

基于近似移动矢量的证据理论可靠性设计优化方法

于俊涛¹, 邓卫², 王巨³, 张哲^{2†}

- (1. 中国核电工程有限公司 郑州分公司, 河南 郑州 450052;
2. 湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南 长沙 410082;
3. 东风汽车有限公司东风日产乘用车公司, 广东 广州 510800)

摘要:针对存在认知不确定性的结构优化问题,提出了一种基于近似移动矢量的证据理论可靠性设计优化方法,可有效提升计算效率.该方法通过等面积法将证据变量转换成概率变量,构建等效的概率可靠性设计优化模型,并使用序列优化与可靠性分析方法求解获得近似设计点;开展基于证据理论的可靠性分析求解约束的可信度,构建近似移动矢量和确定性优化模型,求解获得新的设计点;重复概率可靠性设计优化与证据理论可靠性分析组成的序列迭代过程,直到收敛得到最优设计点.本文方法能够将嵌套的证据理论可靠性设计优化问题转换为近似等效的概率可靠性设计优化与证据理论可靠性分析组成的序列迭代过程进行求解,能够有效降低证据理论可靠性设计优化的计算成本.通过算例验证了所提方法的有效性.

关键词:可靠性设计优化;认知不确定性;证据理论;近似移动矢量

中图分类号: TB114.3

文献标志码: A

An Evidence-theory-based Reliability Design Optimization Method Using Approximate Shifting Vector

YU Juntao¹, DENG Wei², WANG Ju³, ZHANG Zhe^{2†}

- (1. Zhengzhou Branch of China Nuclear Power Engineering Co Ltd, Zhengzhou 450052, China;
2. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China;
3. Dongfeng-Nissan Co Ltd, Guangzhou 510800, China)

Abstract: To effectively deal with structural optimization problems with epistemic uncertainty, an evidence-theory-based reliability design optimization method using approximate moving vectors is proposed. It first converts the evidence variables into probability variables and constructs an equivalent probabilistic reliability-based design optimization model. Through solving this model using the sequential optimization and reliability assessment method, an approximate design point is obtained. Then, the evidence-theory-based reliability analysis is carried out for each constraint at the design point, based on which the approximate shifting vector and deterministic optimization model are established. A new design point is obtained by solving the deterministic optimization problem. Finally, the sequential iteration process composed of equivalent probabilistic reliability-based design optimization and evidence-theory-based reliability analysis is repeated until convergence, and the optimal design point is obtained. The proposed

* 收稿日期:2021-05-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51805157), National Natural Science Foundation of China(51805157); 湖南省自然科学基金资助项目(2019JJ40015), Natural Science Foundation of Hunan Province(2019JJ40015)

作者简介:于俊涛(1981—),男,河南新密人,中国核电工程有限公司郑州分公司高级工程师

† 通信联系人, E-mail: zhangzhe0828@hnu.edu.cn

method can convert the nested evidence-theory-based design optimization problem into an iterative solution process, which can effectively reduce its computational cost. The effectiveness of the proposed method is verified by three examples.

Key words: reliability-based design optimization; epistemic uncertainty; evidence theory; approximate shifting vector

不确定性广泛存在于工程实际问题之中,其来源通常与结构的材料参数、外部载荷、仿真模型等因素相关.不确定性主要分为随机不确定性与认知不确定性.随机不确定性源于结构或系统内在的物理性质,通常使用概率模型进行度量与分析,已经发展了一系列成熟的可靠性分析与设计方法^[1-4].认知不确定性源于对结构或系统信息的缺乏,主要通过证据理论(或 Dempster-Shafer 理论)^[5-9]、可能性理论^[10-11]、模糊理论^[12]和凸模型理论^[13-15]等进行度量与分析.不确定性的耦合与传播容易导致结构响应发生较大波动甚至失效,因此,对不确定性的结构可靠性优化设计(Reliability-Based Design Optimization, RBDO)具有重要意义^[16-18].

证据理论具有较强的认知不确定性处理能力.近年来,研究人员提出了一系列基于证据理论的可靠性设计优化方法(Evidence-Theory-Based Design Optimization, EBDO). Mourelatos 和 Zhou^[19]提出了一种求解证据理论可靠性设计优化问题的方法,该方法主要包括两部分:第一部分是构造等效的概率可靠性设计优化问题近似求解原 EBDO 问题;第二部分是引入 DIRECT 算法开展约束的证据可靠性分析. Srivastava 等^[20]提出了一种求解 EBDO 问题的双目标遗传算法,该算法不要求解梯度信息,适应证据变量不连续的特征. Alyanak 等^[21]提出了一种针对证据变量的近似梯度计算方法,并发展了相应的 EBDO 算法. Agarwal 等^[22]采用代理模型技术构造了近似的可信度函数使其连续化,在此基础上提出了基于序列近似优化的 EBDO 求解算法. Yao 等^[23]提出了一种同时处理随机与认知不确定性的多学科设计优化方法. Salehghaffari 等^[24]将 EBDO 算法应用于实际加强圆管的设计优化. Huang 等^[25-26]提出了一种针对 EBDO 问题的解耦策略,并将其应用于考虑变量相关性的结构可靠性设计优化. 苏瑜等^[27]基于证据理论提出了一种考虑认知不确定性的可靠性拓扑优化设计算法. 李晓斌等^[28]将 EBDO 算法应用于固体火箭发动机的不确定性设计中. Hu 等^[29]发展了基于证据

理论的鲁棒性优化设计算法. 唐和生等^[30]结合证据理论与微分演化提出了一种高效的 EBDO 求解方法.

尽管 EBDO 研究已经取得重要进展,但依旧存在诸多挑战. EBDO 问题的求解属于双层嵌套优化问题,外层为确定性优化设计,内层为基于证据理论的可靠性分析,通常计算效率低,严重限制了其在实际工程问题中的应用. 本文提出一种基于近似移动矢量的证据可靠性优化设计方法,将传统的双层嵌套优化问题进行解耦,从而有效提高 EBDO 的求解效率.

