

基于改进蒙特卡洛法求解辐射 传热问题的计算精度评价

李国军^{1†}, 钟佳琪¹, 李定勇¹, 王晓东²

(1. 东北大学 冶金学院, 辽宁 沈阳 110000;

2. 吉利汽车自动化研究所, 浙江 宁波 315000)

摘要:针对传统蒙特卡洛法计算辐射传输耗时问题,提出了一种改进蒙特卡洛方法,通过比例迭代累加法来求解反射及散射能量,从而大幅减少了计算时间.引入直接评价方法,以包含参与性介质的密闭系统(方形和圆形为例)为例,分析了网格密度、发射能束数及物性参数对改进蒙特卡洛法计算精度的影响.当光学厚度为0.005时,采用改进蒙特卡洛方法求得方腔及圆形腔的表面微元辐射通量的相对均方根误差值分别为0.002 5及0.002 3,而采用传统蒙特卡洛方法时对应误差分别为0.008 0及0.003 7.可见,相同计算条件下,改进蒙特卡洛方法对辐射换热问题具有更高的精度.进一步研究了追踪能束数对计算误差的影响规律,给出了计算误差与追踪能束数拟合关系式,为计算该类问题的能束数选取提供了支撑.

关键词:蒙特卡洛法;评价;计算精度;计算效率

中图分类号:TK124

文献标志码:A

Evaluation on Computational Accuracy for Improved Monte Carlo Method of Radiative Heat Transfer Problem

LI Guojun^{1†}, ZHONG Jiaqi¹, LI Dingyong¹, WANG Xiaodong²

(1. College of Metallurgy, Northeastern University, Shenyang 110000, China;

2. Research Institute of Automobile, Geely Auto, Ningbo 315000, China)

Abstract: Aiming at the time-consuming problem of traditional Monte Carlo calculation for radiation transmission, this paper develops an improved Monte Carlo method, which solves the reflection and scattering energy through proportional iterative accumulation method, thereby greatly reducing the calculation time. The direct evaluation method is introduced, and the closed system containing participating media (square and circular as examples) is used as an example to analyze the influence of the grid density, the number of emitted energy beams and the physical parameters on the calculation accuracy of the improved Monte Carlo method. When the optical thickness is 0.005, the relative root mean square error of radiation flux for the square cavity and the circular cavity is 0.002 5 and 0.002 3 respectively by using the improved Monte Carlo method, while the corresponding errors are 0.008 0 and 0.003 7 respectively when the traditional Monte Carlo method is used. It can be seen that under the same calculation

* 收稿日期:2021-01-30

基金项目:国家重点研发计划资助项目(2017YFA0700300), National Key Research and Development Program of China (2017YFA0700300);国家自然科学基金资助项目(52106079), National Natural Science Foundation of China (52106079)

作者简介:李国军(1972—),男,辽宁沈阳人,东北大学副教授,博士

†通信联系人, E-mail: ligj@mail.neu.edu.cn

conditions, the improved Monte Carlo method has higher accuracy for the radiation heat transfer problem. The influence of the tracking energy beam number on the calculation error is further studied, and the fitting relationship between the calculation error and the tracking energy beam number is given, which provides support for the selection of the energy beam number.

Key words: Monte Carlo method; evaluation; calculation accuracy; computational efficiency

