

Timoshenko 梁的第二频谱分析

夏桂云[†]

(长沙理工大学 土木工程学院,湖南 长沙,410114)

摘要:推导 Timoshenko 梁振动微分方程的初参数解,结合边界条件,建立简支梁的频率方程.当固有频率小于临界频率时,频率方程有双曲正弦函数与三角正弦函数之积的因式,当固有频率大于临界频率时,此因式变成双三角正弦函数之积,此即 Timoshenko 梁产生第二频谱的理论原因.推导出等截面等跨径的 2~3 跨连续 Timoshenko 梁的频率方程,并从理论上预测存在第二频谱现象的其他结构.建立了简支 Timoshenko 梁第一、二频谱的频率计算公式.通过实例验证第二频谱的存在.通过微分方程求解,论证了临界频率是结构固有频率的有效组成部分,其对应的竖向位移模态无振幅、转角位移模态的振幅为常数;指出数值分析时,由于计算机截断误差的影响,所预测的临界频率有误差、所对应的竖向位移模态为不规则模态等特点.

关键词:频率分析;临界频率;第二频谱;Timoshenko 梁

中图分类号:TU375

文献标志码:A

Analysis on the Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beam

XIA Guiyun[†]

(School of Civil Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

Abstract: Incorporating the boundary conditions, initial parameter solutions of vibration differential equations for Timoshenko beam are used to derive the frequency equation of a simply-supported beam. When the natural frequency is less than the critical frequency, the frequency equation can be factorized into the hyperbolic sine function and the trigonometric sine function, while, when the natural frequency is greater than the critical frequency, the frequency equation can be factorized into double trigonometric sine functions, which is the crucial reason for the existence of the second frequency spectrum. Frequency equations for two-span and three-span continuous Timoshenko beams with uniform cross sections and equal spans are derived. Other structures with the second frequency spectrum are forecasted theoretically. The formulas for the first and second frequencies are deduced for simply-supported Timoshenko beam. The existence of the second frequency spectrum is confirmed through the examples. Through solving the differential equation of motion, the critical frequency is proven to be an efficient part of the natural frequencies for the framed structures. The corresponding mode shape of the critical frequency contributes to the displacement mode shape with zero amplitude and rotation mode shape with constant amplitude. Due to the truncation error of the computer, the criti-

* 收稿日期:2020-09-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51278072), National Natural Science Foundation of China(51278072); 国家留学基金委资助项目(201808430114), China Scholarship Council(201808430114); 湖南省教育厅重点项目(18A131), Key Project of Education Department of Hunan Province(18A131)

作者简介:夏桂云(1972—),男,湖南湘阴人,长沙理工大学教授,博士(后)

[†] 通信联系人, E-mail: xiagy72@163.com

cal frequency predicted by the finite element method shows error, and the mode shape of the displacement is very irregular.

Key words: frequency analysis; cutoff frequency; second frequency spectrum; Timoshenko beam

梁的弯曲振动是土木^[1]、机械、石油、化工、航空航天等领域的重要问题,已有多种理论.最早、最经典的理论是 Euler 梁模型,该模型考虑了梁的弯曲和截面惯性力,适应于细长杆系结构的分析计算,但对高跨比较大的深梁结构,存在静力问题计算挠度偏小^[2]、动力问题高估振动频率和有无限阶次频率^[3]等不足. Elishakoff 等^[4]评述 Rayleigh 梁考虑了截面转动惯量的影响,对 Euler 梁进行改进. Shear 梁模型考虑结构弯曲、剪切变形的影响和截面惯性力,但没有考虑截面转动惯量影响(此模型不同于一般的不考虑结构弯曲的简单剪切梁模型和纯剪切梁模型^[5]). 1921 年 Timoshenko^[6-7]综合考虑截面弯曲和剪切变形、惯性力和转动惯量的影响,提出经典的 Timoshenko 梁模型,该模型保留梁的平截面假定,放弃直法线假定,通过引入截面剪切修正系数来弥补剪切本构关系方面的不足(假定截面剪应力不均匀、剪应变均匀)^[8-9]. 相比于 Euler 梁、Rayleigh 梁和 Shear 梁, Timoshenko 梁有显著进步,提高了计算精度,扩大了应用范围,杆系结构的静力、动力和稳定问题都可基于 Timoshenko 梁理论进行分析^[1]. 但该理论颇具争议,至今仍众说纷纭的第二频谱问题^[10-12]和截面剪切修正系数定义问题^[8,13-15],还有振动微分方程解耦后存在挠度关于时间四阶导数项,其物理意义不明确的问题,因此其后出现众多的修正理论. 1927 年 Love^[16]根据梁段微元体平衡,提出 Timoshenko 梁的修正模型,即忽略挠度关于时间四阶导数项,可称为 Love 梁. 陈镛等^[17]采用双挠度理论也推导出了与 Love 梁相同的微分方程,并认为导致 Timoshenko 梁模型中出现挠度关于时间四阶导数项的原因是,没有考虑剪切转角的转动惯量,如果舍弃挠度关于时间四阶导数项,则可考虑截面剪切转角的转动惯量影响. Elishakoff 等^[18-19]同样导出了与 Love 梁相同的微分方程,并认为此理论比 Timoshenko 梁理论更一致、更简单,其命名为截断 Timoshenko 梁. Love 梁虽然形式比 Timoshenko 梁简化,微分方程求解方便,但是其没有对应的能量泛函,不能通过变分原理导出,也没有对应的有限元列式. Xia 等^[20]研究了考虑截面

