

# 一种含 $n$ 层 X 形结构隔振器动力学特性研究

朱冬梅<sup>1</sup>, 刘伟<sup>1</sup>, 刘海平<sup>1†</sup>, 史志远<sup>2</sup>, 贺凯<sup>2</sup>

(1. 北京科技大学 机械工程学院, 北京 100083;

2. 安标国家矿用产品安全标志中心有限公司, 北京 100013)

**摘要:**针对含 1 层 X 形结构的三参数隔振器谐振频率会向高频移动的问题, 提出一种新型含  $n$  层 X 形结构隔振器. 采用谐波平衡法建立新型隔振系统动态响应的解析模型, 并将解析解与时域数值解和多体动力学软件 Adams 得到的仿真数据进行对比, 验证了所建含  $n$  层 X 形结构隔振器模型的正确性. 基于建立的模型, 通过计算对比了新型隔振器与传统两参数隔振器、三参数隔振器、含 1 层 X 形结构隔振器的力传递率曲线, 得出含  $n$  层 X 形结构隔振器可以进一步降低谐振处的峰值, 且谐振频率比向低频发生移动. 经过研究得出影响含  $n$  层 X 形结构隔振器性能的主要参数为阻尼比、初始夹角、刚度比, 与激励力幅值以及杆长无关; 进一步分析了阻尼比、初始夹角、刚度比对隔振系统传递特性的影响, 得出通过选择合适的设计参数, 可以使含  $n$  层 X 形结构隔振器在谐振频率的峰值进一步减小, 且在高频处的隔振性能保持不变.

**关键词:** 隔振器; 谐振频率;  $n$  层; X 形结构; 谐波平衡法

**中图分类号:** TB123; TH113.1

**文献标志码:** A

## Analysis on Dynamic Performance of a Vibration Isolator with $n$ -layer X-shaped Structure

ZHU Dongmei<sup>1</sup>, LIU Wei<sup>1</sup>, LIU Haiping<sup>1†</sup>, SHI Zhiyuan<sup>2</sup>, HE Kai<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;

2. Mining Products Safety Approval and Certification Center Co., Ltd, Beijing 100013, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the resonant frequency of a three-parameter vibration isolator with a layer X-shaped structure will move to high frequencies, a new type of  $n$ -layer X-shaped structure isolator is proposed. Firstly, the harmonic balance method is used to establish the analytical model of the dynamic response of the new vibration isolation system, and the analytical solution is compared with the simulation data obtained by the time-domain numerical solution and the multi-body dynamics software ADAMS to verify the correctness of the built-up model of the isolator with an  $n$ -layer X-shaped structure. Based on the established model, the force transmissibility curves of, as well as the traditional two-parameter vibration isolator, traditional three-parameter vibration isolator, and a layer X-shaped structure vibration isolator, are calculated and compared. It is concluded that the proposed vibration isolator with  $n$ -layer X-shaped structure can further reduce the peak at resonance, and the resonance frequency ratio

\* 收稿日期: 2021-01-26

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(51405014), National Natural Science Foundation of China(51405014); 安标国家矿用产品安全标志中心科技创新基金项目(2019ZL004, 2019ZL005), Anbiao National Mining Product Safety Mark Center Science and Technology Innovation Fund Project(2019ZL004, 2019ZL005)

**作者简介:** 朱冬梅(1978—), 女, 河北衡水人, 北京科技大学副教授, 博士

† 通信联系人, E-mail: liuhaiping@ustb.edu.cn

moves to lower frequency region. At the same time, the main parameters that affect the performance of the X-shaped structure with  $n$ -layers are the damping ratios, the initial angle, the stiffness ratios, which are independent of the excitation force amplitude and the rod length. Furthermore, the influence of the damping ratios, the initial angle and the stiffness ratios on the transmission characteristics of the vibration isolation system is further analyzed. The peak at resonance frequency of the vibration isolator with an  $n$ -layer X-shaped structure is further reduced when choosing proper design parameters around the resonance frequency, while the dynamic performance is not changed in high-frequency region.

**Key words:** vibration isolator; resonance frequency;  $n$ -layer; X-shaped structure; harmonic balance method

为了解决传统两参数隔振器高频隔振性能较差的问题,三参数隔振器(Zener 或 Ruzicka 表征模型)应运而生.三参数隔振器系统可调性强,在高频区域传递衰减率为 $-40$  dB/dec,振动抑制效果更明显<sup>[1-2]</sup>.因此,具备良好隔振性能三参数隔振器广泛应用于振动工程隔振系统中<sup>[3-7]</sup>.早期,Ruzicka<sup>[8]</sup>分别建立了包含黏性阻尼以及库伦阻尼的三参数隔振器模型,研究了该隔振器模型在受迫振动下的动态响应;Jerome<sup>[9]</sup>给出三参数隔振器的传递率并讨论了部分参数的相关性;Davis 等<sup>[10]</sup>将三参数阻尼器应用到卫星隔振平台并介绍了其工作原理;楼京俊等<sup>[11]</sup>利用能量守恒定律建立了 Ruzicka 抗冲系统模型并在某些参数域具备更加优良的抗冲击性能;王超新等<sup>[12]</sup>设计了一种基于最优参数的三参数隔振器.

近年,国内外学者致力于探索可以改善三参数隔振器减隔振性能的方法,并提出许多新型的改进三参数隔振器模型. Shi 等<sup>[13]</sup>提出一种四参数 Zener 模型,极大地改善了高频段的减隔振性能;Deharo silva 等<sup>[14]</sup>利用非线性立方刚度弹簧替换主弹簧,其传递率在谐振频率以及高频处得到了显著改善;Wang 等<sup>[15]</sup>利用非线性立方刚度弹簧替换与阻尼元件串联的辅助弹簧,其传递率在谐振频率以及高频处同样得到了改善;从这两种模型的分析结果可知,在三参数隔振器中引入非线性立方刚度可以改善该隔振器在谐振频率以及高频处的减隔振性能.

为了改善非线性隔振器的刚度与阻尼特性,越来越多的含 X 形结构的隔振器相继出现. Liu 等<sup>[16-17]</sup>提出一种混合型杠杆式隔离系统,可实现超低频隔振,并具有可调共振频率和低频传递率;Bian 等<sup>[18]</sup>提出一种含被动水平阻尼的 X 形隔振系统模型,该系统可实现谐振频率阻尼被放大,其他频段阻尼未发生变化的效果;Jing 等<sup>[19]</sup>采用多层 X 形结构提出

一种新型隔振装置,可以显著减缓工程机械对操作人员的振动损伤. 刘国勇等<sup>[20]</sup>首次提出一种基于嵌套式 X 形结构的高阻尼隔振器,可大幅度提高系统输出阻尼. Liu 等<sup>[21]</sup>基于传统的三参数隔振器模型,建立了含 1 层 X 形结构隔振器模型,该隔振器有效抑制隔振系统谐振频段的动态响应,且保证在高频区域的隔振性能不变.