能源动力、航空航天等领域的传热过程通常以辐射传热为主,大多数情况该类问题难于进行解析求解而多借助于数值方法进行求解,故而对这类问题的数值计算方法研究具有重要意义^[1-5]. 蒙特卡洛方法(Monte Carlo method, MCM)可以精确地处理光谱特性、非均匀介质、各向异性散射及复杂几何形状等复杂辐射计算问题,已经成为解决辐射传热的主要数值计算方法之一^[6-9]. MCM 是一种统计模拟方法,其数值结果的精度随着抽样能束数目的增加而提高,而计算时间随着追踪能束数的增加而增加. 为兼顾计算精度及计算时间,笔者提出了一种改进 MCM^[10],该方法可以在只进行一次抽样情况下完成辐射换热求解,且其计算精度及计算效率高于传统 MCM. 随着 MCM 在辐射传热数值模拟计算应用范围的不断扩展,如何定量分析和评估其计算结果的误差及精度已成为关注的焦点,建立公认的数值误差分析和精度评估方法成为 MCM 主要研究内容之一. Siegel 等^[11]首次用不确定度来估计 MCM 计算辐射传热问题的统计误差. Planas Almazan^[12]运用 MCM 射线路径轨迹量化了混合网交换公式固有的统计误差. Plotnikov 和 Shkarupa^[13]应用直接模拟 MCM 求解稀薄气体动力学问题的统计误差. 阮立明等^[14]利用辐射交换因子的守恒性和互易性的检验来评估 MCM 的计算误差,得到一种间接评价 MCM 计算精度的方法. Yarahmadi 等^[15]提出一种改进平均相对不确定评价方法,验证由于表面温度和发射率的不确定性而引起的净热流密度不确定度的新表达式. Wang 等人^[16-17]提出了一种直接定量评价 MCM 精确度的评价方法.

为评价改进 MCM 计算精度,本文拟采用改进 MCM 分别对漫灰表面、参与性各项同性介质的方形及圆形封闭腔体内的辐射传热问题进行研究,建立表面和体积微元辐射热通量的误差计算模型,得出其最小误差与能束数的函数关系. 采用直接定量评

价方法开展基于辐射热通量的改进 MCM 计算误差的分析和精度评价,研究网格密度及采样能束数变化对改进 MCM 求解辐射传热计算精度及效率的影响.

1 改进蒙特卡洛法简介

应用区域法求解辐射换热时,当表面段和体积段的参数确定后,各段之间的辐射传递因子也可通过计算获得. 若假定微元发射的全部能量到达其他各段能量的比例与该微元反射能量到达其他各段能量的比例相同,与发射能量份额及反射能量的份额无关,则采用 MCM 求解辐射传递因子时,对全部微元发射的能束只需进行一次采样追踪,以确定微元段发射能量到达其他微元段的比例. 当表面微元反射时,将反射能束按发射能束处理,且到达其他段的比例在之前已经确定,无需再计算,散射情况也类似处理. 该思路即为改进 MCM,具体求解方法如下.

1.1 微元发射能束直接到达其他微元段比例

为方便计算,将表面微元按顺序依次命名为 $1, 2, \dots, N_s$, 体积微元安排在表面微元之后为 $N_s+1, N_s+2, \dots, N_s+N_g$, 其中 N_g 和 N_s 分别为体积和表面微元总数,则总微元数为 N_s+N_g . 则热交换场中微元 i 发射能束直接到达微元 j 比例为

$$P_{ij} = \frac{{}_k U_{i,j}}{N_i} \quad (1)$$

式中: ${}_k U_{i,j}$ ($k=1, 2, 3, \dots$)表示第 i 个微元发射的能量第 k 次循环到达第 j 个微元的能束数, N_i 为第 i 段发射的总能束数,当 $k=1$ 时表示直接到达.

1.2 微元发射能束到达其他微元段的总能束数

第 i 个微元发射的能量最终到达第 j 个微元的能量 $U_{i,j}$ 分为直接到达被吸收的能量及经 k 次反射后到达被吸收的能量的累加,则

$$U_{i,j} = \sum_{m=1}^{N_s} {}_{k-1} U_{i,m} (1 - \varepsilon_m) P_{m,j} \quad (j=1, 2, \dots, N_s) \quad (2)$$

$$U_{i,j} = \sum_{k=1}^k U_{i,j} \varepsilon_j \quad (j=1,2,\dots,N_s) \quad (3)$$

式中: $U_{i,j}$ 为第 i 微元段发射能束到达第 j 微元段能束总数, 其中包含直接到达与反射到达情况, ε 为微元段黑度.