剪切变形和全转动惯量影响的 Timoshenko 梁振动特性,证明此种 Timoshenko 梁修正理论无第二频谱问题和结构固有频率有界特性.

Timoshenko 梁的第二频谱现象是指一种振型对应两个固有频率. 两端简支、两端导向和简支-导向的单跨 Timoshenko 梁,多跨连续的等截面等跨径 Timoshenko 梁都存在第二频谱现象. Traill-Nash^[21]于 1953 年最先发现和报道简支 Timoshenko 梁存在第二频谱现象,相继得到 Anderson^[22]、Dolph^[23]等学者的确认,但也有学者^[24-27]认为第二频谱没有物理意义而应舍弃. 有些学者^[4,28]则认为结构的振型包括了竖向变形和转角,如果将变形和转角同等看待,则振幅不一致的振型不能认为是同一振型,因此也就不存在第二频谱问题. 现在越来越多的实验测试结果^[29-32]证实了第二频谱现象不仅存在,而且实验测试的结构固有频率与 Timoshenko 梁理论预测结果符合较好,因此没有理由草率地去否定、甚至舍弃第二频谱. 本文试图对 Timoshenko 梁第二频谱产生的原因进行理论解释,以期提高结构模态识别精度,促进以模态叠加法等为基础的动力分析方法的发展,谋求在 Timoshenko 梁第二频谱问题上取得共识.

1 Timoshenko 梁振动的理论解析

Timoshenko 梁振动的微分方程^[1,2,20]求解采用分离变量法,设竖向位移 $w(x)$ 分解为竖向位移函数 $W(x)$ 和时间函数 $T(t)$,如下:

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t) \quad (1)$$

式中: $T(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$

则解耦后的振动微分方程为:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \omega^2 \left(\frac{\rho I}{D} + \frac{\rho A}{C} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(\frac{\rho A \cdot \rho I \cdot \omega^4}{D \cdot C} - \frac{\rho A \omega^2}{D} \right) W = 0 \quad (2)$$

式中: $D = EI$ 、 $C = \mu GA$, A 、 I 和 μ 分别为截面的面积、抗弯惯性矩和剪切修正系数; E 、 G 和 ρ 分别为材料的弹性模量、剪切模量和密度; ω 为结构的圆频率.

Timoshenko 梁振动存在临界频谱 (或称为移频频率, 其定义为 $\omega_c = \sqrt{C/\rho l}$), 式 (2) 可根据结构固有频率 ω 与临界频率 ω_c 的大小关系有 3 种解.

1) 固有频率小于临界频率时 ($\omega < \omega_c$)

此时结构的竖向变形、转角、剪力和弯矩用初参数 (即 $x = 0$ 时的 W_0, ψ_0, Q_0, M_0) 表示为:

$$\begin{cases} W(x) = a_1(x)W_0 + b_1(x)\psi_0 + c_1(x)Q_0 + d_1(x)M_0 \\ \psi(x) = a_2(x)W_0 + b_2(x)\psi_0 + c_2(x)Q_0 + d_2(x)M_0 \\ Q(x) = a_3(x)W_0 + b_3(x)\psi_0 + c_3(x)Q_0 + d_3(x)M_0 \\ M(x) = a_4(x)W_0 + b_4(x)\psi_0 + c_4(x)Q_0 + d_4(x)M_0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, 波数定义为:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{-\left(\frac{\rho l}{D} + \frac{\rho A}{C}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} - \frac{\rho A}{C}\right)^2 + \frac{4\rho A}{D\omega^2}}} \\ \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} + \frac{\rho A}{C}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} - \frac{\rho A}{C}\right)^2 + \frac{4\rho A}{D\omega^2}}} \end{cases}$$

相关系数定义为:

$$\gamma = \alpha \left[1 + \frac{\rho A \omega^2}{C\alpha^2} \right], \varphi = \beta \left[1 - \frac{\rho A \omega^2}{C\beta^2} \right] \quad (4)$$

式 (3) 振型函数 $a_i(x), b_i(x), c_i(x), d_i(x), i = 1, 2, 3, 4$, 详见文献[2, 20], 为节约篇幅不再列出.