X 形结构可以进一步改善隔振系统的动态特性,但其谐振频率会向高频移动,由此,本文将多层 X 形结构加入传统三参数隔振器,提出一种含  $n$  层 X 形结构的隔振器模型. 采用谐波平衡法获得隔振系统稳态解的解析表达式,利用四阶龙格-库塔法对其进行数值验证;随后利用多体动力学软件 Adams 建立该隔振系统仿真模型,进一步验证所建理论模型的正确性. 将含  $n$  层 X 形结构的隔振器与传统两参数隔振器、传统三参数隔振器以及含 1 层 X 形结构隔振器进行分析对比. 研究表明,含  $n$  层 X 形结构隔振器不仅可以降低谐振幅值,并且谐振频率比向低频发生移动,同时,保持高频减隔振性能不变. 本文研究为今后开展新型隔振器设计提供了参考.

## 1 含 $n$ 层 X 形结构隔振器理论模型

图 1 给出含  $n$  层 X 形结构的隔振器模型. 与传统三参数隔振器模型相比,在辅助弹簧  $K_b$  与基础之间安装了  $n$  层 X 形结构,将辅助弹簧  $K_c$  并联阻尼元件  $C_a$  沿水平轴  $y$  方向安装到最底层的 X 形结构中.

模型中,分别给出隔振器受负载作用前后的状态示意图. 其中,在负载重力作用下,隔振器处于静平衡状态用实线表示.  $n$  层 X 形结构由多根刚性杆铰接而成;与辅助弹簧  $K_b$  下端以及基础铰接的是长度为  $l$  的刚性杆,其余是长度为  $2l$  的刚性杆; $\theta_i$  为刚

性杆与水平轴  $y$  的初始夹角; 当隔振器受到外部激励力  $F_e$  的作用时, 将  $\varphi$  定义为刚性杆与水平轴  $y$  的夹角变化量; 定义  $x$  轴正方向为垂直向上,  $y$  轴正方向为水平向右. 由于本文的重点为运动机理研究, 即考虑 X 形结构、层数变化对隔振器动态特性的影响, 故暂未考虑杆的质量、惯性和铰接处的摩擦作用.

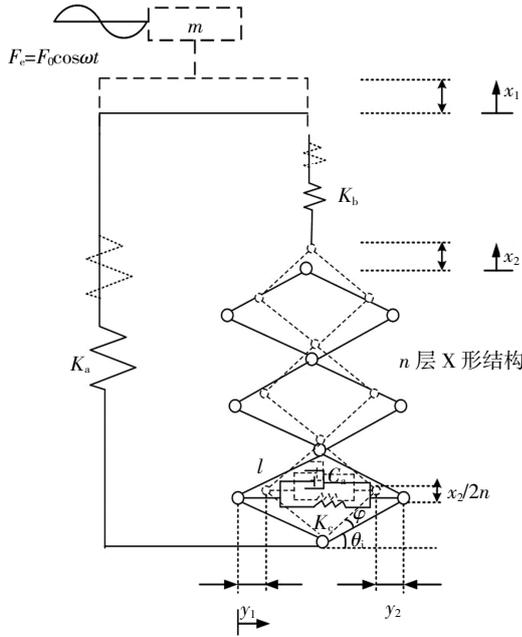


图 1 含  $n$  层 X 形结构的隔振器模型  
Fig.1 Isolator model with  $n$ -layer X-shaped structure

在图 1 所示力学模型中, 受到外部激励力时, 得到系统沿  $x$  轴方向的振动微分方程:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K_a x_1 + K_b (x_1 - x_2) = F_e \quad (1a)$$

$$K_b (x_1 - x_2) = [K_c (y_1 - y_2) + C_a (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)] \tan(\phi + \theta) \quad (1b)$$

式中:  $m$  为惯性质量;  $x_1, x_2$  分别为惯性质量和刚性杆活动铰接点的纵向位移;  $y_1$  和  $y_2$  分别为刚性杆活动铰接点的水平位移;  $\dot{y}_1$  和  $\dot{y}_2$  则为相应的水平速度.

由 X 形结构的几何关系可得:

$$\tan(\phi + \theta) = \frac{l \sin \theta_i + x_2 / 2n}{l \cos \theta_i - y_1} \quad (2a)$$

$$y_1 = l \cos \theta_i - \sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2} \quad (2b)$$

$$y_1 = -y_2 \quad (2c)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{2} \frac{l \sin \theta_i + x_2 / 2n}{\sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}} \frac{dx_2}{dt} \quad (2d)$$

联立式(1)和式(2), 得到:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K_a x_1 + K_b (x_1 - x_2) = F_e \quad (3a)$$

$$K_b (x_1 - x_2) = 2K_c (l \cos \theta_i - \sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}) \times \frac{l \sin \theta_i + x_2 / 2n}{\sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}} + C_a \frac{dx_2}{dt} \frac{(l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2} \quad (3b)$$

### 1.1 解析计算

对式(3)进行化简:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K_a x_1 + K_b (x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (4a)$$

$$K_b (x_1 - x_2) = 2K_c (l \cos \theta_i - \sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}) \times \frac{l \sin \theta_i + x_2 / 2n}{\sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}} + C_a \frac{dx_2}{dt} \frac{(l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2} \quad (4b)$$

通过定义函数  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  来简化计算:

$$f_1(x_2) = 2K_c (l \cos \theta_i - \sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}) \times \frac{l \sin \theta_i + x_2 / 2n}{\sqrt{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}} \quad (5a)$$

$$f_2(x_2) = \frac{(l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2}{l^2 - (l \sin \theta_i + x_2 / 2n)^2} \quad (5b)$$

这里将函数  $f_1(x_2)$  和  $f_2(x_2)$  考虑为在  $x_2 = 0$  处连续, 且在  $x_2 = 0$  处对式(5)进行二阶泰勒级数展开, 可得:

$$\begin{cases} f_1(x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 \\ f_2(x_2) = \beta_3 + \beta_4 x_2 + \beta_5 x_2^2 \end{cases} \quad (6)$$

