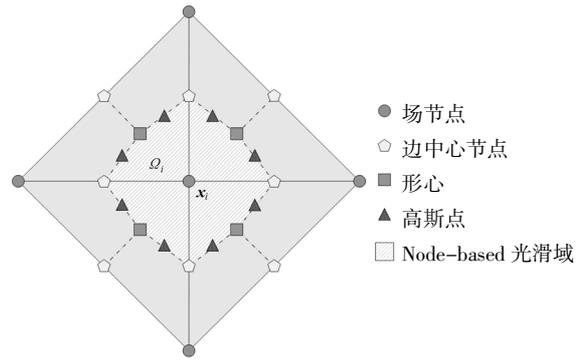


图 2 基于节点  $\mathbf{x}_i$  的光滑域  
Fig.2 Smoothing domain of node  $\mathbf{x}_i$

通过引入梯度光滑技术, 根据式(16)~(18), 节点  $\mathbf{x}_i$  处的光滑应变  $\bar{\mathbf{S}}$ 、光滑电场强度  $\bar{\mathbf{E}}$  与光滑磁场强度  $\bar{\mathbf{H}}$  分别为:

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_u^k(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_i) \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_i) = - \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^k(\mathbf{x}_i) \Phi_k(\mathbf{x}_i) \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_i) = - \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\mathbf{B}}_\Psi^k(\mathbf{x}_i) \Psi_k(\mathbf{x}_i) \quad (21)$$

式中： $\bar{\mathbf{B}}_u(\mathbf{x}_i)$ 、 $\bar{\mathbf{B}}_\Phi(\mathbf{x}_i)$ 与 $\bar{\mathbf{B}}_\Psi(\mathbf{x}_i)$ 分别为节点光滑应变矩阵、节点光滑电场强度矩阵和节点光滑磁场强度矩阵,其表达式为:

$$\bar{\mathbf{B}}_u(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_k^u(\mathbf{x}_i) & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_k^z(\mathbf{x}_i) \\ \bar{\phi}_k^u(\mathbf{x}_i) & \bar{\phi}_k^z(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_t(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_k^u(\mathbf{x}_i) \\ \bar{\phi}_k^z(\mathbf{x}_i) \end{bmatrix}, t = \Phi, \Psi \quad (23)$$

通过引入标准高斯积分, 式(22) (23)中的各项可表示为:

$$\bar{\phi}_{il}^t = \frac{1}{A_i} \sum_{p=1}^{n_{seg}} \left[ \sum_{q=1}^{n_c} W_q^G (N_{l,p,q}^t n_{l,p}^t) \right] \quad (24)$$

$l = x, z; t = u, \Phi, \Psi$

式中： $n_c$ 为高斯点的数量； $n_{seg}$ 为光滑域边界的数量； $n_{l,p}^t$ 为光滑域第  $p$  段边界中单位法向量矩阵的分量； $N_{l,p,q}^t$ 为第  $p$  段边界上第  $q$  个高斯点处的形函数值； $W_q^G$ 为第  $q$  个高斯点处的权值； $A_i$ 为光滑域的面积.

二维磁电弹的 NS-RPIM 静力学方程可表示为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\Phi} & \mathbf{K}_{u\Psi} \\ \mathbf{K}_{u\Phi}^T & -\mathbf{K}_{\Phi\Phi} & -\mathbf{K}_{\Phi\Psi} \\ \mathbf{K}_{u\Psi}^T & -\mathbf{K}_{\Phi\Psi}^T & -\mathbf{K}_{\Psi\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中： $\mathbf{F}$ 为外力. 各刚度矩阵为:

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_u^i A_i, \mathbf{K}_{u\Phi} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \mathbf{e} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^i A_i \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_{u\Psi} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \mathbf{q} \bar{\mathbf{B}}_\Psi^i A_i, \mathbf{K}_{\Phi\Phi} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^{iT} \boldsymbol{\varepsilon} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^i A_i \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Psi} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^{iT} \mathbf{m} \bar{\mathbf{B}}_\Psi^i A_i, \mathbf{K}_{\Psi\Psi} = \sum_{i=1}^{n_n} \bar{\mathbf{B}}_\Psi^{iT} \boldsymbol{\mu} \bar{\mathbf{B}}_\Psi^i A_i \quad (28)$$

采用自由度凝聚技术<sup>[18]</sup>,式(25)可表示为:

$$[\mathbf{K}_{\text{eq}}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}_{\text{eq}}\} \quad (29)$$

式中:等效力向量  $\mathbf{F}_{\text{eq}}$ 、等效刚度矩阵  $\mathbf{K}_{\text{eq}}$  以及电势  $\Phi$  和磁势  $\Psi$  的求解公式见参考文献[18].