1 证据理论基本概念

证据理论由 Dempster 和 Shafer 提出和发展,也称 Dempster-Shafer 理论. 基本概念包括:

1) 识别框架(Frame of Discernment, FD): FD 是人们对一个认知不确定性问题已经获知的所有可能结果的集合,由有限个两两互不相容的基本元素组成,类似于概率理论中的样本空间. 例如,FD 由 $\Theta = \{x_1, x_2\}$ 定义,其中 x_1 和 x_2 是两个独立的基本元素. 但是,证据理论中 x_1 和 x_2 都是集合,而非具体的样本点.

2) 基本可信度分配(Basic Probability Assignment, BPA): BPA 是对命题的信任程度的定量描述. 如果识别框架 Θ 的幂集 2^Θ 与区间 $[0, 1]$ 的函数关系 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ 满足以下条件:

$$m(A) \geq 0, \forall A \in 2^\Theta \quad (1)$$

$$m(\phi) = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m(A) = 1 \quad (3)$$

则 $m(A)$ 是 $A (\forall A \in 2^\Theta)$ 的基本可信度分配函数. 特别地,如果 $m(A) > 0$,则将 A 称为 m 的焦元. 基本可信度类似于概率论中的概率密度函数,可以描述对 Θ 中的元素属于 A 这个命题的支持程度.

3) 可信度(Belief, Bel)和似真度(Pausibility, Pl):

由于存在认知不确定性,证据理论使用可信度与似真度构成的概率区间 $[\text{Bel}(A), \text{Pl}(A)]$ 共同描述命题 A 的可靠度. 对于命题 A , 其 Bel 和 Pl 定义为:

$$\text{Bel}(A) = \sum_{C \subset A} m(C) \quad (4)$$

$$\text{Pl}(A) = \sum_{C \cap A \neq \phi} m(C) \quad (5)$$

式中:所有完全支持 A 的焦元可信度相加等于 $\text{Bel}(A)$;所有不否定的焦元可信度相加等于 $\text{Pl}(A)$.

2 算法构造

基于证据理论的可靠性设计优化模型如下:

$$\begin{aligned} & \min_{d, \mu} f(d, X^N, P^N) \\ & \text{s.t. } \text{Bel}\{g_j(d, X, P) \geq 0\} \geq R_j^i, j = 1, 2, \dots, n \\ & \quad d^L \leq d \leq d^U, X_i^L \leq X_i \leq X_i^U \end{aligned} \quad (6)$$

式中: f 是目标函数; g_j 是约束的功能函数; d 是确定性设计向量; X 是随机设计向量; P 是随机参数向量; X^N 和 P^N 分别是 X 和 P 的名义值向量; L 和 U 表示下边界和上边界; $\text{Bel}\{\cdot\}$ 代表可信度计算, R_j^i 是目标可靠度.

传统的 EBDO 求解是双层嵌套优化问题,内层进行证据可靠性分析,外层开展确定性优化设计,求解效率非常低;此外,由于证据理论可信度函数的离散特性,无法直接使用基于梯度的优化算法,进一步增加了 EBDO 问题的求解难度. 针对上述问题,本文提出了一种基于近似移动矢量的 EBDO 方法,以有效降低 EBDO 的计算成本. 首先,利用等面积法将证据变量转换为概率变量,构建等效的 RBDO 问题求解近似设计点;然后,基于证据理论开展约束的可靠性分析,构建近似移动矢量与确定性优化模型,求解获得新的设计点;最后,重复求解上述过程直到优化过程收敛.

2.1 等效概率可靠性设计优化模型的构造与求解

首先引入等面积法将证据变量 X 转变成随机变量 Z . 证据变量 X 的第 i 个焦元 $A_i = [L_i, U_i]$, 对应的 BPA 为 $m(A_i)$. 等面积法要求满足两个条件:1) 焦元 A_i 的 BPA $m(A_i)$ 等于随机变量 Z 在区间 $[L_i, U_i]$ 的累计概率. 2) Z 的概率密度函数在整个不确定域内连续. 如图 1 所示,对于焦元 $[L_1, U_1]$,左端点 L_1 的概率密度值为:

$$f(Z = L_1) = \frac{m(A_1)}{2(U_1 - L_1)} \quad (7)$$

右端点 U_1 的概率密度值为:

$$f(Z = U_1) = \frac{m(A_1)}{2(U_1 - L_1)} - f(Z = L_1) \quad (8)$$

由于 $L_2 = U_1, f(Z = L_2) = f(Z = U_1)$. 重复上述步骤可得随机变量 Z 的概率密度函数 $f(Z)$.

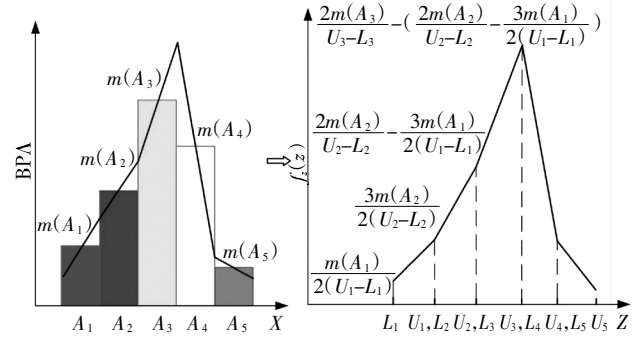


图 1 证据变量转换为随机变量

Fig.1 Transformation from an evidence variable to a random variable

将证据变量转换为随机变量后,原 EBDO 问题转化为等效的 RBDO 问题,相应的数学模型为:

$$\begin{aligned} & \min_{d, \mu} f(d, \mu_X, \mu_P) \\ & \text{s.t. } \text{Pr}\{g_j(d, X, P) \geq 0\} \geq R_j^i, j = 1, 2, \dots, n \\ & \quad d^L \leq d \leq d^U, \mu_X^L \leq \mu_X \leq \mu_X^U \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $\text{Pr}\{\cdot\}$ 表示计算可靠度; μ_X, μ_P 是 X, P 的均值向量.