式中的系数可表示为:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0, \beta_1 = \frac{K_c}{n} \tan^2 \theta_i, \beta_2 = \frac{3}{4} \frac{K_c}{n^2 l} \frac{\sin \theta_i}{\cos^4 \theta_i}, \\ \beta_3 &= \tan^2 \theta_i, \beta_4 = \frac{1}{nl} \frac{\sin \theta_i}{\cos^4 \theta_i}, \beta_5 = \frac{1+3 \sin^2 \theta_i}{4n^2 l \cos^4 \theta_i} \end{aligned} \quad (7)$$

将式(6)代入式(4), 得到:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + K_a x_1 + K_b (x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t \quad (8a)$$

$$K_b (x_1 - x_2) = K_c \left( \frac{K_c}{n} \tan^2 \theta_i x_2 + \frac{3}{4} \frac{K_c}{n^2 l} \frac{\sin \theta_i}{\cos^4 \theta_i} x_2^2 \right) + C_a \frac{dx_2}{dt} \left( \tan^2 \theta_i + \frac{1}{nl} \frac{\sin \theta_i}{\cos^4 \theta_i} + \frac{1+3 \sin^2 \theta_i}{4n^2 l \cos^4 \theta_i} \right) \quad (8b)$$

对式(8)中的参数进行无量纲化处理:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_a}{m}}, \tau = \omega_n t, \gamma_1 = \frac{K_c}{K_a}, \gamma_2 = \frac{K_b}{K_a}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n},$$

$$u_1 = \frac{x_1}{l}, u_2 = \frac{x_2}{l}, \zeta = \frac{C_a}{2\sqrt{mK_a}}, f_0 = \frac{F_0}{m\omega_n^2 l}.$$

式中:  $f_0$  为无量纲激励力;  $\omega_n$  为隔振器固有频率;  $\tau$  为

无量纲时间;  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  分别为隔振器的水平、竖直刚度比;  $\zeta$  为水平阻尼比;  $\Omega$  为频率比;  $u_1$  和  $u_2$  为无量纲长度。

将无量纲化处理的参数代入式(8)得:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{d\tau^2} + (1+\gamma_2)u_1 - \gamma_2 u_2 = f_0 \cos \Omega \tau \\ 2\zeta \left( \tan^2 \theta_i + \frac{\sin \theta_i}{n \cos^4 \theta_i} u_2 + \frac{1+3\sin^2 \theta_i}{4n^2 \cos^6 \theta_i} u_2^2 \right) \frac{du_2}{d\tau} + \\ \left( \frac{\gamma_1 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 \right) u_2 + \frac{3}{4n^2} \frac{\sin \theta_i}{\cos^4 \theta_i} \gamma_1 u_2^2 - \gamma_2 u_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式(9)的稳态响应近似解可通过谐波平衡法求解得出,并假设其稳态解为:

$$\begin{cases} u_1 = u_{10} \cos(\Omega \tau + \beta) \\ u_2 = u_{20} \cos(\Omega \tau + \psi) \end{cases} \quad (10)$$

式中:  $u_{10}$ 、 $u_{20}$  分别为惯性质量块与刚性杆活动铰接点的位移幅值。在这里,将系统的稳态响应频率考虑为和外部激励力频率相同。在实际中,受外部激励作用振动系统的响应中,除了基频还存在其他频率的谐波,但是,与外部激励频率相同的基频为主要部分,故式(10)满足系统的非线性特性。

将式(10)代入式(9),为了便于计算,将高次项略掉可得:

$$\begin{cases} -\Omega^2 u_{10} \cos(\Omega \tau + \beta) + (1+\gamma_2)u_{10} \cos(\Omega \tau + \beta) - \\ \gamma_2 u_{20} \cos(\Omega \tau + \psi) = f_0 \cos \Omega \tau \\ -2\zeta \Omega u_{20} \tan^2 \theta_i \sin(\Omega \tau + \psi) + \\ \left( \frac{\gamma_1 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 \right) u_{20} \cos(\Omega \tau + \psi) - \\ \gamma_2 u_{10} \cos(\Omega \tau + \beta) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

假设式(11)的展开式两侧一次谐波项系数相等,可得:

$$(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10} \cos \beta - \gamma_2 u_{20} \cos \psi = f_0 \quad (12a)$$

$$-(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10} \sin \beta + \gamma_2 u_{20} \sin \psi = 0 \quad (12b)$$

$$-2\Omega u_{20} \zeta \tan^2 \theta_i \sin \psi + \left( \frac{\gamma_1 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 \right) \times \\ u_{20} \cos \psi - \gamma_2 u_{10} \cos \beta = 0 \quad (12c)$$

$$-2\Omega u_{20} \zeta \tan^2 \theta_i \cos \psi - \left( \frac{\gamma_1 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 \right) \times \\ u_{20} \sin \psi + \gamma_2 u_{10} \sin \beta = 0 \quad (12d)$$

分离式(12a)中的  $\cos \psi$  和  $\cos \beta$ , 可得:

$$\cos \psi = \frac{(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10} \cos \beta - f_0}{\gamma_2 u_{20}} \quad (13a)$$

$$\cos \beta = \frac{\gamma_2 u_{20} \cos \psi + f_0}{(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10}} \quad (13b)$$

分离式(12b)中的  $\sin \psi$  和  $\sin \beta$ , 可得:

$$\sin \psi = \frac{(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10} \sin \beta}{\gamma_2 u_{20}} \quad (14a)$$

$$\sin \beta = \frac{\gamma_2 u_{20} \sin \psi}{(1+\gamma_2-\Omega^2)u_{10}} \quad (14b)$$

引入  $a$ 、 $b$ 、 $c$  对公式进行简化。

$$a = 2\Omega \zeta \tan^2 \theta_i, b = (1+\gamma_2-\Omega^2), c = \left( \frac{\gamma_1 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 \right).$$

将式(13b)代入式(12c), 得到:

$$-a u_{20} \sin \psi + \left( c - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{b} \right) u_{20} \cos \psi = \frac{f_0 \gamma_2}{b} \quad (15)$$

将式(14b)代入式(12d)中, 得到:

$$-a \cos \psi - \left( c - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{b} \right) \sin \psi = 0 \quad (16)$$

将式(13a)和式(14a)代入式(15), 得到:

$$-\frac{a b u_{10}}{\gamma_2} \sin \beta + \left[ \frac{b c}{\gamma_2} - \gamma_2 \right] u_{10} \cos \beta = \frac{f_0 c}{\gamma_2} \quad (17)$$