对体积微元 $j=N_s+1, N_s+2, \dots, N_s+N_g$ 有

$${}_k U_{i,j} = \sum_{m=N_s+1}^{N_s+N_g} {}_{k-1} U_{i,m} \omega_j P_{m,j} \quad (4)$$

$$U_{i,j} = \sum_{k=1} {}_k U_{i,j} (1 - \omega_j) \quad (5)$$

式中: ω 为散射反照率, $U_{i,j}$ 为第 i 微元段发射能束到达第 j 微元段能束总数, 其中包含直接到达与散射到达情况.

当介质为各项同性散射介质时,

反照率为

$$\omega = \frac{\kappa_{sp}}{\kappa_e} \quad (6)$$

式中: κ_e 为含粒子介质系的衰减系数, κ_{sp} 为含粒子介质系的粒子的衰减系数, ω 表示散射介质的散射反照率.

首先确定一个随机数 R , 如果 $R > \omega$, 则能束被吸收, 否则被散射.

确定散射方向是 MCM 研究含粒子系辐射传递的关键. 本文仅计算各向同性散射, 已知散射相函数的归一化条件

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi(\beta, \eta) d\Omega = 1 \quad (7)$$

对于各项同性散射的散射相函数表达为

$$\Phi(\beta) = 1 + b \cos \beta \quad (8)$$

对于各项同性散射, 即 $b = 0$ 时

$$\beta = 2\pi\beta \quad (9)$$

1.3 计算终止条件

当微元段 i 发射的能束经过多次的反射或散射后剩余能量逐渐减少, 当剩余能量与发射能量的比值满足式(10)时, 式中 ξ 为无穷小量, 则认为计算精度已经满足要求.

$$\frac{\sum_{j=1}^{N_s+N_g} {}_k U_{i,j}}{N_i} < \xi \quad (10)$$

2 直接定量评价法

将辐射体系划分为 M 个面元和 N 个体积微元, 则表面和体积微元净辐射热通量

$$q_{ai} = \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \sigma T_m^4 \frac{F_{m \rightarrow i}}{A_i} A_m + \sum_{n=1}^N 4\kappa_a \sigma T_n^4 \frac{F_{n \rightarrow i}}{A_i} V_n \quad (11)$$

$$q_{vj} = \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \sigma T_m^4 \frac{F_{m \rightarrow j}}{V_j} A_m + \sum_{n=1}^N 4\kappa_a \sigma T_n^4 \frac{F_{n \rightarrow j}}{V_j} V_n \quad (12)$$

因计算过程中存在误差, 则其真值可以描述为计算值与计算误差之和, 即

$$q_{ai} = q_{ai}^0 + \Delta q_{ai} \quad (13)$$

$$q_{vj} = q_{vj}^0 + \Delta q_{vj} \quad (14)$$

式中: $F_{m \rightarrow i}$ 为表面微元 m 对表面微元 i 的辐射交换因子; $F_{n \rightarrow j}$ 为体积微元 n 对体积微元 j 的辐射交换因子; ε 是表面微元 i 的黑度; κ_a 是气体光学厚度; A, V 分别为表面微元的面积和体积微元的体积; q_{ai}, q_{vj} 分别为表面微元 i 、体积微元 j 上的净辐射热通量; q_{ai}^0, q_{vj}^0 为计算值; $\Delta q_{ai}, \Delta q_{vj}$ 为计算误差.