使用序列优化与可靠性分析方法(Sequential Optimization and Reliability Assessment, SORA)^[16]求解上述 RBDO 问题. SORA 通过构造移动矢量将 RBDO 的求解转化为可靠性分析与确定性优化的序列迭代求解过程,具有较好的计算效率和收敛性. 为方便描述,令 $Z = [X, P]$ 代表所有随机设计变量和参数向量, SORA 的数学模型如下:

$$\begin{aligned} & \min_{d, \mu} f(d, \mu_X, \mu_P) \\ & \text{s.t. } g_j(d, \mu_Z - S_j^{(k+1)}) \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_p. \\ & \quad d^L \leq d \leq d^U, \mu_X^L \leq \mu_X \leq \mu_X^U \end{aligned} \quad (10)$$

式中: $S_j^{(k+1)}$ 为移动矢量; k 为迭代次数; μ_Z 是 Z 的均值向量, $\mu_Z = [\mu_X, \mu_P]$.

移动矢量计算公式为:

$$S_j^{(k+1)} = \mu_Z^{(k)} - Z_j^{*,(k)} \quad (11)$$

式中: $Z_j^{*,(k)}$ 是第 k 次迭代第 j 个约束的最大可能失效点(Most Probable Point, MPP), $\mu_Z^{(k)}$ 是当前设计点向量.

MPP 可采用一阶可靠性方法(First order Reliability Method, FORM)计算,等概率变换将 Z 变换到由标准正态分布随机变量 $U_i (i=1, 2, \dots, n)$ 构成的标准正态坐标空间, U_i 组成向量 U , 以下将标准正态空间简称为 U 空间.

$$U_i = \Phi^{-1}(F_Z(Z_i)), Z_i = F_Z^{-1}(\Phi(U_i)) \quad (12)$$

式中: U_i 是 Z_i 变换到空间 U 后的标准正态随机变量.

在以原点为圆心, 半径为 β_j^i 的圆上搜索使功能函数值最小的点, 数学模型为:

$$\begin{aligned} \min_U G_j(U) \\ \text{s.t. } \|U\| = \beta_j^i, j = 1, 2, \dots, n_g \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 证据理论可靠性设计优化模型的求解

以上获得的设计点 $\bar{X} = [\bar{d}, \bar{\mu}_Z]$ 可能不满足证据理论的可信度, 但是该设计点已经逼近 EBD0 的最优设计点. 因此, 以当前设计点为初始点开展 EBD0 的求解, 能够有效提高寻优速度. 假设第 $k-1$ 步时完成 RBDO 求解, 接着在第 k 步开始求解 EBD0, 如果此时继续将等效确定性约束 $G_j(d, \mu_Z - S_j^{(k-1)}) \geq 0$ 向可靠域移动: 先计算增量移动矢量 $\Delta S_j^{(k)}$, 然后将 $G_j(d, \mu_Z - S_j^{(k-1)}) \geq 0$ 沿着 $\Delta S_j^{(k)}$ 移动, 则第 k 步移动矢量 $S_j^{(k)}$ 为:

$$S_j^{(k)} = S_j^{(k-1)} + \Delta S_j^{(k)} \quad (14)$$

在此基础上, 构建如式(10)的确定性设计优化问题. 在该模型中, 当前迭代步的移动矢量是上一步移动矢量的调整, 调整幅度为增量移动矢量.

首先在标准状态空间中考虑移动矢量增量几何关系. 如图 2 所示, 在标准状态空间中, $\|U\| = \beta^i$ 是以原点为圆心, 目标可靠性指标 β_j^i 为半径的圆. 当 $G_j(d, U) = 0$ 与圆相交, 表示第 k 步的可靠性指标 β_j^i 小于 β_j^i , 不满足可靠性要求. 在下次迭代, 如果将约束边界 $G_j(d, \mu_Z - S_j^{(k-1)}) \geq 0$ 接着移向可靠域, 则可以使得约束函数的可靠度增加, 最终达到目标可靠度. 为了提高效率, 选择沿着可靠度在 U_0^k 处的梯度方向(可靠度增长最快)移动, 将可靠度差值 $\Delta\beta_j^i = \beta_j^i - \beta_j^k$ 作为移动距离. 新的移动过程称为增量移动矢量 $\Delta S_j^{U(k)}$, 可表示为:

$$\Delta S_j^{U(k)} = (\beta_j^i - \beta_j^k) \left(-\frac{\nabla \text{Bel}_j^k(U_0)}{\|\nabla \text{Bel}_j^k(U_0)\|} \right) \quad (15)$$

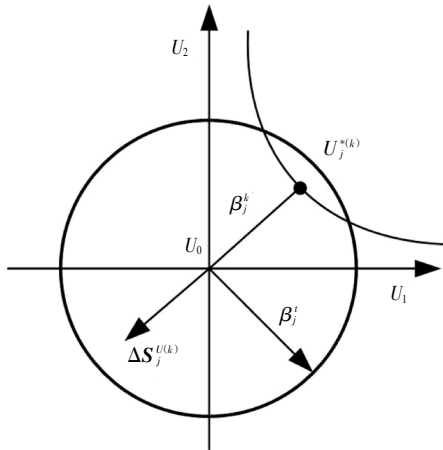


图 2 计算移动矢量增量示意图

Fig.2 Schematic diagram of the incremental shifting vector

可靠性指标 β_j^i 的计算方法将在 2.3 节介绍. 由于可信度函数 $\text{Bel}(\cdot)$ 并非处处可导, 因此 $\nabla \text{Bel}_j^k(U_0)$ $\|\nabla \text{Bel}_j^k(U_0)\|$ 不一定存在, 需要用其他方法近似计算. 由于将证据变量转换为概率变量, 基于概率变量得到的可靠度 \hat{R}_j^k 与证据变量的可信度 Bel_j 在原空间的变化趋势基本相同, 因此, 拟用可靠度梯度近似可信度梯度. $\Delta S_j^{U(k)}$ 改写为:

$$\Delta S_j^{U(k)} = (\beta_j^i - \beta_j^k) \left(-\frac{\nabla \hat{R}_j^k(U_0)}{\|\nabla \hat{R}_j^k(U_0)\|} \right) \quad (16)$$