2) 固有频率大于临界频率时 ($\omega > \omega_c$)

此时结构的竖向变形、转角、剪力和弯矩仍可用式 (3) 表示, 但波数、相关系数和振型函数需另行定义. 波数定义为:

$$\begin{cases} \alpha' = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} + \frac{\rho A}{C}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} - \frac{\rho A}{C}\right)^2 + \frac{4\rho A}{D\omega^2}}} \\ \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} + \frac{\rho A}{C}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho l}{D} - \frac{\rho A}{C}\right)^2 + \frac{4\rho A}{D\omega^2}}} \end{cases} \quad (5)$$

相关系数定义为:

$$\gamma' = \alpha \left[1 - \frac{\rho A \omega^2}{C\alpha^2} \right], \varphi = \beta \left[1 - \frac{\rho A \omega^2}{C\beta^2} \right] \quad (6)$$

振型函数 $a_i(x), b_i(x), c_i(x), d_i(x), i = 1, 2, 3, 4$ 的具体表达式与文献[20]一致.

3) 固有频率等于临界频率时 ($\omega = \omega_c$)

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{\rho A}{EI} + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho l}{EI} + \frac{\rho A}{\mu GA}\right) - \sqrt{\left[\frac{\rho A}{EI} + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho l}{EI} + \frac{\rho A}{\mu GA}\right)\right]^2 - 4\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{\rho l \cdot \rho A}{EI \cdot \mu GA}}}{\frac{2 \cdot \rho l \cdot \rho A}{EI \cdot \mu GA}}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{\rho A}{EI} + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho l}{EI} + \frac{\rho A}{\mu GA}\right) + \sqrt{\left[\frac{\rho A}{EI} + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{\rho l}{EI} + \frac{\rho A}{\mu GA}\right)\right]^2 - 4\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \frac{\rho l \cdot \rho A}{EI \cdot \mu GA}}}{\frac{2 \cdot \rho l \cdot \rho A}{EI \cdot \mu GA}}} \end{cases} \quad (11)$$

微分方程退化为:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (7)$$

式中: 波数退化为 $\alpha = 0, \beta = \sqrt{\frac{A}{I} + \frac{C}{D}}$.

对于常规杆系结构, 如果采用 Timoshenko 梁单元进行结构的自由振动分析, 可得到一固有频率与临界频率非常接近, 位移振型较特别的模态, 此模态说明临界频率是结构频谱的有效组成部分, 其详细讨论在本文第 5 节进行.

2 简支梁的第二频谱现象

对于两端简支的 Timoshenko 梁, 当 $\omega < \omega_c$ 时, 由边界条件知: 当 $x = 0$ 时, $W_0 = M_0 = 0$; 当 $x = L$ 时, $W_L = M_L = 0$, 得到频率方程为

$$\sinh(\alpha L) \sin(\beta L) = 0 \quad (8)$$

结构固有频率解为 $\sin(\beta L) = 0$, 即 $\beta = k_i \pi / L, k = 1, 2, 3, \dots, k_c$. 此时结构仅有一支固有频率. 此支频率的最大个数为:

$$k_c = \text{int} \left(\frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{A}{I} + \frac{C}{D}} \right) \quad (9)$$

当 $\omega > \omega_c$ 时, 同理可推导频率方程为:

$$\sin(\alpha' L) \sin(\beta L) = 0 \quad (10)$$

结构固有频率解为 $\sin(\alpha' L) = 0$ 或 $\sin(\beta L) = 0$, 对应解为 $\alpha' = n\pi / L (n = 1, 2, 3, \dots)$ 或 $\beta = k\pi / L (k = k_c + 1, k_c + 2, \dots)$ 结构有 2 支固有频谱.

当 $k = n$ 时, 结构振型相同 (振幅归一化处理), 但频率不同, 即一种振型对应两种固有频率, 出现第二频谱现象. 频率方程式 (10) 出现两支解是简支 Timoshenko 梁存在第二频谱的理论原因.

由于简支 Timshenko 梁的竖向振型都呈正弦波形式, 含有 k 个半波正弦的振型所对应的第一、第二频率见式 (11).

利用式 (11) 即可快速确定振型和第一、二频谱.

3 存在第二频谱现象的其他结构

当固有频率从小于临界频率变化到大于临界频率时, 如果频率方程有形如简支 Timoshenko 梁的变化规律, 则在理论上存在第二频谱现象. 有此特征的结构有两端导向(竖向位移活动、转角固定)单跨 Timoshenko 梁、简支-导向单跨 Timoshenko 梁、等截面等跨径的多跨连续 Timoshenko 梁等.

3.1 单跨 Timoshenko 梁的频率方程

两端导向单跨 Timoshenko 梁、简支-导向单跨 Timoshenko 梁的频率方程如表 1 所示.