在等温辐射平衡状态下, 净辐射通量理论上为 0, 则微元段吸收的辐射能量与发射的辐射能量理论上绝对相等, 从而得到表面微元无因次方程为

$$Q_{ai}^0 = \varepsilon_i \quad (15)$$

由式(11)(13)(15), 可得表面微元 i 的无因次净辐射热流与精确值的偏差

$$\Delta Q_i = \varepsilon_i - Q_{ai}^0 \quad (16)$$

同理可得, 体积微元 j 的无因次净辐射热流与精确值的偏差

$$\Delta Q_j = 4\kappa_{aj} - Q_{vj}^0 \quad (17)$$

则表面微元和体积微元的辐射热通量相对误差为

$$\delta_{ra} = \frac{\Delta Q_{ai}}{\varepsilon_i} \quad (18)$$

$$\delta_{rv} = \frac{\Delta Q_{vj}}{4\kappa_{aj}} \quad (19)$$

表面和体积微元辐射通量的相对均方根误差表示为

$$E_a = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\Delta Q_{ai}}{Q_{ai}^0} \right)^2} \doteq \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\Delta Q_{ai}}{\varepsilon_i} \right)^2} \quad (20)$$

$$E_v = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\Delta Q_{vj}}{Q_{vj}^0} \right)^2} \doteq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\Delta Q_{vj}}{4\kappa_{aj}} \right)^2} \quad (21)$$

式中: Q_{ai}^0, Q_{vj}^0 分别为表面微元 i 、体积微元 j 上吸收无因次热流的计算值; $\Delta Q_{ai}, \Delta Q_{vj}$ 分别为表面微元 i 、体积微元 j 上吸收无因次热流的计算误差.

3 结果与讨论

3.1 网格密度对计算误差的影响

以漫灰表面、参与性各向同性介质的方形及圆形封闭腔体内的辐射传热问题为例,如图1所示,将边长为 L 的方腔离散按长度方向 N_x 和高度方向 N_y 均匀划分网格;将半径为 R 的圆形腔体沿径向 N_r 及周向 N_z 划分为均匀网格.本节中引入光学厚度 $\tau_g = \kappa_a \cdot (L/N_x)$ 并分析网格划分密度对计算误差影响.计算设定条件为:设方腔离散网格数为 $N_x=N_y=5, 10, 20, 40$,圆形腔体离散网格数为 $N_z=4, 14, 28, 40$, $N_r=2$.微元发射能束 $N=10^5$,表面发射率 $\epsilon=0.5$,介质的散射反照率 $\omega=0.5$.为减小伪随机数的随机性对计算结果的影响,本文采用2次计算结果及其平均值进行研究.