### 2.3 稳定 Node-based 光滑径向基点插值法

为了在提高 NS-RPIM 计算精度的同时消除时间不稳定性,在该算法中引入与场变量梯度方差相关的稳定项来提高模型的刚度,令其更接近真实情况.

以二维问题为例,如图 3 所示,光滑域  $\Omega_i$  被近似为具有相同面积的圆,将近似域进一步划分为 4 个子光滑域.局部坐标系与光滑域的交点  $G_i^k$  ( $k = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, 3, \dots, n_n$ ) 作为补充积分点,  $n_n$  为结构包含节点数.积分点与节点  $\mathbf{x}_i$  之间的距离  $l_c$  相等,大小为近似域的半径.  $l_c$  的计算公式为:

$$l_c = \sqrt{A_i/\pi} \quad (30)$$

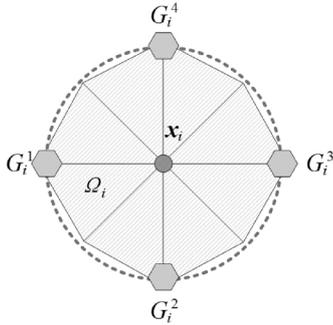


图 3 SNS-RPIM 积分区域  
Fig.3 Integral domain of SNS-RPIM

假设场变量的梯度在光滑域  $\Omega_i$  中连续且一阶可导,其在 4 个积分点处的泰勒展开式分别为:

$$\nabla \mathbf{u}_m^{\text{sc}} = \nabla \mathbf{u}_i - \frac{\partial(\nabla \mathbf{u})}{\partial l} \cdot l_c, \nabla \mathbf{u}_n^{\text{sc}} = \nabla \mathbf{u}_i + \frac{\partial(\nabla \mathbf{u})}{\partial l} \cdot l_c \quad (31)$$

$$\nabla \Phi_m^{\text{sc}} = \nabla \Phi_i - \frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial l} \cdot l_c, \nabla \Phi_n^{\text{sc}} = \nabla \Phi_i + \frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial l} \cdot l_c \quad (32)$$

$$\nabla \Psi_m^{\text{sc}} = \nabla \Psi_i - \frac{\partial(\nabla \Psi)}{\partial l} \cdot l_c, \nabla \Psi_n^{\text{sc}} = \nabla \Psi_i + \frac{\partial(\nabla \Psi)}{\partial l} \cdot l_c \quad (33)$$

式中:  $m = 1, 2; n = 3, 4; l = x, z$ ; 上标 sc 表示在近似域中的 4 个补充积分点处进行计算.将式(31)~式(33)代入光滑伽辽金弱形式,式(25)中各刚度矩阵

可以改写为:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{uu} = \mathbf{K}_{uu} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_x \mathbf{C} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_z \mathbf{C} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)_z \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{u\Phi} = \mathbf{K}_{u\Phi} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_x \mathbf{e} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_z \mathbf{e} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)_z \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{u\Psi} = \mathbf{K}_{u\Psi} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_x \mathbf{q} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_u^i)^T_z \mathbf{q} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_z \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\Phi\Phi} = \mathbf{K}_{\Phi\Phi} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)^T_x \boldsymbol{\varepsilon} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)^T_z \boldsymbol{\varepsilon} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)_z \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\Phi\Psi} = \mathbf{K}_{\Phi\Psi} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)^T_x \mathbf{m} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i)^T_z \mathbf{m} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_z \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\Psi\Psi} = \mathbf{K}_{\Psi\Psi} + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)^T_x \boldsymbol{\mu} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_x + \sum_{i=1}^{n_n} \frac{A_i}{2} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)^T_z \boldsymbol{\mu} (\bar{\mathbf{B}}_\Psi^i)_z \quad (39)$$

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1

磁电弹材料( $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$ )板在边  $AD$  受  $100 \text{ N/m}^2$  的均布载荷作用,为平面应变问题,如图 4 所示,边长  $a = 2.0 \text{ m}$ .表 1 给出了磁电弹板的材料参数,质量密度为  $5730 \text{ kg/m}^3$ ,边界条件为:  $u_x = 0$  (边  $CD$ ),  $u_z = \Phi = \Psi = 0$  (边  $BC$ ),每个边界的表面电荷与表面磁感应强度均为零.