将式(13a)和式(14a)代入式(16), 得到:

$$-\frac{a b u_{10}}{\gamma_2} \cos \beta - \left[ \frac{b c}{\gamma_2} - \gamma_2 \right] u_{10} \sin \beta = \frac{a f_0}{\gamma_2} \quad (18)$$

联立式(15)和式(16), 得到:

$$(-a u_{20} \tan^2 \theta_i)^2 + \left[ c u_{20} - \frac{\gamma_2^2 u_{20}}{b} \right]^2 = \left( \frac{f_0 \gamma_2}{b} \right)^2 \quad (19)$$

联立式(17)和式(18), 得到:

$$\left[ -\frac{a b u_{10}}{\gamma_2} \right]^2 + \left[ \frac{b c u_{10}}{\gamma_2} - \gamma_2 u_{10} \right]^2 = \left( \frac{a f_0}{\gamma_2} \right)^2 + \left[ \frac{c f_0}{\gamma_2} \right]^2 \quad (20)$$

由式(19)和式(20), 得到位移幅频响应:

$$u_{10} = f_0 \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{[-ab]^2 + [bc - \gamma_2^2]^2}} \quad (21)$$

$$u_{20} = \frac{f_0 \gamma_2}{\sqrt{[-ab]^2 + [bc - \gamma_2^2]^2}} \quad (22)$$

由式(15)和式(16), 得到位移相频响应:

$$\psi = \arccos \left[ \frac{\frac{f_0 \gamma_2 \tan^2 \theta_i}{n} + \gamma_2 - \frac{\gamma_2^2}{b}}{u_{20} (1+\gamma_2-\Omega^2) \left[ a^2 + \left( c - \frac{\gamma_2^2}{b} \right)^2 \right]} \right] \quad (23)$$

将式(23)代入式(13b), 得到:

$$\beta = \arccos \left[ \frac{f_0 + \gamma_2 u_{20} \cos \psi}{(1+\gamma_2)u_{10} - \Omega^2 u_{10}} \right] \quad (24)$$

## 1.2 隔振性能

为了评估含  $n$  层 X 形结构隔振器的隔振性能, 并与传统两参数隔振器、传统三参数隔振器、含 1 层 X 形结构隔振器进行对比研究, 采用力传递率作为隔振器隔振性能的评价指标。力传递率定义为传递到基础上的力幅值和外部激励力幅值之比, 即

$$T = 201 \lg \left( \frac{f_r}{f_0} \right) \quad (25)$$

式中:  $f_0$  为外部激励力;  $T$  为含  $n$  层 X 形结构隔振器

的力传递率;  $f_{tr}$  为通过含  $n$  层 X 形结构隔振器传递到基础上的力。

其中, 通过含  $n$  层 X 形结构隔振器传递到基础的力为:

$$f_{tr} = \sqrt{f_0^2 + (-u_{10}\Omega^2)^2 - 2f_0(-u_{10}\Omega^2)\cos\beta} \quad (26)$$

## 2 验证与对比分析

### 2.1 数值验证

为了便于对比分析, 选取水平、竖直刚度比分别为  $\gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 3$ , 主弹簧刚度  $K_a = 2000 \text{ N/m}$ , 水平轴  $y$  与刚性杆的初始夹角  $\theta_i = 60^\circ$ , 刚性杆长度  $l = 0.1 \text{ m}$ , 负载质量  $m = 1 \text{ kg}$ , 阻尼系数  $\zeta = 0.01$ , 外部激励力幅值  $F_0 = 1 \text{ N}$ , X 形结构层数  $n = 3$ 。

本文选取 20 s 的计算时间, 在定频激励下, 利用四阶龙格-库塔法得到含  $n$  层 X 形结构隔振器的数值解, 并选取稳态解的最大值为响应幅值并归一化处理, 得到位移响应幅频曲线如图 2 所示。其中, “NS”表示数值解, “AS”表示解析解。可以看出, 解析解与数值解结果曲线吻合良好, 从而验证了本文求解过程及稳态解的正确性。

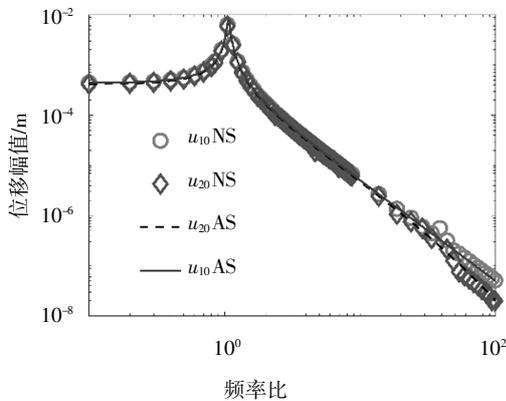


图 2 数值解与解析解对比

Fig.2 Comparison between numerical solution and analytical solution

### 2.2 Adams 仿真实验

为了进一步验证所建模型及解析解的正确性, 在多体动力学软件 Adams 中建立含  $n$  层 X 形结构隔振器模型。计算结果如图 3 所示, 可见, 两种方法所得计算结果曲线吻合良好。

由多体动力学软件 Adams 计算得到力传递率如图 4 所示, 可以看出, 由这两种方法得到的结果曲线吻合非常好。

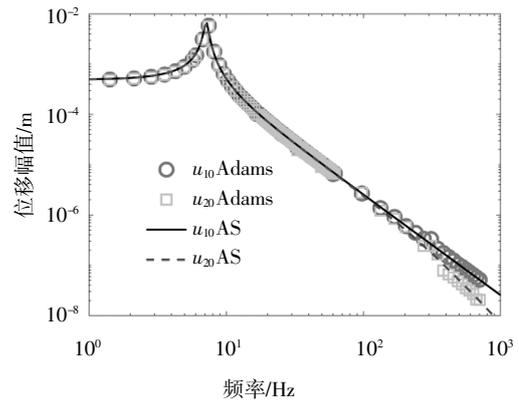


图 3 Adams 仿真解与解析解对比

Fig.3 Comparison between simulation solution by using Adams and analytical solution