表 1 两端导向和简支-导向的单跨 Timoshenko 梁频率方程

Tab.1 Frequency equations of one-span Timoshenko beam with guided-guided and hinged-guided ends

边界条件	频率方程($\omega < \omega_c$)	频率方程($\omega > \omega_c$)
两端导向	$\sinh(\alpha L)\sin(\beta L) = 0$	$\sin(\alpha' L)\sin(\beta L) = 0$
简支-导向	$\cosh(\alpha L)\cos(\beta L) = 0$	$\cos(\alpha' L)\cos(\beta L) = 0$

从表 1 可以看出, 两端导向和简支-导向的单跨 Timoshenko 梁, 其频率方程随固有频率的变化都有如两端简支的单跨 Timoshenko 梁的特征, 因此也存在第二频谱现象.

3.2 等截面等跨径的多跨连续 Timoshenko 梁

利用式(3)建立传递矩阵法, 可推导等跨径等截面的多跨连续 Timoshenko 梁的频率方程.

1) 等截面等跨径的二跨连续 Timoshenko 梁

当 $\omega < \omega_c$ 时:

$$\sinh(\alpha L)\sin(\beta L)(\varphi\sinh(\alpha L)\cos(\beta L) - \gamma\cosh(\alpha L)\sin(\beta L)) = 0 \quad (12)$$

当 $\omega > \omega_c$ 时:

$$\sin(\alpha' L)\sin(\beta L)(\varphi\sin(\alpha' L)\cos(\beta L) - \gamma'\cos(\alpha' L)\sin(\beta L)) = 0 \quad (13)$$

2) 等截面等跨径的三跨连续 Timoshenko 梁

当 $\omega < \omega_c$ 时:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha L)\sin(\beta L)\{\sinh(\alpha L)\sin(\beta L)[2\gamma\varphi - \\ &2\gamma\varphi\cosh(\alpha L)\sin(\beta L) + (\gamma^2 - \varphi^2)\sinh(\alpha L)\sin(\beta L)] + \\ &3[\varphi\sinh(\alpha L)\cos(\beta L) - \gamma\cosh(\alpha L)\sin(\beta L)]^2\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

当 $\omega > \omega_c$ 时:

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha' L)\sin(\beta L)\{\sin(\alpha' L)\sin(\beta L)[2\gamma'\varphi - \\ &2\gamma'\varphi\cos(\alpha' L)\sin(\beta L) - (\gamma'^2 - \varphi^2)\sin(\alpha' L)\sin(\beta L)] + \\ &3[\varphi\sin(\alpha' L)\cos(\beta L) - \gamma'\cos(\alpha' L)\sin(\beta L)]^2\} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

由式(12)~式(15)可知, 等截面等跨径的二跨、三跨连续 Timoshenko 梁中, 其频率方程中的第一个因式形如式(8)、式(10), 因此理论上也存在第二频谱现象, 其振动模态为单跨简支 Timoshenko 梁的振动模态在多跨连续结构中反对称扩展. 对于等截面等跨径的多于三跨的连续 Timoshenko 梁, 频率方程中同样存在形如式(8)、式(10)的因式和变化规律, 因此理论上也存在第二频谱问题, 但频率方程过于复杂, 此处不再列出其具体表达式. 对于等截面但跨径不等的多跨连续 Timoshenko 梁, 当跨径比满足每跨内有整数半波的振动条件时, 也同样存在第二频谱现象. 由于跨数、跨径比、波长等参数变化过多, 频率方程推导复杂, 一般只能进行数值分析和验证.

4 算例验证

两端简支单跨 Timoshenko 梁计算跨径 10 m, 横截面为 1.0 m(宽)×1.8 m(高)的矩形截面, 其剪切修正系数为 5/6, 材料弹性模量为 200 GPa、剪切模量为 80 GPa, 材料密度为 7 850 kg/m³. 结构前 50 阶频率的理论值(根据式(8)、式(10)求解)和 Ansys 数值结果如图 1 所示, 无量纲波数 α (即 $\alpha L/\pi$)、无量纲波数 β (即 $\beta L/\pi$)值如图 2 所示.

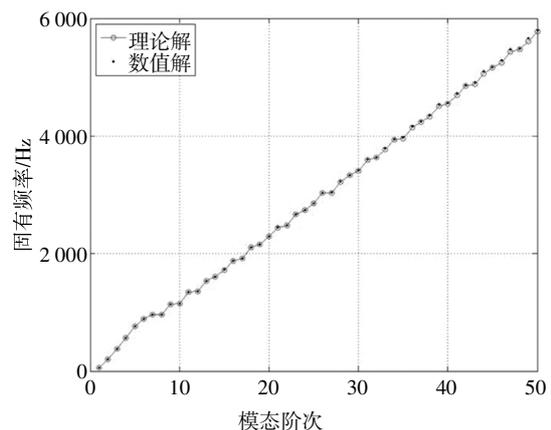


图 1 前 50 阶频率值比较

Fig.1 The comparison of the first 50 frequencies

从图 1 可以看出, 结构前 50 阶频率的理论结果与利用 Ansys 软件计算^[33]的数值结果(结构划分为 200 个单元、Beam3 单元)符合较好, 最大误差不超过 0.97%. 图 2 中, 无量纲波数 $\alpha L/\pi$ 、 $\beta L/\pi$ 如果取整数

k (图2图标有填充时为整数,空心时为小数),其对应于含有 k 个正弦半波的振型,此振型有 2 个固有频率.根据式(11),结构第一频谱的第 1、2 阶振动频率、无量纲波数和所对应的第二频谱的第 1、2 阶(按固有频率排序,其对应振型为第 8、9 阶振型)振动频率、无量纲波数如表 2 所示,即结构的第 1 阶和第 8 阶、第 2 阶和第 9 阶振动模态为频谱对.