采用不同节点数量(121, 441 和 1681 个)求解磁电弹板的广义位移(位移  $u_x, u_z$ , 电势  $\Phi$ , 磁势  $\Psi$ ),验证 SNS-RPIM 的正确性以及收敛性.表 2 给出了文献[23]中  $A$  点处位移、电势与磁势的解析解,以及 SNS-RPIM 在不同节点数量下的计算结果.可见, SNS-RPIM 的结果与解析解误差很小,随着节点数量的增加,误差减小,验证了 SNS-RPIM 求解磁电弹结构多场耦合问题的正确性、有效性.

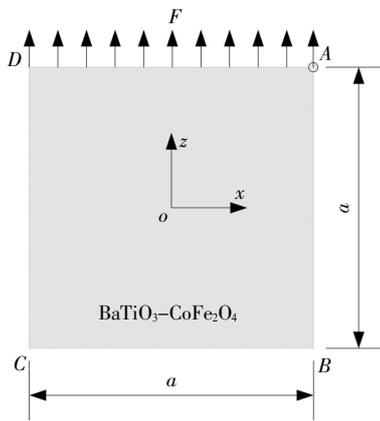


图4 磁电弹板

Fig.4 Magneto-electro-elastic plate

表1 BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> 材料属性<sup>[5]</sup>

Tab.1 Material properties of BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub><sup>[5]</sup>

系数	材料属性
弹性常数 $C/(10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2})$	$C_{11}=16.60, C_{12}=7.70, C_{13}=7.80$ $C_{33}=16.20, C_{44}=4.30, C_{66}=4.45$
介电常数 $\epsilon/(10^{-8} \text{ C}\cdot\text{Vm}^{-1})$	$\epsilon_{11}=1.12, \epsilon_{33}=1.26$
磁导率系数 $\mu/(10^{-6} \text{ N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{C}^{-2})$	$\mu_{11}=5.0, \mu_{33}=10.0$
压电系数 $e/(\text{C}\cdot\text{m}^{-2})$	$e_{31}=-4.40, e_{33}=18.60, e_{15}=11.60$
压磁系数 $q/(\text{N}\cdot\text{Am}^{-1})$	$q_{31}=580.30, q_{33}=699.70, q_{15}=550.0$
磁电耦合系数 $m/(10^{-12} \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{VC}^{-1})$	$m_{11}=5.0, m_{33}=3.0$

表2 A点处位移、电势和磁势

Tab.2 Displacement, electric potential and magnetic potential at point A

方法	节点数量/个	$u_x/(10^{-10} \text{ m})$	$u_z/\text{nm}$	$\Phi/\text{V}$	$\Psi/(10^{-3} \text{ A})$
	121	-6.333 170 612 063 4	1.136 675 746 431 48	1.899 098 064 222 54	42.781 243 186 587
SNS-RPIM	441	-6.333 170 612 063 2	1.136 675 746 431 46	1.899 098 064 222 52	42.781 243 186 587
	1 681	-6.333 170 612 063 8	1.136 675 746 431 53	1.899 098 064 222 55	42.781 243 186 588
解析解	—	-6.333 16	1.136 676	1.899 10	42.781 2

3.2 算例2

磁电弹材料悬臂梁如图5所示,长度  $L=0.030 \text{ m}$ ,宽度  $h=0.002 \text{ m}$ ,在B点承受200 N的静力,为平面应力问题.悬臂梁在固定端处满足  $u_x=u_z=\Phi=\Psi=0$ .悬臂梁材料属性见表1,质量密度为  $5730 \text{ kg/m}^3$ .

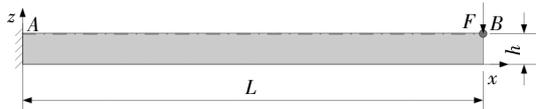


图5 磁电弹悬臂梁

Fig.5 Magneto-electro-elastic cantilever beam

在证明了SNS-RPIM正确性的基础上,对磁电弹悬臂梁在静力作用下的响应进行研究.图6给出了边AB处的广义位移,SNS-RPIM与FEM采用三角形单元,节点数量为305个.其中,参考解为FEM采用  $180 \times 12$  个四边形单元的结果.图7给出了静力作用下悬臂梁的云图.由结果可知,在所用节点数量相同的情况下,SNS-RPIM的计算结果比FEM的结果更加接近参考解.算例结果验证了SNS-RPIM的高精度、正确性和有效性.