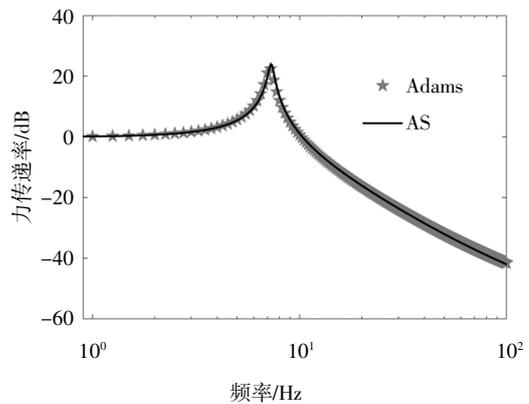


图 4 Adams 和解析模型对应力传递率曲线

Fig.4 Force transmissibility curves corresponding to Adams and analytical model

### 2.3 等效阻尼系数分析

相比于线性隔振器, 含  $n$  层 X 形结构隔振器的等效阻尼恢复力为:

$$F_e = C_a \frac{du_{20}}{d\tau} \left( \tan^2\theta_i + \frac{1}{nl} \frac{\sin\theta_i}{\cos^4\theta_i} u_{20} + \frac{1+3\sin^2\theta_i}{4n^2l^2\cos^6\theta_i} u_{20}^2 \right) \quad (27)$$

式(27)对  $u_{20}$  进行求导可得该隔振器的等效阻尼系数:

$$C = C_a \left( \tan^2\theta_i + \frac{1}{nl} \frac{\sin\theta_i}{\cos^4\theta_i} u_{20} + \frac{1+3\sin^2\theta_i}{4n^2l^2\cos^6\theta_i} u_{20}^2 \right) \quad (28)$$

式中:  $C$  为含  $n$  层 X 形结构隔振器的等效阻尼系数。由式(28)可知, 等效阻尼系数是关于  $u_{20}$  的二次函数, 因此不再分析  $u_{20}$  对等效阻尼系数的影响。仅对设计参数  $C_a$  和  $\theta_i$  进行分析。暂定, 阻尼系数  $C_a$  的取值为  $0 \sim 5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , 初始倾角的取值为  $45^\circ \sim 85^\circ$ , 由式(28)可得出这两个参数对等效阻尼系数的影响规律。

由图 5 可知, 含  $n$  层 X 形结构隔振器的等效阻

尼系数随着设计参数  $C_a$  和  $\theta_i$  的增大呈非线性增大的规律,且当  $C_a$  和  $\theta_i$  达到最大值时,等效阻尼系数也达到最大。

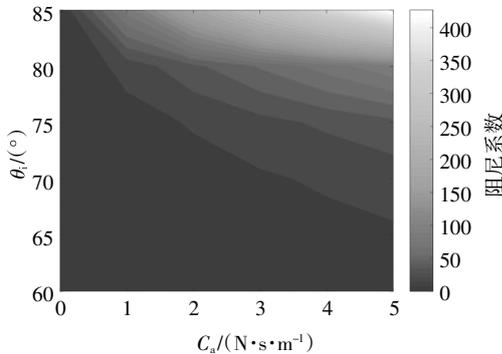


图5 不同阻尼系数和初始倾角对应的等效阻尼系数  
Fig.5 Equivalent damping coefficient corresponding to different damping coefficients and initial inclination angles

### 2.4 与其他隔振器模型对比分析

在选用相同设计参数的条件下,将含  $n(n=3,5)$  层 X 形结构隔振器与传统两参数隔振器、传统三参数隔振器以及含 1 层 X 形结构隔振器的力传递率曲线进行对比。在这里,设计参数取  $K_a=2\ 000\ \text{N/m}$ ,  $\gamma_1=0.05$ ,  $\gamma_2=3$ ,  $\theta_i=60^\circ$ ,  $l=0.1\ \text{m}$ ,  $m=1\ \text{kg}$ ,  $\zeta=0.01$ ,  $F_0=1\ \text{N}$ 。

从图 6 中可以看出,传统三参数隔振器和含 X 形结构隔振器在高频区域的减隔振性能都比传统两参数隔振器好。三参数隔振器中引入具有几何非线性的 1 层 X 形结构会增大谐振频率处的阻尼且谐振幅值得到显著降低,并且在高频处其力传递率曲线不受影响。但是,受到 X 形结构中水平辅助弹簧的影响,其谐振频率比向高频移动,表明系统刚度有所损失。考虑在三参数隔振器中添加  $n(n=3,5)$  层 X 形结构,可以发现其谐振峰值会随着层数的增加而减小,且谐振频率比向低频发生移动。这表明,含  $n$  层 X 形结构的隔振器具备更加优良的减隔振性能。其中,考虑到节约经济成本且能满足良好的减隔振性能原则,需要尽可能减少杆件的使用,由于含 5 层 X 形结构隔振器与含 3 层 X 形结构隔振器的力传递率曲线相近,故 X 形结构的层数为 3 时存在最优值。

为了证明由图 6 所得结论的可靠性与稳定性,另外随机取两组设计参数比较这些隔振器的减隔振性能。

第 1 组设计参数为  $K_a=1\ 500\ \text{N/m}$ ,  $\gamma_1=0.01$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\theta_i=50^\circ$ ,  $l=0.2\ \text{m}$ ,  $m=1.5\ \text{kg}$ ,  $\zeta=0.03$ ,  $F_0=1.5\ \text{N}$ 。含  $n(n=3,5)$  层 X 形结构隔振器与传统两参数隔振器、传统三参数隔振器以及含 1 层 X 形结构隔振器的力传递率曲线如图 7 所示。

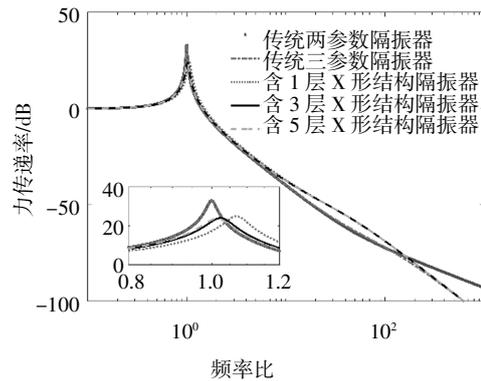


图6 与其他隔振器模型对比  
Fig.6 Comparison with other isolator models

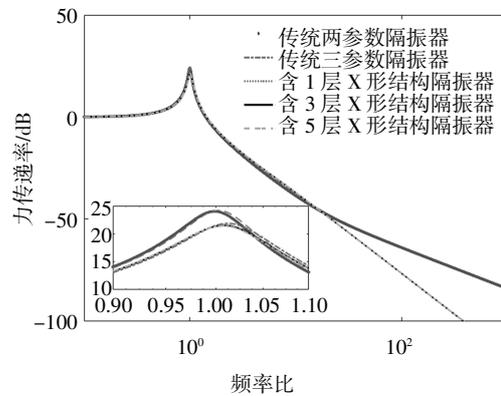


图7 与其他隔振器模型对比(第1组)  
Fig.7 Comparison with other isolator models(first group)