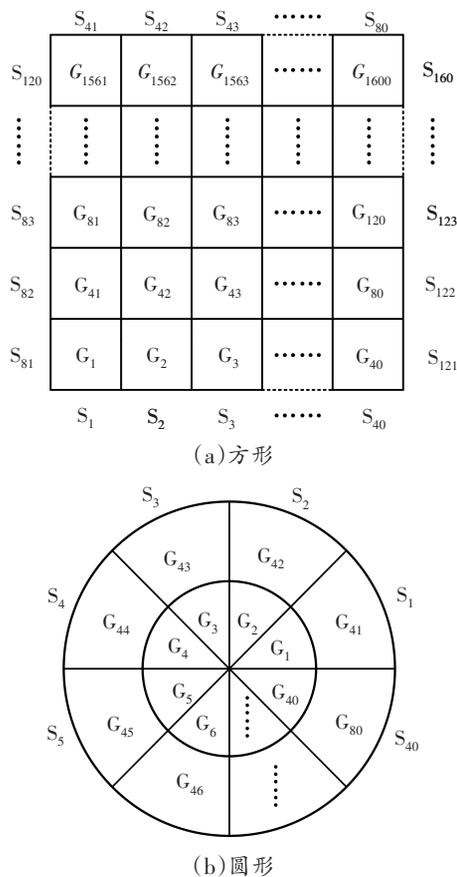


图1 算例图

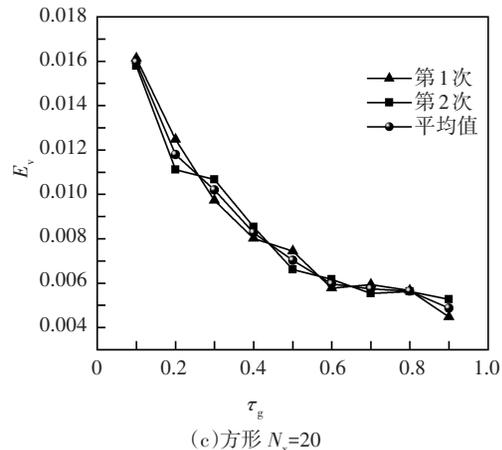
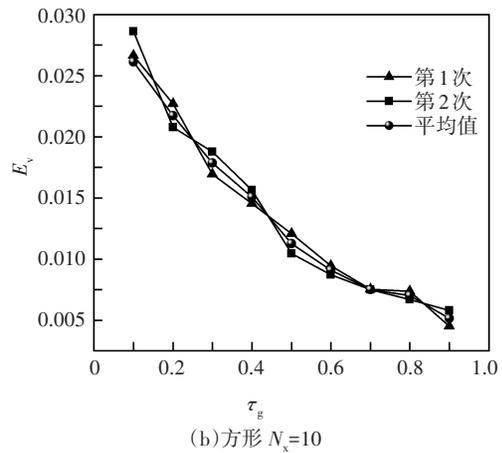
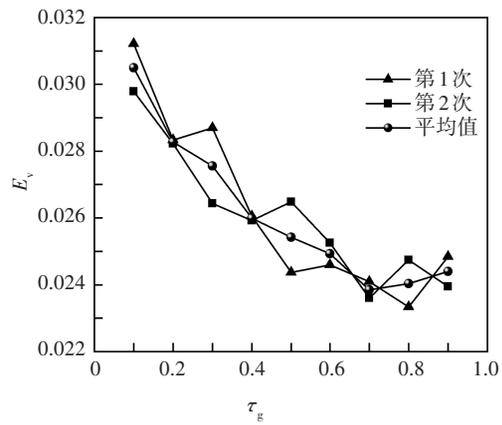
Fig.1 The physical model of two-dimensional cavity

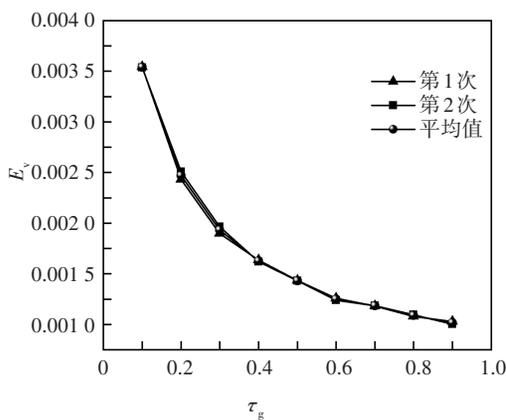
由于伪随机数的随机性,不同的离散网格密度的计算结果随机误差均值表现出不同的噪声.以图2(a)(b)(c)(d)和图2(e)(f)(g)(h)所示,离散网格密

度较小则误差波动明显,离散网格密度越大,结果越稳定,并且离散网格密度的增加使改进MCM计算结果的随机性和任意性最小化到更小的程度.从图2可以看出,方形网格数取 $N_x=N_y=40$,圆形网格数取 $N_z=40$, $N_r=2$ 即可满足精度条件.

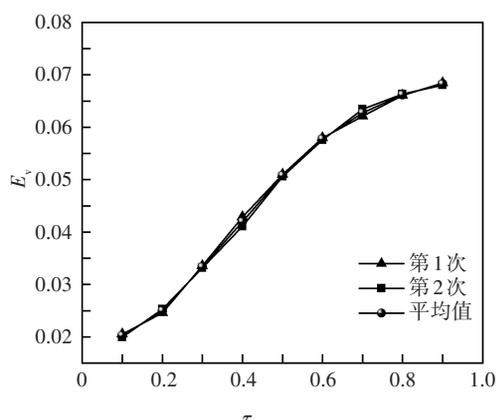
3.2 辐射传热量的精确值和计算值

以漫灰表面、参与性各向同性介质的方形及圆形封闭腔体内的辐射传热问题为例,将方形离散成均匀表面微元和体积微元,其中 $N_x=N_y=40$.将圆形腔体沿径向及周向分别划分为均匀网格,即 $N_z=40$, $N_r=2$.网格划分如图1所示.