在节点数为305、637和1089个时,对比了SNS-RPIM与FEM的能量误差<sup>[24]</sup>,如图8所示.可知

在节点数相同的情况下,SNS-RPIM的能量误差远远低于FEM,并且随着所用节点数的增加,能量误差逐渐降低.从而进一步验证了SNS-RPIM的精确性,高收敛性与有效性.

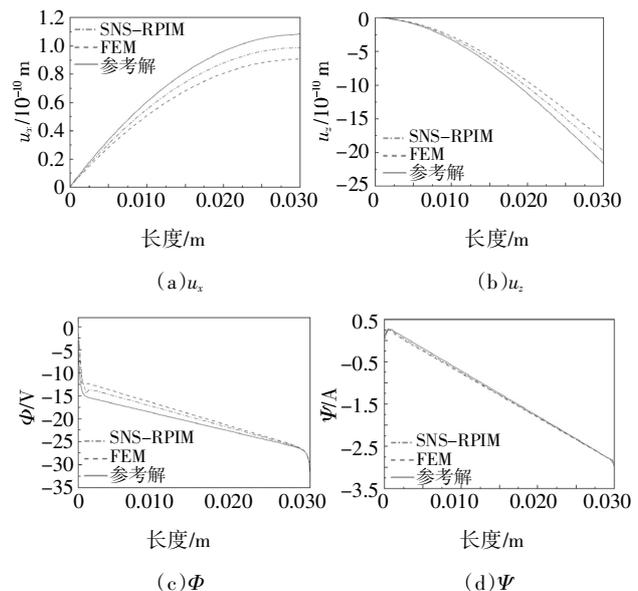


图6 悬臂梁AB边界处  $u_x, u_z, \Phi$  和  $\Psi$  变化趋势

Fig.6 Variation of  $u_x, u_z, \Phi$  and  $\Psi$  at edge AB of cantilever beam

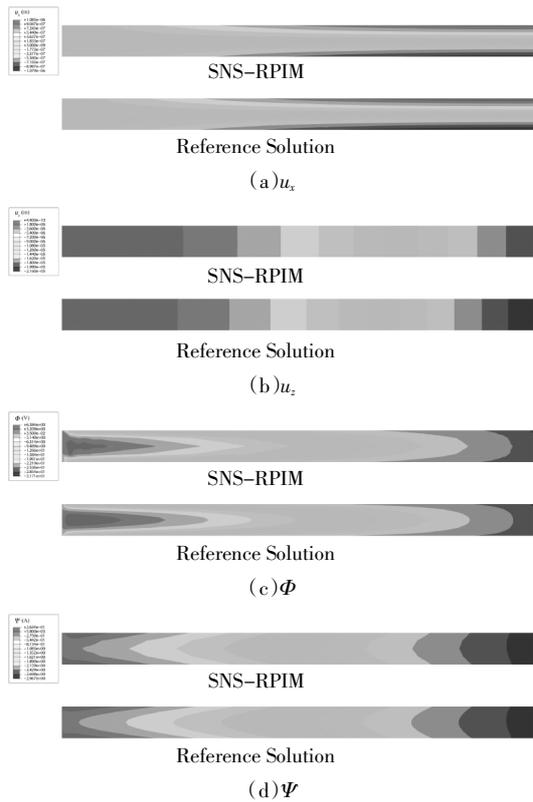


图 7 悬臂梁  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  和  $\Psi$  云图  
 Fig.7 Contour of  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  and  $\Psi$  of cantilever beam

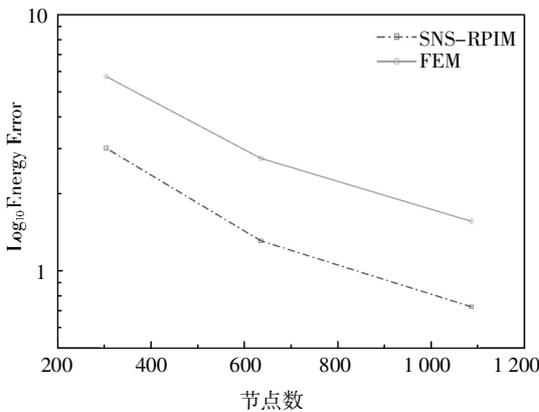


图 8 稳定 Node-based 光滑径向基点插值法与有限元法在不同节点数下的能量误差  
 Fig.8 Energy error of SNS-RPIM and FEM with different number of nodes