第 2 组设计参数为  $K_a=7\ 500\ \text{N/m}$ ,  $\gamma_1=0.05$ ,  $\gamma_2=5$ ,  $\theta_i=70^\circ$ ,  $l=0.3\ \text{m}$ ,  $m=2\ \text{kg}$ ,  $\zeta=0.02$ ,  $F_0=2\ \text{N}$ 。含  $n(n=3,5)$  层 X 形结构隔振器与传统两参数隔振器、传统三参数隔振器以及含 1 层 X 形结构隔振器的力传递率曲线如图 8 所示。

由图 7 和图 8 可知,通过随机选取两组设计参数,5 个隔振器的减隔振性能与图 6 得出的结果大致相同。由此可知,由图 6 得出的结论是可靠的。

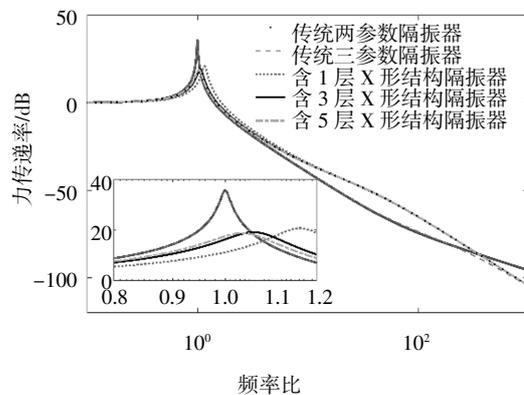


图8 与其他隔振器模型对比(第2组)  
Fig.8 Comparison with other isolator models(second group)

### 2.5 设计参数对新型隔振器性能影响

根据力传递率公式可知,影响含  $n$  层 X 形结构隔振器性能的主要设计参数为  $\zeta$ 、 $\theta_i$ 、 $\gamma_1$  和  $\gamma_2$ ,而与激励力幅值  $F_0$  以及杆长  $l$  无关.需要注意,输入力激励幅值  $f_0$  和杆长  $l$  对于隔振系统力传递率的影响较小,可忽略,所以并未讨论.由于含 3 层以上的 X 形结构隔振器的力传递率曲线受层数影响较小,所以本节重点讨论含 3 层 X 形结构隔振器动态特性受其他设计参数的影响.

#### 2.5.1 阻尼比 $\zeta$ 对隔振性能的影响

含 3 层 X 形结构隔振器在保持其他设计参数不变的条件下,对应不同阻尼比  $\zeta$  (分别取值 0.001、0.005、0.010、0.050) 的力传递率曲线如图 9 所示.由图 9 可知,随着阻尼比  $\zeta$  增加,谐振频率处的力传递率峰值得到显著降低;中频段的传递率峰值略有变化;但是,谐振频率基本没有变化,这表明隔振系统刚度没有损失.

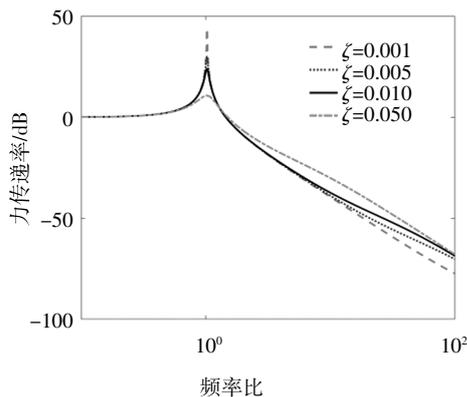


图 9 不同阻尼比  $\zeta$  对应力传递率曲线 ( $n=3$ )

Fig.9 Force transmissibility with different damping ratios  $\zeta$  ( $n=3$ )

#### 2.5.2 初始夹角 $\theta_i$ 对隔振性能的影响

含 3 层 X 形结构的隔振器在保持其他设计参数不变的条件下,对应不同初始夹角  $\theta_i$  (分别取值  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $70^\circ$ ) 的力传递率曲线如图 10 所示.由图可知,当初始夹角为  $30^\circ$  时,隔振器在谐振频率处的传递率幅值最大,显然这不利于隔振器的减隔振性能.随着初始夹角  $\theta_i$  增大,隔振器在谐振频率处的传递率幅值逐渐降低,当初始夹角为  $70^\circ$  时,可以实现无谐振峰.但是,初始夹角的增大不利于中频段的减隔振性能,而对于高频段的减隔振性能则基本没有影响.

#### 2.5.3 水平刚度比 $\gamma_1$ 对隔振性能的影响

在保持其他设计参数不变的条件下,对应不同水平刚度比  $\gamma_1$  (分别取值  $-0.8$ 、 $0$ 、 $0.8$ 、 $2.0$ ) 的含 3 层 X

形结构隔振器力传递率曲线如图 11 所示.可见,  $\gamma_1$  会显著影响隔振器的谐振频率及其对应传递率峰值.随着  $\gamma_1$  减小,隔振器的隔振性能得到明显改善.当水平刚度比  $\gamma_1$  大于 0 且逐渐增大时,隔振器的谐振频率和传递率峰值逐渐增大,但是对于高频处的隔振性能没有影响.当水平刚度比  $\gamma_1$  小于 0 时,隔振器力传递率曲线呈现无谐振峰特征且高频处的隔振性能不受影响.因此,隔振器会随着水平刚度比  $\gamma_1$  的减小而呈现出良好的减隔振性能,并且选择合适的水平刚度比  $\gamma_1$  可实现“高阻尼、低刚度”的振动控制效果.

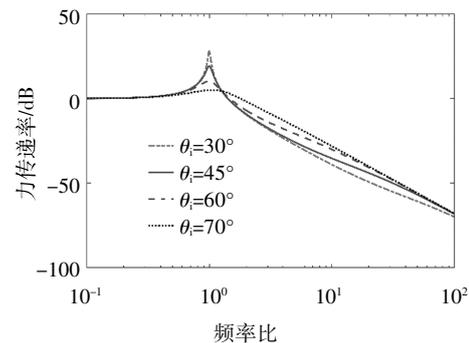


图 10 不同初始夹角  $\theta_i$  对应力传递率曲线 ( $n=3$ )

Fig.10 Force transmissibility with different initial angle  $\theta_i$  ( $n=3$ )