约束函数的可靠度可采用 FORM 计算. 求得可靠度在 U 空间原点处的梯度后, 即可计算 U 空间的移动矢量增量 $\Delta S_j^{U(k)}$, 再逆变换到原空间, 得到移动矢量增量 ΔS_j^{k+1} , 再根据式(14)计算移动矢量 S_j^{k+1} . 获得新的移动矢量 S_j^{k+1} 后, 按 2.1 节所述方法重新构造近似的 RBDO 模型, 将新的移动矢量 S_j^{k+1} 代入式(10)并求解. 得到新的设计点后, 按照 2.3 节所述方法验证约束的可信度, 如果约束满足可信度要求, 则增量移动矢量 $\Delta S_j^{k+1} = 0$; 否则再次更新增量移动矢量, 直到满足收敛条件.

2.3 基于非概率指标的证据理论可靠性分析

本文采用基于非概率可靠性指标的焦元缩减方法^[31]对每个约束开展证据理论可靠性分析. 对于 n 维证据变量 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的功能函数 $g(X)$, 首先将证据变量 X_i 的 FD 归一化:

$$X_i \in X_i^I = [X_i^L, X_i^R], i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

$$X_i^c = \frac{X_i^L + X_i^R}{2}, X_i^w = \frac{X_i^R - X_i^L}{2}, i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

式中: I 表示区间; L, R 表示区间的下界和上界; c 和 w 是区间的中点和半径.

用标准化变量 $\delta_i \in [-1, 1]$ 对 X_i 进行标准化:

$$X_i = X_i^c + X_i^w \delta_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

不确定域 $C_\delta = \{\delta \mid \delta_i \in [-1, 1], i = 1, 2, \dots, n\}$ 是一个标准多维正方体, 标准化变量 $\delta_i, i = 1, 2, \dots, n$ 组成向量 δ , 其组成的坐标空间称为 δ 空间.

将式(19)代入功能函数 g 得到一个 δ 空间中的新功能函数 g' :

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g'(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \quad (20)$$

非概率可靠性指标 η 是在 δ 空间用无穷范数计算的原点与 $g' = 0$ 之间的距离, 计算公式为:

$$\begin{cases} \eta = \min_{\delta} \{\|\delta\|_{\infty}\} = \min_{\delta} \{\max(|\delta_1|, |\delta_2|, \dots, |\delta_n|)\} \\ \text{s.t. } g'(\delta) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\|\cdot\|_{\infty}$ 为无穷范数符号.

式(21)可用序列二次规划方法(SQP)求解, 其最优优点 δ^* 称为设计验算点.

基于非概率可靠性指标的焦元缩减方法可以根据指标 η 和 $g(X^c) = g'(0)$ 的值判断不确定域和极限状态面的位置关系,从而仅需要计算部分焦元的功能函数极值便可获得 $\text{Bel}(G)$ 和 $\text{Pl}(G)$,有效提高了证据理论可靠性分析的计算效率,具体过程参考文献[31].

2.4 计算步骤

本文方法计算流程总结如下,如图 3 所示.

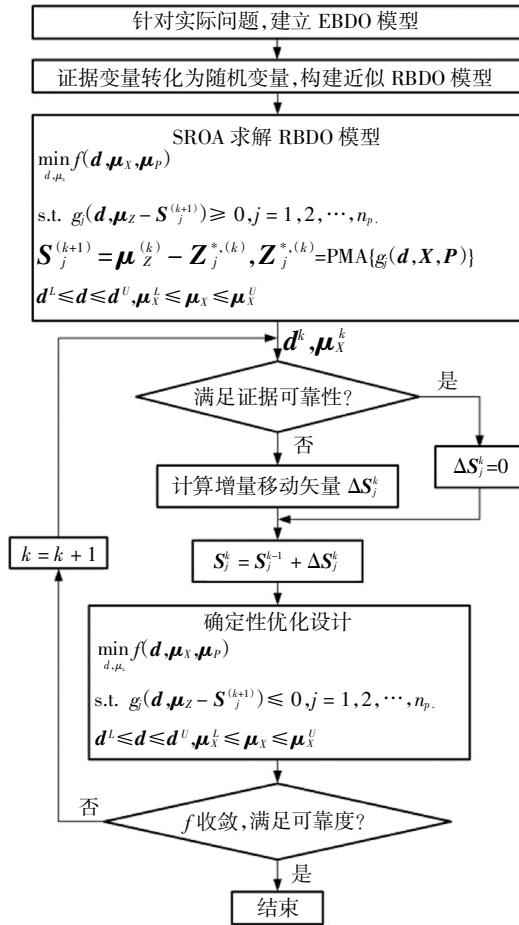


图 3 算法流程图

Fig.3 The flowchart of the proposed method

步骤 1: 根据实际工程问题,建立 EBDO 模型.

步骤 2: 用等面积法将证据变量转换为概率变量,设置初始点 $[d^0, \mu_x^0]$,迭代步 $k = 0$,将移动矢量设置为零向量,即 $S_j^0 = 0, j = 1, 2, \dots, n_g$.

步骤 3: 将 EBDO 问题转化为近似 RBDO 模型,使用 SORA 求解,得到最优解 $[d^*, \mu_x^*]$,作为求解 EBDO 问题的起点.

步骤 4: 验算近似 RBDO 模型的最优点的可信度,若满足目标要求,则 $\Delta S_j^k = 0$; 否则使用式(14)~式(16)计算新的增量移动矢量 ΔS_j^k 和移动矢量 S_j^k ,直到满足以下收敛条件,其中 ε 为给定误差限.

$$\begin{cases} \beta_j^k - \beta_j^{k-1} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n_g \\ (f^k - f^{k-1})/f^k < \varepsilon \end{cases} \quad (22)$$

步骤 5: 结束,输出最优解 $[d^*, \mu_x^*]$.