### 3.3 算例 3

磁电弹材料传感器为对称结构,在 A 点受 100 N 的静力  $F$ ,传感器几何形状及尺寸如图 9 所示,为平面应力问题.传感器边界条件为: $u_x = u_z = 0$  (左右固定端处), $\Phi = \Psi = 0$  (下边界处).结构所用材料见表 1,质量密度为  $5730 \text{ kg/m}^3$ .

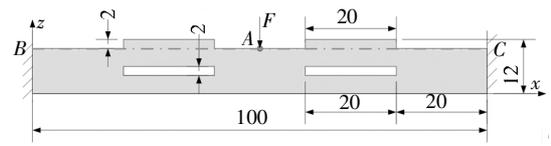
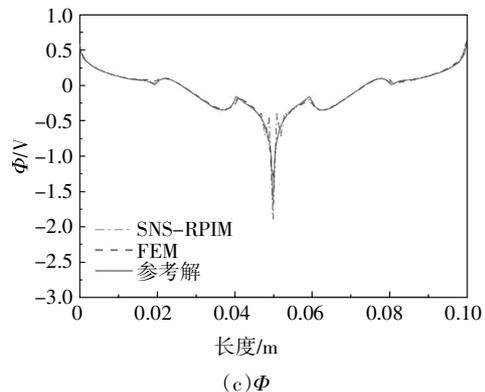
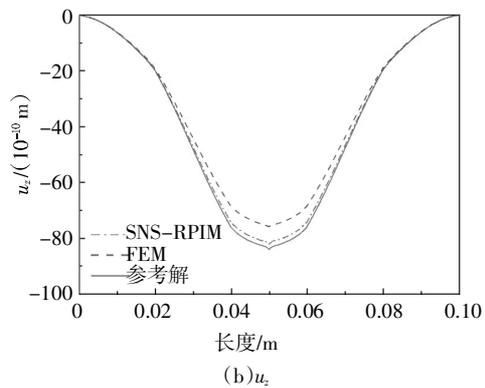
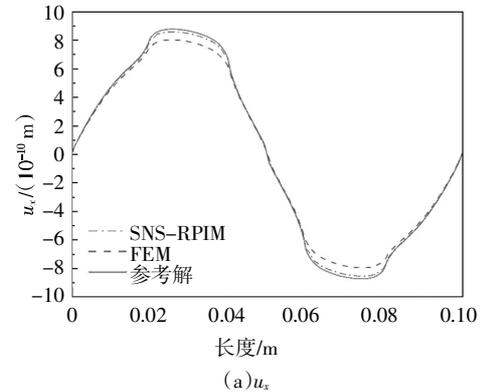


图 9 磁电弹传感器(单位:mm)  
 Fig.9 Magneto-electro-elastic sensor(unit:mm)

图 10 给出了边 BC 处的广义位移,SNS-RPIM 与 FEM 采用三角形单元,节点数量为 1157 个.其中,参考解为 FEM 采用 4000 个四边形单元的结果.图 11 所示为磁电弹传感器位移、电势和磁势的云图.由图可得:在同样节点条件下,SNS-RPIM 的计算结果比 FEM 的计算结果更加接近参考解,从而验证了 SNS-RPIM 可解决有限元系统刚度过硬的问题,提高结果的精度,能够有效求解复杂磁电弹结构在静力作用下的响应.