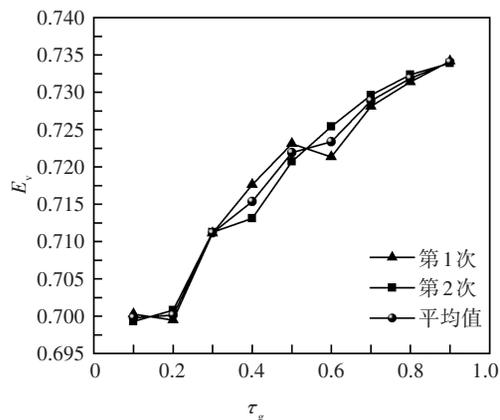




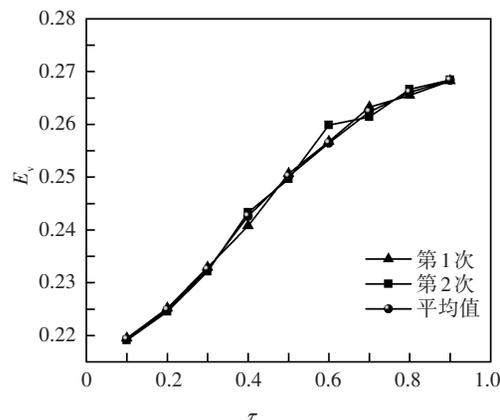
(d) 方形 $N_x=40$



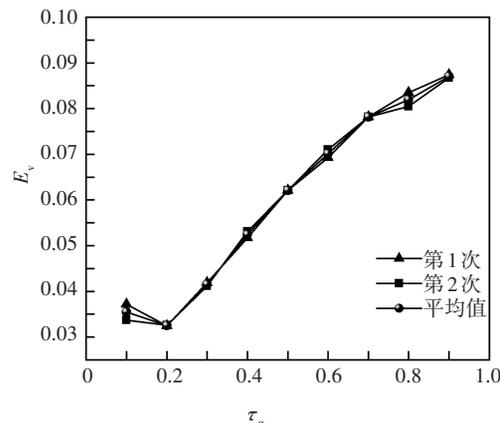
(h) 圆形 $N_z=40$



(e) 圆形 $N_z=4$



(f) 圆形 $N_z=14$



(g) 圆形 $N_z=28$

图 2 不同网格密度下体积微元辐射热通量计算误差
Fig.2 Calculation error of radiant heat flux of gas elements with different grid density

当微元发射能束数 $N=10^5$, 表面发射率 $\varepsilon_{\text{外}}=0.8$, $\varepsilon_{\text{内}}=0.5$, 介质的散射反照率 $\omega=0.5$, 气体光学厚度分别为 $\tau_g=0.0005, \tau_g=0.5, \tau_g=50$ 时, 表面微元无因次热通量计算结果分别如图 3 所示.

由图 3 可知, 光学厚度不同时, 分别采用改进 MCM 及 MCM 计算方腔及圆形腔内表面微元无因次热通量的计算值与真实值误差较小. 当 $\tau_g=0.0005$ 时, 采用改进 MCM 求解得到的方腔及圆形腔的相对均方根误差 E_a 分别为 0.0025 及 0.0023 (MCM 求解得到的方腔及圆形腔的相对均方根误差 E_a 分别为 0.0080 及 0.0037); 当 $\tau_g=0.5$ 时, 其改进 MCM 求解的 E_a 分别为 0.0029 及 0.0028 (MCM 求解的 E_a 分别为 0.0141 及 0.0116); 当 $\tau_g=50$ 时, 其改进 MCM 求解的 E_a 分别为 0.0032 及 0.0031 (MCM 求解的 E_a 分别为 0.0270 及 0.0238). 由此可以看出, 改进 MCM 对方腔及圆形腔具有相同适用性, 在相同条件下其求解精度高于 MCM.