3 算例分析

3.1 算例一

考虑如下 EBDO 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mu_x} f(\mu_x) &= \mu_{x_1} + \mu_{x_2} \\ \text{s.t. } \text{Bel}\{g_j(X_1, X_2) \geq 0\} &\geq 0.99865, j = 1, 2, 3 \\ g_1 &= X_1^2 X_2 / 20 - 1 \\ g_2 &= \frac{(X_1 + X_2 - 5)^2}{30} + \frac{(X_1 - X_2 - 12)^2}{120} - 1 \\ g_3 &= 80 / (X_1^2 + 8X_2 + 5)^2 - 1 \\ 0 &\leq \mu_{x_1}, \mu_{x_2} \leq 10, \beta_j = 3, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (23)$$

该算例仅有两个证据设计变量 X_1 和 X_2 ,名义值为 μ_{x_1} 和 μ_{x_2} ,BPA 结构如表 1 所示.

表 2 列出了确定性设计, RBDO 和本文方法的计算结果. 可以看到,确定性设计结果的实际可信度 Bel 远低于目标可信度 0.99865,可见,确定性设计结果通常难以满足可靠度要求. RBDO 模型是将证

表 1 算例一证据变量/参数的 BPA 结构

Tab.1 BPA structure of evidence variables/parameters for example 1

X_1		X_2	
区间	BPA /%	区间	BPA /%
$[\mu_{x_1} - 0.90, \mu_{x_1} - 0.78]$	0.47	$[\mu_{x_1} + 0.06, \mu_{x_1} + 0.18]$	14.65
$[\mu_{x_1} - 0.78, \mu_{x_1} - 0.66]$	0.92	$[\mu_{x_1} + 0.18, \mu_{x_1} + 0.30]$	11.56
$[\mu_{x_1} - 0.66, \mu_{x_1} - 0.54]$	2.20	$[\mu_{x_1} + 0.30, \mu_{x_1} + 0.42]$	7.79
$[\mu_{x_1} - 0.54, \mu_{x_1} - 0.42]$	4.48	$[\mu_{x_1} + 0.42, \mu_{x_1} + 0.54]$	4.48
$[\mu_{x_1} - 0.42, \mu_{x_1} - 0.30]$	7.79	$[\mu_{x_1} + 0.54, \mu_{x_1} + 0.66]$	2.20
$[\mu_{x_1} - 0.30, \mu_{x_1} - 0.18]$	11.56	$[\mu_{x_1} + 0.66, \mu_{x_1} + 0.78]$	0.92
$[\mu_{x_1} - 0.18, \mu_{x_1} - 0.06]$	14.65	$[\mu_{x_1} + 0.78, \mu_{x_1} + 0.90]$	0.47
$[\mu_{x_1} - 0.06, \mu_{x_1} + 0.06]$	15.85	—	—

据变量转换为随机变量得到, 其中第 1 个约束的实际可信度 Bel 为 0.996 8, 小于 0.998 65. 可见, 直接求解等效 RBDO 的结果依旧不能满足目标可信度. 本文方法经过 6 次迭代后收敛, 所有约束均达到目标可信度, 最小目标函数值为 6.851 8. 为了直观理解, 图 4 绘制了 RBDO 结果和 EBDO 结果在同一个坐标

系中的位置. 可以看到, RBDO 和 EBDO 的最优解位置很近. 为了提高计算效率, 本文方法将先求解 RBDO, 并将其最优解作为 EBDO 的初始点. 这种策略用较少的功能函数调用次数能快速搜索到距离 EBDO 最优解较近的位置, 从而避免 EBDO 的中间迭代过程, 提高了计算效率.

表 2 算例一不同优化方法结果对比
Tab.2 The computational results of example 1

优化结果	X_1	X_2	$Bel(g_1)$	$Bel(g_2)$	$Bel(g_3)$	迭代次数	调用次数	目标函数值
确定性设计	3.113 9	2.062 6	0.381 5	0.441 4	1	—	45	5.176 5
RBDO	3.441 4	3.274 2	0.996 8	0.997 3	1	4	504	6.715 6
本文方法	3.492 5	3.359 3	0.998 8	0.999 1	1	6	2 028	6.851 8

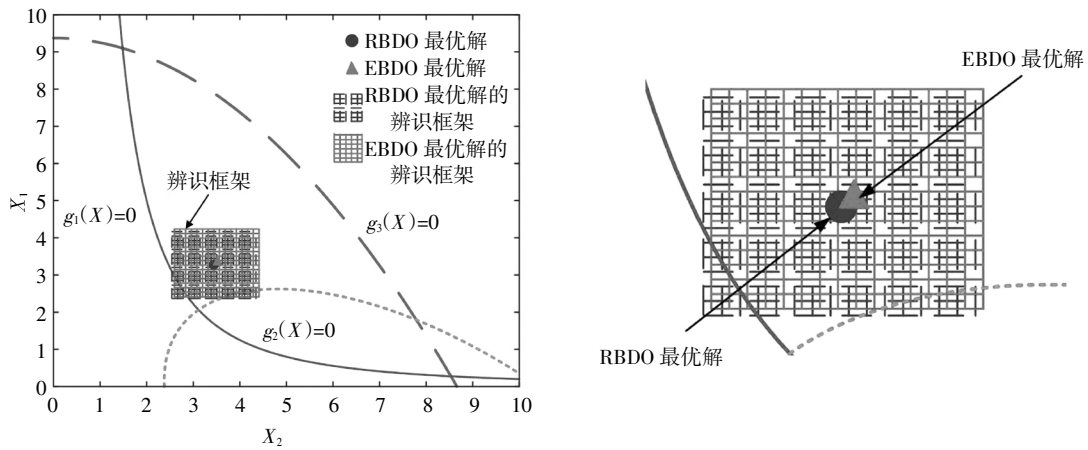


图 4 EBDO 和 RBDO 最优点对比
Fig.4 Comparison of EBDO and RBDO results

3.2 算例二

某悬臂梁如图 5 所示, 梁的长度为 L , 横截面宽度为 w , 高度为 t , 在自由端施加两个集中剪力 P_x 和 P_y . 设计目标是截面面积 S 最小, 设计约束有两个: 1) 固定端应力小于许用应力 y 的可信度为 0.998 65; 2) 自由端位移不超过许用位移 D_0 的可信度为 0.998 65. EBDO 模型如下:

$$\begin{aligned}
 \min_d S &= f(\mathbf{d}) = wt \\
 \text{s.t. } & Bel\{g_j(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) > 0\} \geq 0.998 65, j = 1, 2 \\
 g_1(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) &= y - \frac{6P_x L}{w^2 t} - \frac{6P_y L}{wt^2} \\
 g_2(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) &= D_0 - \frac{4L^3}{Ewt} \sqrt{\left(\frac{P_y}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{P_x}{w^2}\right)^2} \\
 1 &\leq w, t \leq 5
 \end{aligned} \tag{24}$$

式中: $D_0 = 2.5$ inch; $L = 100$ inch.

目标函数仅包含确定设计向量 $\mathbf{d} = [w, t]$, 不确定

性参数向量 $\mathbf{P} = [P_x, P_y, y, E]$ 包含 4 个证据变量, 其中 y 为屈服强度, E 为杨氏模量. 证据随机参数的 BPA 结构如表 3 所示.

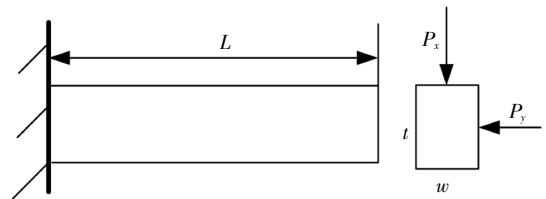


图 5 悬臂梁示意图
Fig.5 cantilever beam

表 4 为确定性设计、RBDO 方法、DIRECT 方法、EA-EBDO 方法和本文方法针对该问题的计算结果. 首先, 确定性设计和 RBDO 的结果没有达到目标可信度, 本文方法、DIRECT 和 EA-EBDO 采用证据理论的思想求解该问题, 均达到目标可信度. 其次, EA-EBDO 方法具有最高的精度, 最小目标函数值比

表 3 算例二证据变量/参数的 BPA 结构

Tab.3 BPA structure of evident variables/parameters for example 2

P_x/lb		$y/(10^3 \text{ psi})$		P_y/lb		$E/(10^6 \text{ psi})$	
区间	BPA/%	区间	BPA/%	区间	BPA/%	区间	BPA/%
[200,300]	2.2	[35,37]	6.1	[700,800]	2.2	[26.5,27.5]	10
[300,400]	13.6	[37,38]	9.2	[800,900]	13.6	[27.5,28.5]	21
[400,450]	15	[38,39]	15	[900,1 000]	34.1	[28.5,29]	13.5
[450,500]	19.2	[39,40]	19.2	[1 000,1 100]	34.1	[29,29.5]	13.5
[500,550]	19.2	[40,41]	19.2	[1 100,1 200]	13.6	[29.5,30.5]	21
[550,600]	15	[41,42]	15	[1 200,1 300]	2.4	[30.5,31.5]	21
[600,700]	13.6	[42,43]	9.2	—	—	—	—
[700,800]	2.2	[43,45]	6.1	—	—	—	—

注:由于该算例参考文献中使用英制单位,故本文也使用英制单位,psi 为磅力/平方英寸;lb 为磅。

表 4 算例二不同优化结果对比

Tab.4 The computational results of example 2

方法	迭代次数	调用次数	目标函数值	优化结果	Bel
确定性设计	—	42	7.668 1	(2.047 0,3.746 0)	(0.007 44,0.340 79)
RBDO	4	588	9.526 9	(2.469 9,3.857 2)	(0.856 72,1)
DIRECT	—	14 073	10.556	(2.529 8,4.172 6)	(0.999 97,1)
EA-EBDO	—	113 778	9.958	(2.414 2,4.124 6)	(0.998 65,1)
本文方法	7	5 230	10.601	(2.769 4,3.830 3)	(0.999 92,1)

DIRECT 和本文方法更小,特别地,本文方法仅比 EA-EBDO 的最小目标函数值大 6.5%。最后,对比几种方法的优化迭代次数和约束函数计算次数,本文方法计算效率高于 DIRECT 算法,计算量不到它的 40%。EA-EBDO 算法效率最低,计算量是本文方法的 20 多倍。通过比较 DIRECT 算法、EA-EBDO 算法和本文方法,可以确定本文方法能够兼顾精度和效率的平衡。

3.3 算例三

汽车正面碰撞是交通事故中导致乘员死亡的最主要因素。汽车发生正面碰撞时影响驾驶员及乘客安全的主要因素是防撞梁、吸能盒和前纵梁等部件的性能。目前,汽车行业评价汽车碰撞性能的主要指标包括前围板变形量、车门变形量、乘员加速度等。本算例进行正面碰撞安全的轻量化设计,约束包括 B 柱加速度、围板侵入量和车门变形量。

图 6 所示为某型轿车的正面有限元模型。设计向量 $X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ 代表保险杠、吸能盒内、外板和前纵梁内、外板的厚度。设计变量在汽车结构中的位置如图 6 所示。

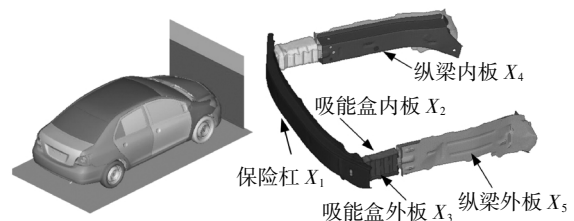


图 6 汽车正面碰撞有限元模型与设计变量
Fig.6 Finite element model and design variables of vehicle crashworthiness