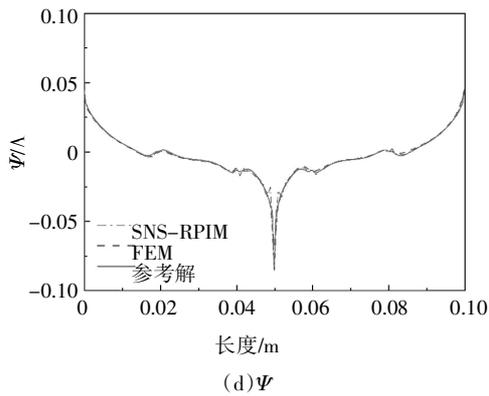


图 10 传感器 BC 边界处  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  和  $\Psi$  变化趋势  
Fig.10 Variation of  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  and  $\Psi$  at edge BC of magneto-electro-elastic sensor

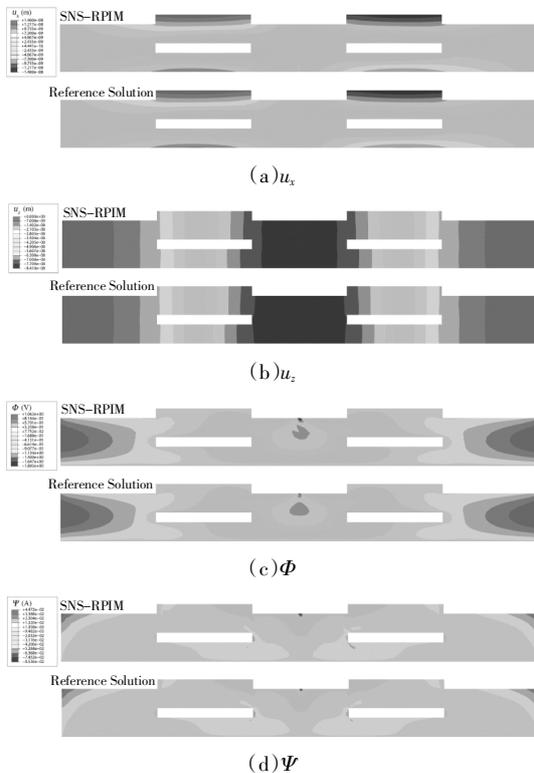


图 11 传感器  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  和  $\Psi$  云图  
Fig.11 Contour of  $u_x$ 、 $u_z$ 、 $\Phi$  and  $\Psi$  of magneto-electro-elastic sensor

### 4 结论

本文基于场变量梯度方差构造了稳定项，并将其引入了传统Node-based 光滑径向基点插值法，提出了稳定 Node-based 光滑径向基点插值法。随后求解了磁电弹结构在静力作用下的响应，得出以下结论：

1)将 SNS-RPIM 的结果与解析解进行对比，二者吻合良好，说明了本方法的正确性及有效性。

2)计算了 SNS-RPIM 与 FEM 在不同节点数量下的能量误差，结果显示 SNS-RPIM 具有良好的收敛性与准确性。

3)SNS-RPIM 利用较少的节点能够达到更高的精度，消除了 FEM 模型刚度过硬的问题。

4)通过考虑 SNS-RPIM 与 FEM 对不同模型的求解结果，表明 SNS-RPIM 在求解磁电弹结构多场耦合问题时的可靠性和适用性。

### 参考文献

- [1] BOOMGAARD J V D, VAN RUN A M J, SUCHTELEN J V. Magnetolectricity in piezoelectric-magnetostrictive composites [J]. *Ferroelectrics*, 1976, 10(1): 295—298.
- [2] LU X Y, LI H, WANG B. Theoretical analysis of electric, magnetic and magnetoelectric properties of nano-structured multiferroic composites [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2011, 59(10): 1966—1977.
- [3] FETISOV L Y, SEROV V N, CHASHIN D V, et al. A magnetoelectric sensor of threshold DC magnetic fields [J]. *Journal of Applied Physics*, 2017, 121(15): 154503.
- [4] 李帛书, 钟轶峰, 罗丹, 等. 涂层-纤维增强磁电弹性材料的变分渐近细观力学模型 [J]. *复合材料学报*, 2018, 35(10): 2823—2831.  
LI B S, ZHONG Y F, LUO D, et al. Variational asymptotic micromechanics model of coating-fiber reinforced magneto-electro-elastic materials [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2018, 35(10): 2823—2831. (In Chinese)
- [5] JIANG A M, DING H J. Analytical solutions to magneto-electro-elastic beams [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2004, 18(2): 195—209.
- [6] WANG Y, XU R Q, DING H J, et al. Three-dimensional exact solutions for free vibrations of simply supported magneto-electro-elastic cylindrical panels [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2010, 48(12): 1778—1796.
- [7] EBRAHIMI F, BARATI M R. An exact solution for buckling analysis of embedded piezoelectric-magnetically actuated nanoscale beams [J]. *Advances in Nano Research*, 2016, 4(2): 65—84.
- [8] EBRAHIMI F, BARATI M R. Static stability analysis of smart magneto-electro-elastic heterogeneous nanoplates embedded in an elastic medium based on a four-variable refined plate theory [J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25(10): 105014.
- [9] LIU G R, ZHANG G Y. Smoothed point interpolation methods G space theory and weakened weak forms [M]. Singapore: World Sci-