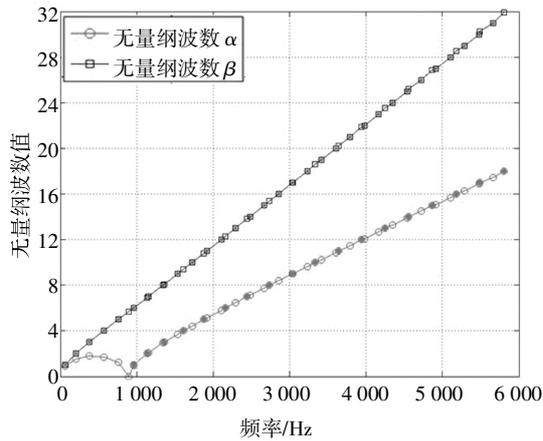


图2 前 50 阶无量纲波数值

Fig.2 The first 50 dimensionless wave numbers

表 2 结构前二阶振动频率和无量纲波数值
Tab.2 The first and second frequencies and dimensionless wave numbers

第一频谱				第二频谱			
模态阶次	频率值 /Hz	$\frac{\alpha L}{\pi}$	$\frac{\beta L}{\pi}$	模态阶次	频率值 /Hz	$\frac{\alpha' L}{\pi}$	$\frac{\beta L}{\pi}$
第 1 阶	59.715	0.926	1.000	第 8 阶	962.221	1.000	6.018
第 2 阶	202.641	1.533	2.000	第 9 阶	1134.223	2.000	6.907

将振型归一化后,第一频谱的第 1、2 阶振型和所对应的第二频谱振型第 1、2 阶振型(对应振型为第 8、9 阶振型)的位移振型、转角振型如图 3、图 4 所示.

从图 3、图 4 可以看出,将振型归一化后,第一频谱的第 1、2 模态与第二频谱的第 1、2 阶模态完全相同,验证了两端简支的单跨 Timoshenko 梁存在第二频谱现象.

简支-导向单跨 Timoshenko 梁第一频谱的第 1、2 阶模态与第二频谱的第 1、2 阶模态(对应于第 7、8 阶模态)的位移、转角模态如图 5、图 6 所示.

从图 5、图 6 可以看出,将模态归一化后,简支-导向的单跨 Timoshenko 梁第一频谱的第 1、2 模态与第二频谱的第 1、2 阶模态完全相同,同样存在第二频谱现象.