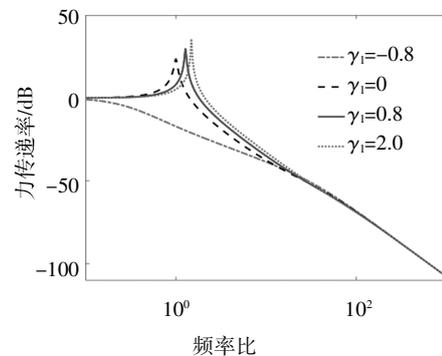


图 11 不同刚度比  $\gamma_1$  对应力传递率曲线 ( $n=3$ )

Fig.11 Force transmissibility with different stiffness ratio  $\gamma_1$  ( $n=3$ )

#### 2.5.4 竖直刚度比 $\gamma_2$ 对隔振性能的影响

含 3 层 X 形结构的隔振器在保持其他设计参数不变的条件下,对应不同竖直刚度比  $\gamma_2$  (分别取  $-0.05$ 、 $0.05$ 、 $1.00$ 、 $5.00$ ) 的力传递率曲线如图 12 所示.可见,当竖直刚度比  $\gamma_2$  小于 1 且为  $-0.05$  时,隔振器对应谐振频率减小但传递率峰值增大.当竖直刚度比大于 0 且逐渐增大时,隔振器的谐振频率和传递率峰值逐渐减小.当  $\gamma_2$  分别为 1.00 和 5.00 时,可以发现隔振器的谐振频率和传递率峰值基本保持不变,但高频段的隔振性能则随着  $\gamma_2$  的增大而变差.因此,合理选择竖

直刚度比参数可以对隔振器谐振频率处的峰值实现最优控制,然而竖直刚度比  $\gamma_2$  的增加导致隔振器在高频的隔振效果变差。

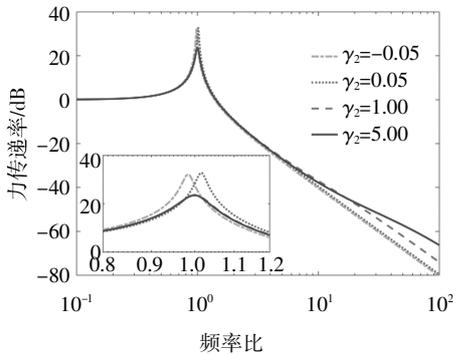


图 12 不同刚度比  $\gamma_2$  对应力传递率曲线( $\gamma_1 = 0, n = 3$ )  
Fig.12 Force transmissibility with different stiffness ratio  $\gamma_2$  ( $\gamma_1 = 0, n = 3$ )

### 2.5.5 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 组合参数对隔振性能的影响

为了进一步确认  $\gamma_1, \gamma_2$  组合参数对含 3 层 X 形结构隔振器的隔振性能的影响,这里分别对  $\gamma_1$  和  $\gamma_2$  参数选取不同的值来进行研究. 根据前述分析结果,当水平刚度比  $\gamma_1 \leq 0$  时,可以明显降低谐振处峰值且不影响高频段的减隔振性能. 因此,接下来重点讨论  $\gamma_1 \leq 0$  和不同  $\gamma_2$  对隔振器隔振性能的影响. 在保持其他设计参数不变的条件下,  $\gamma_1 \leq 0$  和不同  $\gamma_2$  对应含 3 层 X 形结构隔振器力传递率曲线如图 13 所示.

当不考虑水平刚度比( $\gamma_1=0$ )的影响时,竖直刚度比  $\gamma_2$  的增大会减小谐振处的峰值,但是导致高频段隔振性能变差;当分析水平刚度比  $\gamma_1 < 0$  与  $\gamma_2$  的组合刚度控制效果时,可知,  $\gamma_1 < 0$  和  $\gamma_2 = 1.00$  时隔振器的力传递特性得到显著改善,且在谐振频率处实现无谐振峰的控制效果,然而高频段的隔振效果会变差;但是,当  $\gamma_1 < 0$  和  $0 < \gamma_2 < 1$  时隔振器对谐振处峰值的控制效果较差,但是改善了高频处的隔振效果.

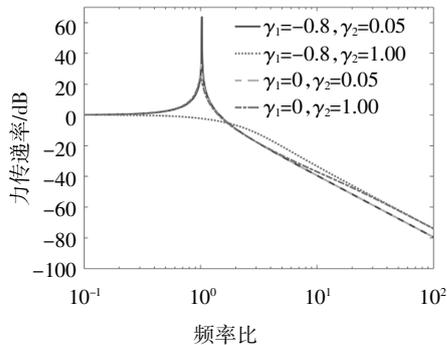


图 13 不同刚度比  $\gamma_2$  对应力传递率曲线( $\gamma_1 \leq 0, n = 3$ )  
Fig.13 Force transmissibility with different stiffness ratio  $\gamma_2$  ( $\gamma_1 \leq 0, n = 3$ )

另外,由文献[22]可知,相比于负刚度以及准零刚度隔振器,含 X 形结构隔振器不存在稳定性问题。

### 2.6 时域响应分析

为了进一步评估含  $n$  层 X 形结构隔振器的减隔振性能,重点针对隔振器受多频稳态激励条件下在时域的减隔振性能进行研究. 其中,  $nX-M$  表示含  $n$  ( $n=3$ ) 层 X 形结构隔振器;  $X-M$  表示含 1 层 X 形结构隔振器;  $R-M$  表示传统三参数隔振器.

将状态变量引入隔振系统的运动微分方程中,并化简为一阶微分方程组;随后,利用四阶龙格-库塔法得到隔振器各部分的时域响应位移和速度曲线;最后,根据隔振系统动力学运动方程得到传递到基础的力的时域响应曲线.

实际中,环境激励具有宽频特性,为了便于对比,假设隔振器受外部力激励.

$$F_e = [\cos 0.47\omega_n t + \cos 0.76\omega_n t + \cos 1.1\omega_n t + \cos 1.3\omega_n t + \cos 2\omega_n t + \cos 20\omega_n t]$$

式中:  $\omega_n$  为隔振系统的固有频率. 不同隔振器在多频激励下传递到基础的力的曲线如图 14 所示. 由图 14 可以看出,在宽频激励下,含 X 形结构隔振器明显比传统三参数隔振器的控制效果好,含  $n$  ( $n=3$ ) 层 X 形结构隔振器比含 1 层 X 形结构隔振器的控制效果好.