- entific, 2013: 403—578.
- [10] 崔向阳, 李光耀. 基于边光滑有限元法的剪切变形板几何非线性分析 [J]. 计算机辅助工程, 2011, 20(1): 155—162.  
CUI X Y, LI G Y. Geometric nonlinear analysis on shear deformation plates using edge-based smoothed finite element method [J]. Computer Aided Engineering, 2011, 20(1): 155—162. (In Chinese)
- [11] LIU G R, LI Y, DAI K Y, *et al.* A linearly con-forming radial point interpolation method for solid mechanics problems [J]. International Journal of Computational Methods, 2006, 3(4): 401—428.
- [12] 何智成, 李光耀, 成艾国, 等. 光滑有限元的声学研究: 时域和频域分析 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(16): 122—127.  
HE Z C, LI G Y, CHENG A G, *et al.* Acoustic analysis using edge-based smoothed finite element method: time and frequency domain analysis [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(16): 122—127. (In Chinese)
- [13] 何智成, 李光耀, 成艾国, 等. 基于边光滑有限元的声固耦合研究 [J]. 机械工程学报, 2014, 50(4): 113—119.  
HE Z C, LI G Y, CHENG A G, *et al.* Coupled edge-based smoothing finite element method for structural acoustic problems [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(4): 113—119. (In Chinese)
- [14] 陈泽聪, 陈毓珍, 何智成, 等. 应用混合单元基光滑点插值法的声固耦合分析 [J]. 振动与冲击, 2019, 38(8): 238—245.  
CHEN Z C, CHEN Y Z, HE Z C, *et al.* A hybrid cell-based smoothing point interpolation method for solving structural-acoustic problems [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(8): 238—245. (In Chinese)
- [15] 周立明, 孟广伟, 李锋. 界面裂纹的 Cell-Based 光滑有限元法研究 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(6): 34—39.  
ZHOU L M, MENG G W, LI F. Research on cell-based smoothed finite element method of interface cracks [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(6): 34—39. (In Chinese)
- [16] 周立明, 蔡斌, 孟广伟, 等. 含裂纹压电材料的 Cell-Based 光滑扩展有限元法 [J]. 复合材料学报, 2016, 33(4): 929—938.  
ZHOU L M, CAI B, MENG G W, *et al.* Cell-based smoothed extended finite element method for piezoelectric materials with cracks [J]. Acta Materialiae Compositae Sinica, 2016, 33(4): 929—938. (In Chinese)
- [17] LI Y, LIU G R, YUE J H. A novel node-based smoothed radial point interpolation method for 2D and 3D solid mechanics problems [J]. Computers & Structures, 2018, 196: 157—172.
- [18] ZHOU L M, REN S H, MENG G W, *et al.* A multi-physics node-based smoothed radial point interpolation method for transient responses of magneto-electro-elastic structures [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2019, 101: 371—384.
- [19] FENG H, CUI X Y, LI G Y, *et al.* A temporal stable node-based smoothed finite element method for three-dimensional elasticity problems [J]. Computational Mechanics, 2014, 53(5): 859—876.
- [20] WANG G, CUI X Y, FENG H, *et al.* A stable node-based smoothed finite element method for acoustic problems [J]. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2015, 297: 348—370.
- [21] FENG H, CUI X Y, LI G Y. A stable nodal integration method for static and quasi-static electromagnetic field computation [J]. Journal of Computational Physics, 2017, 336: 580—594.
- [22] YANG H, CUI X Y, LI S, *et al.* A stable node-based smoothed finite element method for metal forming analysis [J]. Computational Mechanics, 2019, 63(6): 1147—1164.
- [23] ZHU X Y, HUANG Z Y, JIANG A M, *et al.* Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2010, 34: 927—933.
- [24] ZHOU L M, REN S H, LIU C Y, *et al.* A valid inhomogeneous cell-based smoothed finite element model for the transient characteristics of functionally graded magneto-electro-elastic structures [J]. Composite Structures, 2019, 208: 298—313.