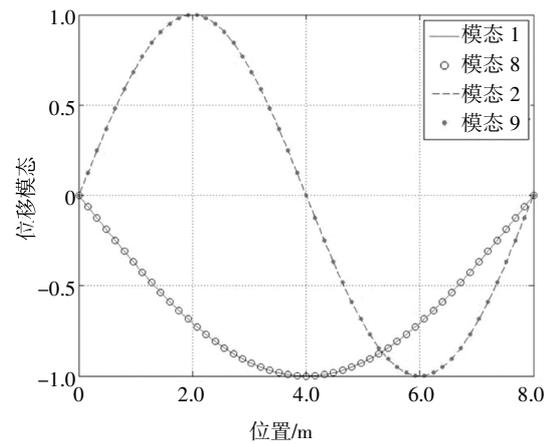


图 3 简支-简支梁的第 1、2 阶位移模态图

Fig.3 The first and second displacement modes of hinged-hinged Timoshenko beam

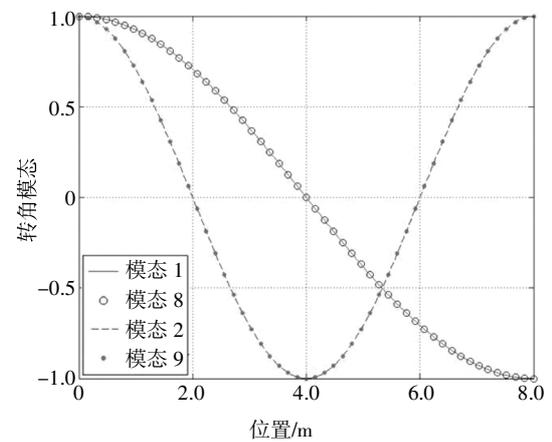


图 4 简支-简支梁的第 1、2 阶转角振型图

Fig.4 The first and second rotation modes of hinged-hinged Timoshenko beam

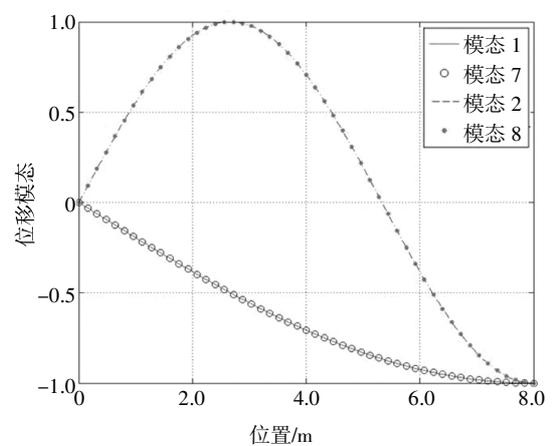


图 5 简支-导向 Timoshenko 梁第 1、2 阶位移模态

Fig.5 The first and second displacement modes of hinged-guided Timoshenko beam

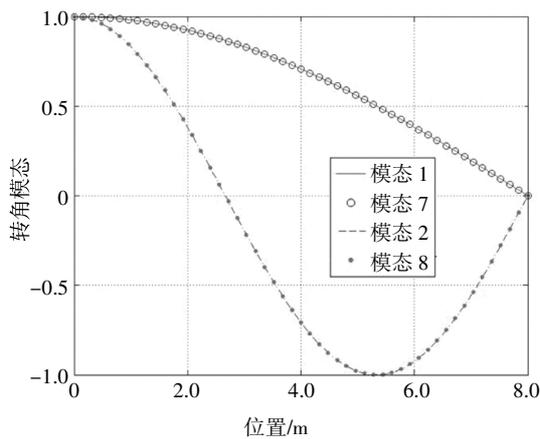


图 6 简支-导向 Timoshenko 梁第 1、2 阶转角模态
Fig.6 The first and second rotation modes of hinged-guided Timoshenko beam

5 临界频率的振型分析

临界频率将 Timoshenko 梁的振动分析为两区段的 3 种特例,其分界点即为临界频率. 临界频率是结构频谱的有效组成部分,但其对应的模态非常特别,是 Euler 梁、Love 梁、Shear 梁所没有的,需要特别分析. 本文以简支 Timoshenko 梁为例进行模态的理论分析.

5.1 临界频率所对应的模态特点

当结构固有频率等于临界频率时,微分方程式(7)的解^[24-25]为:

$$\begin{cases} W(x)=A_1\cos(\beta x)+B_1\sin(\beta x)+C_1+D_1x \\ \psi(x)=a_1\cos(\beta x)+b_1\sin(\beta x)+c_1+d_1x \end{cases} \quad (16)$$

根据 Timoshenko 梁的平衡方程要求,有:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\rho A \omega^2}{D} W \quad (17)$$

式(16)解中,待定系数间存在如下关系:

$$a_1 = \frac{C}{\beta D} \cdot B_1, b_1 = -\frac{C}{\beta D} \cdot A_1, D_1 = 0, d_1 = \frac{A}{I} \cdot C_1 \quad (18)$$

将待定参数代入微分方程(7)的解中,有

$$\begin{cases} W(x)=A_1\cos(\beta x)+B_1\sin(\beta x)+C_1 \\ \theta(x)=A_1\frac{C}{\beta D}\cos(\beta x)-A_1\frac{C}{\beta D}\sin(\beta x)+c_1+C_1\frac{A}{I}x \\ Q(x)=-A_1\frac{AC}{\beta I}\sin(\beta x)+B_1\frac{AC}{\beta I}\cos(\beta x)-C_1\frac{A}{I}x-c_1 \cdot C \\ M(x)=B_1C\sin(\beta x)+A_1C\cos(\beta x)-C_1\frac{AD}{I} \end{cases} \quad (19)$$

引入简支边界条件,即 $W(0)=M(0)=0$,得 $A_1=C_1=0$; $W(L)=M(L)=0$,得:

$$B_1\sin(\beta L)=0, B_1C\sin(\beta L)=0 \quad (20)$$

一般条件下 $\sin(\beta L) \neq 0$,故 $B_1=0$,有

$$W(x)=0, \theta(x)=c_1, Q(x)=c_1 \cdot C, M(x)=0 \quad (21)$$

此时结构振动为一种特殊模态,只有截面转动振动且振幅恒定,而竖向位移振动无振幅.