根据汽车正面碰撞标准,取最大加速度峰值 45g,最大前围板侵入量 220 mm,车门变形量 20 mm。EBDO 模型构造如下:

$$\begin{aligned}
 & \min M(\mu_X) \\
 & \text{s.t. } \text{Bel}(a(X) \leq 45) \geq R' \\
 & \quad \text{Bel}(I_1(X) \leq 220) \geq R' \\
 & \quad \text{Bel}(I_2(X) \leq 20) \geq R' \\
 & \quad 2.0 \leq \mu_1 \leq 3.0, 1.0 \leq \mu_2, \mu_3 \leq 2.5 \\
 & \quad 1.5 \leq \mu_4, \mu_5 \leq 3.0 \tag{25}
 \end{aligned}$$

式中: $M(\mu_X)$ 为五个碰撞关键件的总质量; $a(X)$ 为 B 柱下端加速度; $I_1(X)$ 为前围板侵入量; $I_2(X)$ 为车门

变形量; R' 为目标可靠度; μ_X 是 X 的名义值向量, 其 BPA 结构如表 5 所示.

由于汽车正面碰撞有限元仿真十分耗时, 为实现参数化和计算方便, 本算例将结合拉丁超立方抽样法, 利用 Kriging 模型分别构建关键件总质量 $M(\mu_X)$ 、B 柱下端加速度峰值 $a(X)$ 、前围板侵入量 $I_1(X)$ 和车门变形量 $I_2(X)$ 的代理模型. 对有限元模型进行 36 次采样, 其中 30 组样本用于构建 Kriging 模型, 6 组样本点用以检验模型精度. 代理模型的精度检验结果如表 6 所示, 最大误差分别为 0.82%, 7.2%, 11%, 8.8%, 在可接受范围.

本算例针对目标可靠度为 90% 和 95% 两种情况, 分别进行证据理论可靠性设计优化, 结果如表 7 所示. 可见, 当目标可靠度从 90% 变为 95% 时, EBDO 的优化结果的设计变量和目标函数值也相应地变大, 表明随着实际可靠度的提高, 各碰撞关

键件厚度尺寸变大. 与初始设计对比, 当 $R' = 90%$, 采用本文方法使整车质量减少 9.76%; 当 $R' = 95%$, 整车质量减少 5.93%.

4 结论

基于证据理论的可靠性设计优化问题的求解是双层嵌套优化问题, 通常导致其在实际工程中应用需要大规模的计算量, 限制了证据理论可靠性设计方法的工程应用. 针对该问题, 本文提出了一种证据理论可靠性设计优化(EBDO)方法. 该方法首先将证据变量转换成概率变量, 构建等效的概率可靠性设计优化(RBDO)模型, 并使用 SORA 方法实现快速稳定的求解; 然后, 基于证据理论的可靠性分析求解约束的可信度, 构建近似移动矢量和确定性优化模型, 并求解新的设计点; 最终, 将 EBDO 的嵌套优化转换

表 5 算例三证据变量/参数的 BPA 结构

Tab.5 BPA structure of evidence variables/parameters $X_1 \sim X_5$ for example 3

X_1/mm	X_2/mm	X_3/mm	X_4/mm	X_5/mm	BPA
$[\mu_{X_1}-0.1, \mu_{X_1}-0.03]$	$[\mu_{X_2}-0.1, \mu_{X_2}-0.03]$	$[\mu_{X_3}-0.1, \mu_{X_3}-0.03]$	$[\mu_{X_4}-0.1, \mu_{X_4}-0.03]$	$[\mu_{X_5}-0.1, \mu_{X_5}-0.03]$	2%
$[\mu_{X_1}, -0.03, \mu_{X_1}]$	$[\mu_{X_2}, -0.03, \mu_{X_2}]$	$[\mu_{X_3}, -0.03, \mu_{X_3}]$	$[\mu_{X_4}, -0.03, \mu_{X_4}]$	$[\mu_{X_5}, -0.03, \mu_{X_5}]$	48%
$[\mu_{X_1}, \mu_{X_1}+0.03]$	$[\mu_{X_2}, \mu_{X_2}+0.03]$	$[\mu_{X_3}, \mu_{X_3}+0.03]$	$[\mu_{X_4}, \mu_{X_4}+0.03]$	$[\mu_{X_5}, \mu_{X_5}+0.03]$	48%
$[\mu_{X_1}+0.03, \mu_{X_1}+0.1]$	$[\mu_{X_2}+0.03, \mu_{X_2}+0.1]$	$[\mu_{X_3}+0.03, \mu_{X_3}+0.1]$	$[\mu_{X_4}+0.03, \mu_{X_4}+0.1]$	$[\mu_{X_5}+0.03, \mu_{X_5}+0.1]$	2%

表 6 Kriging 精度检验结果

Tab.6 The accuracy test results of the Kriging surrogate models

序号	$M(X)/\text{kg}$			$a(X)/g$			$I_1(X)/\text{mm}$			$I_2(X)/\text{mm}$		
	预测	仿真	误差	预测	仿真	误差	预测	仿真	误差	预测	仿真	误差
1	18.43	18.48	0.26%	46.26	46.69	0.4%	210.1	235.8	11%	18.33	18.40	0.4%
2	16.54	16.52	0.10%	46.64	44.75	4.1%	225.5	236.0	4.5%	17.99	17.28	4.1%
3	15.88	15.90	0.11%	45.96	45.04	8.1%	200.8	189.6	5.7%	18.28	17.84	8.1%
4	17.34	17.20	0.82%	45.98	44.06	5.7%	284.8	293.9	3.1%	22.69	21.46	5.7%
5	12.20	12.12	0.69%	46.49	50.10	5.0%	189.3	176.4	7.3%	19.25	20.26	5.0%
6	18.23	18.25	0.11%	46.82	45.07	8.8%	207.4	244.7	5.6%	18.23	20.00	8.8%

表 7 算例三设计变量优化结果

Tab.7 The computational results of example 3

	目标可靠度	设计变量 $X_1 \sim X_5$	$M(X)/\text{kg}$	$a(X)/g$	$I_1(X)/\text{mm}$	$I_2(X)/\text{mm}$
初始设计	—	(2.34, 1.89, 1.29, 1.84, 1.67)	14.33	46.19	194.76	17.08
EBDO	90%	(2.05, 1.64, 1.08, 1.74, 1.53)	13.01	44.91	212.49	19.72
	95%	(2.09, 1.74, 1.09, 1.87, 1.57)	13.57	44.78	208.53	19.53

成由近似 RBDO 求解与证据理论可靠性分析组成的序列迭代过程,从而高效地求解基于证据理论的设计优化问题.数值算例及工程应用验证了该方法能够实现计算效率与计算精度的较好平衡.后续研究中,我们将进一步改进此可靠性设计方法,并将其推广到含高维变量、较强相关性和较强非线性等特征的复杂工程问题.