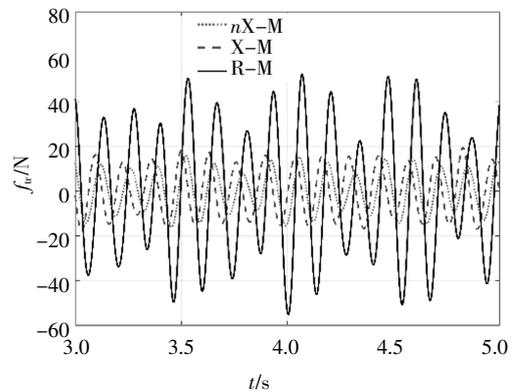


图 14 3 种隔振器传递到基础的力的时间历程  
Fig.14 The time history of the force transmitted by the three types of vibration isolators to the foundation

### 3 结论

本文提出了一种含  $n$  层 X 形结构隔振器,采用谐波平衡法得到其幅频、相频响应的解析表达式. 在此基础上,分别采用四阶龙格-库塔法和多体动力学软件 Adams 对所建理论模型及解析解进行验证. 为了便于分析评价隔振器的减隔振性能,分别从频率域和时间域展开讨论. 根据计算结果,可以得到如下结论:

1)设计参数中的阻尼比  $\zeta$ 、初始夹角  $\theta_i$ 、水平刚度比  $\gamma_1$ 、竖直刚度比  $\gamma_2$  和 X 形结构层数  $n$  可以改善谐振频率以及高频处的减隔振性能。

2)在传统三参数隔振器的基础上,通过合理选择设计参数,可使含 1 层 X 形结构隔振器在谐振频率处的峰值减小,同时保持高频处的隔振性能不变,但是谐振频率向高频发生移动;通过增加 X 形结构层数  $n$ ,隔振器的谐振峰值进一步减小,且谐振频率向低频发生移动。

3)通过对比时域响应特性,含  $n$  层 X 形结构隔振器比含单层 X 形结构隔振器和传统三参数隔振器的振动控制性能更好。

## 参考文献

- [1] LIU J, LI K. Sparse identification of time-space coupled distributed dynamic load [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 148(1): 107—177.
- [2] KAMESH D, PANDIYAN R, GHOSAL A. Passive vibration isolation of reaction wheel disturbances using a low frequency flexible space platform[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(6): 1310—1330.
- [3] BRENNAN M J, CARRELLA A, WATERS T P, *et al.* On the dynamic behaviour of a mass supported by a parallel combination of a spring and an elastically connected damper [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 309(3/4/5): 823—837.
- [4] MULLER P. Are the eigensolutions of a 1-d.o.f. system with viscoelastic damping oscillatory or not? [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285(1/2): 501—509.
- [5] 刘兴天, 钟鸣, 申军烽, 等. 松弛型阻尼隔振模型的动刚度试验研究[J]. *噪声与振动控制*, 2016, 36(5): 180—182.  
LIU X T, ZHONG M, SHEN J F, *et al.* Experimental analysis of the dynamic stiffness of a vibration isolation system with relaxation type damping [J]. *Noise and Vibration Control*, 2016, 36(5): 180—182. (In Chinese)
- [6] 谢溪凌, 陈燕毫, 刁建超, 等. 波纹管-黏滞流体隔振器特性与实验[J]. *噪声与振动控制*, 2017, 37(4): 201—205.  
XIE X L, CHEN Y H, DIAO J C, *et al.* Experiment of an isolator fabricated with diaphragm bellows and viscous fluid [J]. *Noise and Vibration Control*, 2017, 37(4): 201—205. (In Chinese)
- [7] 孙靖雅. 三参数流体阻尼隔振器及并联隔振器的设计方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2014: 1—5.  
SUN J Y. Research on design method of three parameter isolator and parallel supported vibration isolation system[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2014: 1—5. (In Chinese)
- [8] RUZICKA J E. Forced vibration in systems with elastically supported dampers[D]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1957: 394—401.
- [9] JEROME E R. Influence of damping in vibration isolation [M]. Washington DC: Shock and Vibration Information Center, 1971.
- [10] DAVIS P, CUNNINGHAM D, HARRELL J. Advanced 1.5 Hz passive viscous isolation system[C]//35th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. Virginia: AIAA, 1994.
- [11] 楼京俊, 朱石坚, 唐斯密. Ruzicka 隔振器在冲击隔离中的特性和作用[J]. *噪声与振动控制*, 2011, 31(4): 37—41.  
LOU J J, ZHU S J, TANG S M. Study on effect of Ruzicka isolator on shock isolation[J]. *Noise and Vibration Control*, 2011, 31(4): 37—41. (In Chinese)
- [12] 王超新, 孙靖雅, 张志谊, 等. 最优阻尼三参数隔振器设计和试验[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(15): 90—96.  
WANG C X, SUN J Y, ZHANG Z Y, *et al.* Design and experiment of a three-parameter isolation system with optimal damping [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(15): 90—96. (In Chinese)
- [13] SHI W K, QIAN C, CHEN Z Y, *et al.* Modeling and dynamic properties of a four-parameter Zener model vibration isolator [J]. *Shock and Vibration*, 2016, 508: 1—16.
- [14] DE HARO SILVA L, PAUPITZ GONÇALVES P J, WAGG D. On the dynamic behavior of the Zener model with nonlinear stiffness for harmonic vibration isolation [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 112: 343—358.
- [15] WANG X, YAO H X, ZHENG G T. Enhancing the isolation performance by a nonlinear secondary spring in the Zener model [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2483—2495.
- [16] LIU C C, JING X J, LI F M. Vibration isolation using a hybrid lever-type isolation system with an X-shape supporting structure [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, 98: 169—177.
- [17] LIU C C, JING X J, CHEN Z B. Band stop vibration suppression using a passive X-shape structured lever-type isolation system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 68/69: 342—353.
- [18] BIAN J, JING X J. Nonlinear passive damping of the X-shaped structure [J]. *Procedia Engineering*, 2017, 199: 1701—1706.
- [19] JING X J, ZHANG L L, FENG X, *et al.* A novel bio-inspired anti-vibration structure for operating hand-held jackhammers [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 317—339.
- [20] 刘国勇, 赵鹏鹏, 刘海平, 等. 一种嵌套式 X 型结构的高阻尼隔振器性能研究[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2021, 48(2): 31—37.  
LIU G Y, ZHAO P P, LIU H P, *et al.* Study on performance of a novel high-damping vibration isolator with nested X-shaped structure [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2021, 48(2): 31—37. (In Chinese)
- [21] LIU H P, ZHAO P P. Displacement transmissibility of a four-parameter isolator with geometric nonlinearity [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, 20(8): 2050092.
- [22] WU Z, JING X, BIAN J, *et al.* Vibration isolation by exploring bio-inspired structural nonlinearity [J]. *Bioinspiration & Biomimetics*, 2015, 10(5): 056015.