如果结构的跨径满足 $\sin(\beta L) = 0$,即 $L = k\pi/\beta$ ($k=1, 2, 3, \dots, \infty$),则 $B_1 \neq 0$,结构则为有幅振动,此时结构的模态为:

$$W(x)=B_1\sin(\beta x), \theta(x)=B_1C\cos(\beta x)/\beta D+c_1 \quad (22)$$

5.2 临界模态特征的有限元预测

利用有限元软件进行杆系结构的固有频率、振型分析时,如果采用 Timoshenko 梁单元,则可捕捉到临界频率和临界模态.但是有限元将自由振动分析转为特征值问题,由于计算机存在截断误差,会预报与临界频率理论值极为接近的频率值,所对应的竖向位移模态未能如理论预测那样为无振幅振动,而是有幅振动且不规则,但转角位移模态振幅恒定.如本文上述算例,采用 Ansys 软件计算的临界频率(结构划分为 200 个单元、Beam3 单元)为 892.675 Hz、理论计算值为 892.602 Hz. 竖向位移和转角位移模态如图 7、图 8 所示.

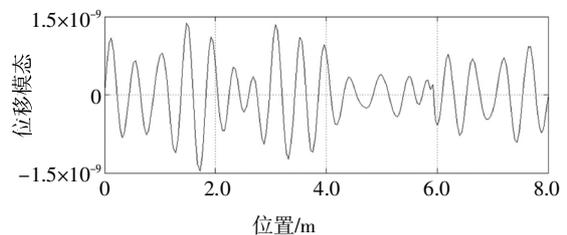


图 7 临界频率对应的位移模态的 Ansys 结果
Fig.7 Displacement mode of the critical frequency predicted by Ansys

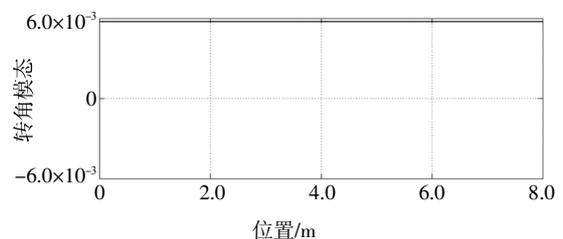


图 8 临界频率对应的转角模态的 Ansys 结果
Fig.8 Rotation mode of the critical frequency predicted by Ansys

从图 7 可以看出,竖向位移模态(自由振动分析所对应的特征向量)最大振幅为 $1.467 4 \times 10^{-9}$,与其他模态振幅相比小 6 个数量级,因此可以认为此模

态的振幅理论上应为0,但由于计算机截断误差的原因,出现一些不为0的伪数据,构成振幅无规律的模态,理应舍弃.从图8可以看出,转角位移模态则与理论预测一致,为振幅恒定的模态.

6 结论

通过建立 Timoshenko 梁振动的初参数解,利用此解对 Timoshenko 梁第二频谱现象进行了理论研究.由于临界频率将结构的固有频率分为三部分,使得微分方程所对应的特征方程根与临界频率有关,其性质随固有频率发生变化,从而使得其频率方程有形如式(8)、式(10)的变化规律,当固有频率大于临界频率时,频率方程式(10)有两支解,即第二频谱产生的根本原因.

1)所有频率方程(或者频率方程中的因式)有形如式(8)、式(10)变化特征的结构,都存在第二频谱现象,如两端简支、两端导向、简支-导向的单跨 Timoshenko 梁,等截面等跨径多跨连续 Timoshenko 梁、满足每跨内有整数半波振型的等截面不等跨径多跨连续 Timoshenko 梁等.

2)理论和数值分析表明,临界频率是 Timoshenko 梁结构固有频率的有效组成部分.临界频率所对应的模态有无振幅竖向位移振型、有恒定振幅的转角位移振型;在特殊条件下,如跨径满足 $L = k\pi/\beta$ (k 为整数)条件,临界模态也可转化为竖向位移有振幅的模态.

3)利用 Timoshenko 梁单元进行杆系结构振动的有限元分析时,能预测与临界频率极为接近的固有频率、振幅非常小且无规则的竖向位移模态.此时应将固有频率视为临界频率、竖向位移模态视为无振幅模态,出现误差的原因是计算机的截断误差所引起.

4)Timoshenko 梁的第二频谱现象目前有不同的观点,但是此现象已被众多实验所证实,也能从理论上进行解释和分析,不应轻言其不合理而舍弃,而应通过更多研究或者提出更合理的深梁结构理论来验证.

参考文献

[1] 张玲,欧强,朱幸仁.成层地基中考虑桩桩相互作用的双排桩受

力变形分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2020,47(11):120—126.

ZHANG L,OU Q,ZHU X R. Analysis on forced deformation of double row piles considering pile-pile interaction in layered foundation [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2020,47(11):120—126. (In Chinese)

[2] 夏桂云,李传习.考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用[M].北京:人民交通出版社,2008:1—5.

XIA G Y,LI C X. Frame structure theory and its applications including the shear deformation effect [M]. Beijing:China Communications Press,2008:1—5. (In Chinese)

[3] BOTTEGA W J. Engineering vibrations [M]. Boca Raton:CRC Press,2006:511—675.