参考文献

- [1] HASOFER A M, LIND N C. Exact and invariant second-moment code format [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1): 111—121.
- [2] RACKWITZ R, FLESSLER B. Structural reliability under combined random load sequences [J]. Computers & Structures, 1978, 9(5): 489—494.
- [3] HOHENBICHLER M, RACKWITZ R. Non-normal dependent vectors in structural safety [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1981, 107(6): 1227—1238.
- [4] KARL B. Asymptotic approximations for multinormal integrals [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1984, 110(3): 357—366.
- [5] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38: 325—339.
- [6] AGARWAL H, RENAUD J E, PRESTON E L, *et al.* Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 85(1): 281—294.
- [7] BERKAMPF W, HELTON J, SENTZ K. Mathematical representation of uncertainty [C]//19th AIAA Applied Aerodynamics Conference. Anaheim, CA: Reston, Virginia: AIAA, 2001: 1—23.
- [8] ZHANG Z, RUAN X X, DUAN M F, *et al.* An efficient epistemic uncertainty analysis method using evidence theory [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 339: 443—466.
- [9] ZHANG Z, JIANG C. Evidence-theory-based structural reliability analysis with epistemic uncertainty: a review [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63(6): 2935—2953.
- [10] KLIR G J. Generalized information theory: aims, results, and open problems [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 85(1/3): 21—38.
- [11] HOSE D, HANSS M. A universal approach to imprecise probabilities in possibility theory [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 133: 133—158.
- [12] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338—353.
- [13] BEN-HAIM Y. A non-probabilistic concept of reliability [J]. Structural Safety, 1994, 14(4): 227—245.
- [14] ELISHAKOFF I, ELISSEFF P, GLEGG S A L. Nonprobabilistic, convex-theoretic modeling of scatter in material properties [J]. AIAA Journal, 1994, 32(4): 843—849.
- [15] JIANG C, HAN X, LU G Y, *et al.* Correlation analysis of non-probabilistic convex model and corresponding structural reliability technique [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(33/34/35/36): 2528—2546.
- [16] DU X P, CHEN W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design [J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(2): 225—233.
- [17] TU J, CHOI K K, PARK Y H. A new study on reliability-based design optimization [J]. Journal of Mechanical Design, 1999, 121(4): 557—564.
- [18] DUBOURG V, SUDRET B, BOURINET J M. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(5): 673—690.
- [19] MOURELATOS Z P, ZHOU J. A design optimization method using evidence theory [J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4): 901—908.
- [20] SRIVASTAVA R K, DEB K. An EA-based approach to design optimization using evidence theory [C]//Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation - GECCO '11. Dublin, Ireland. New York: ACM Press, 2011: 1139—1146.
- [21] ALYANAK E, GRANDHI R, BAE H R. Gradient projection for reliability-based design optimization using evidence theory [J]. Engineering Optimization, 2008, 40(10): 923—935.
- [22] AGARWAL H, RENAUD J E, PRESTON E L, *et al.* Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 85(1/2/3): 281—294.
- [23] YAO W, CHEN X Q, OUYANG Q, *et al.* A reliability-based multidisciplinary design optimization procedure based on combined probability and evidence theory [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(2): 339—354.
- [24] SALEHGHAFFARI S, RAIS-ROHANI M, MARIN E B, *et al.* Optimization of structures under material parameter uncertainty using evidence theory [J]. Engineering Optimization, 2013, 45(9): 1027—1041.
- [25] HUANG Z L, JIANG C, ZHANG Z, *et al.* A decoupling approach for evidence-theory-based reliability design optimization [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2017, 56(3): 647—661.
- [26] HUANG Z L, JIANG C, ZHANG Z, *et al.* Evidence-theory-based reliability design optimization with parametric correlations [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 60(2): 565—580.
- [27] 苏瑜, 唐和生, 薛松涛, 等. 基于证据理论的结构非概率可靠性拓扑优化设计 [J]. 中国科学: 技术科学, 2019, 49(3): 320—330.
- [28] SU Y, TANG H S, XUE S T, *et al.* Approach of non-probabilistic reliability topology optimization using evidence theory [J]. Scientia Sinica Technologica, 2019, 49(3): 320—330. (In Chinese)
- [29] 李晓斌, 张为华, 王中伟. 基于证据理论的固体火箭发动机不确定性设计 [J]. 火箭与制导学报, 2006, 26(s6): 420—422.
- [30] LI X B, ZHANG W H, WANG Z W. Uncertainty design of solid rocket motor using evidence theory [J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2006, 26(s6): 420—422. (In Chinese)
- [31] HU S Y, LUO J. Uncertainty quantification for structural optimal design based on evidence theory [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2015, 20(3): 338—343.
- [32] 唐和生, 苏瑜, 薛松涛, 等. 结构可靠性优化设计的证据理论和微分演化方法 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, 41(4): 33—38.
- [33] TANG H S, SU Y, XUE S T, *et al.* A method of reliability design optimization using evidence theory and differential evolution [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2014, 41(4): 33—38. (In Chinese)
- [34] 姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法 [J]. 力学学报, 2013, 45(1): 103—115.
- [35] JIANG C, ZHANG Z, HAN X, *et al.* An evidence-theory-based reliability analysis method for uncertain structures [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(1): 103—115. (In Chinese)