[4] ELISHAKOFF I,KAPLUNOV J,NOLDE E. Celebrating the centenary of Timoshenko's study of effects of shear deformation and rotary inertia[J]. Applied Mechanics Reviews,2015,67(6):060802.

[5] HAN S M,BENAROYA H,WEI T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories [J]. Journal of Sound and Vibration,1999,225(5):935—988.

[6] TIMOSHENKO S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars [J]. Philosophical Magazine,1921,41(6):744—746.

[7] TIMOSHENKO S P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section [J]. Philosophical Magazine,1922,43(253):125—131.

[8] COWPER G R. The shear coefficients in Timoshenko's beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics,1966,33:335—340.

[9] 胡海昌.弹性力学的变分原理与应用[M].北京:科学出版社,1983:139—147.

HU H C. Variational principles in elasticity and applications[M]. Beijing:Science Press,1981:139—147. (In Chinese)

[10] STEPHEN N G. The second spectrum of Timoshenko beam theory—Further assessment[J]. Journal of Sound and Vibration,2006,292:372—389.

[11] CAZZANI A,STOCHINO F,TURCO E. On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part I: a theoretical revisit [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik,2016,67(2):article 24(1—30).

[12] CAZZANI A,STOCHINO F,TURCO E. On the whole spectrum of Timoshenko beams. Part II: further applications[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik (ZAMP),2016,67(2):article 25(1—21).

[13] STEPHEN N G. Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading [J]. Journal of Applied Mechanics,1980,47(1):121—127.

[14] HUTCHINSON J R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics,2001,68(1):87—92.

[15] 王乐,王亮.一种新的计算 Timoshenko 梁截面剪切系数的方法[J].应用数学和力学,2013,34(7):756—763.

WANG L,WANG L. A new method of obtaining Timoshenko's

- shear coefficients [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(7): 756—763. (In Chinese)
- [16] LOVE A E. A treatise on the mathematical theory of elasticity[M]. New York:Dover, 1927:314—331.
- [17] 陈镛, 万春风, 薛松涛, 等. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2005, 33(6): 711—715.
CHEN R, WAN C F, XUE S T, *et al.* Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect [J]. *Journal of Tongji University*, 2005, 33(6): 711—715. (In Chinese)
- [18] ELISHAKOFF I. An equation both more consist and simpler than the Bresse–Timoshenko equation. In: Gilat R; Sills–Banks L (editors), *Advances in mathematical modeling and experimental methods for materials and structures* [M] Berlin: Springer, 2010: 249—254.
- [19] ELISHAKOFF I, HACHE F, CHALLAMEL N. Critical contrasting of three versions of vibrating Bresse–Timoshenko beam with a crack [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, 109: 143—151.
- [20] XIA G Y, SHU W Y, STANCIULESCU I. Analytical and numerical studies on the slope inertia–based Timoshenko beam [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 473: 115227.
- [21] TRAILL–NASH R W, COLLAR A R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams [J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1953, 6(2): 186—222.
- [22] ANDERSON R A. Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1953, 20(4): 504—510.
- [23] DOLPH C L. On the Timoshenko theory of transverse beam vibration [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1954, 12(2): 175—187.
- [24] BHASHYAM G R, PRATHAP G. The second frequency spectrum of Timoshenko beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 76(3): 407—420.
- [25] STEPHEN N G, PUCHEGGER S. On the valid frequency range of Timoshenko beam theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 297(3–5): 1082—1087.
- [26] CHERVYAKOV A M, NESTERENKO V V. Is it possible to assign physical meaning to field theory with higher derivatives? [J]. *Physical Review D*, 1993, 48(12): 5811.
- [27] NESTERENKO V V. A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, 57(4): 669—677.
- [28] LEVINSON M, COOKE D W. On the two frequency spectra of Timoshenko beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1982, 84(3): 319—326.
- [29] DÍAZ–DE–ANDA A, FLORES J, GUTIÉRREZ L, *et al.* Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(26): 5732—5744.
- [30] MONSIVAIS G, DÍAZ–DE–ANDA A, FLORES J, *et al.* Experimental study of the Timoshenko beam theory predictions: Further results [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 375: 187—199.
- [31] TORRES–GUZMÁN J C, DÍAZ–DE–ANDA A, OTERO J A, *et al.* On the warping of the extreme ends of a beam under flexural oscillations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 435: 234—245.
- [32] BRØNS M, THOMSEN J J. Experimental testing of Timoshenko predictions of supercritical natural frequencies and mode shapes for free–free beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 459: 114856.
- [33] 邓露, 李树征, 淡丹辉, 等. 桥梁动态称重技术在中小跨径混凝土梁桥上的适用性研究 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2020, 47(3): 89—96.
DENG L, LI S Z, DAN D H, *et al.* Study on applicability of bridge weigh–in–motion technology in short–to medium–span concrete girder bridges [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2020, 47(3): 89—96. (In Chinese)