图 4 给出了气体光学厚度分别为 $\tau_g=50, \tau_g=0.5, \tau_g=0.0005$ 时方腔及圆形腔体积微元辐射热通量计算值与真实值关系. 由图可知, 当 $\tau_g=0.0005$ 时, 用改进 MCM 求解得到的方腔及圆形腔的相对均方根误差 E_v 分别为 0.00138 及 0.0268 (MCM 求解的 E_v 分别为 0.0403 及 0.0978); 当 $\tau_g=0.5$ 时, 方腔及圆形腔的相对均方根误差 E_v 分别为 0.0142 及 0.0512 (MCM 求解的 E_v 分别为 0.0403 及 0.1207); 当 $\tau_g=50$ 时, 方腔及圆形腔的相对均方根误差 E_v 分别为 0.4997 及 0.1462 (MCM 求解的 E_v 分别为 1.0018 及 0.4782). 可见, 当其他条件不变时, 随着光学厚度增加, MCM 及改进 MCM 计算结果误差有增大趋势.

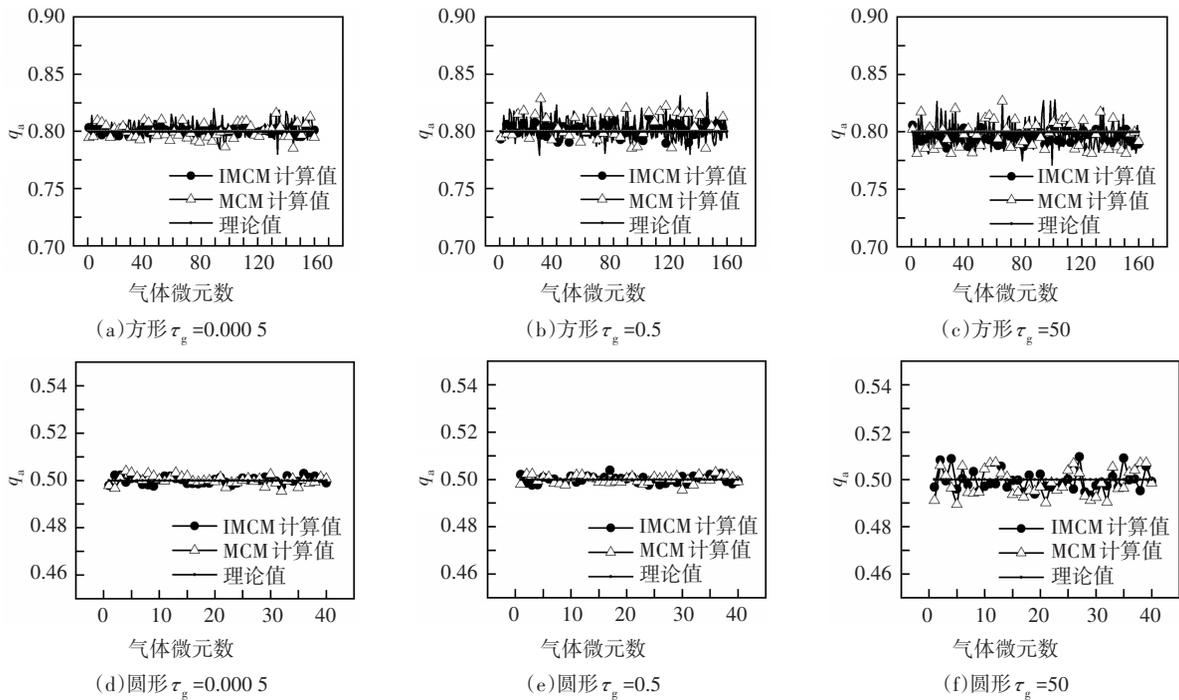


图3 表面微元吸收的辐射热通量的计算值和精度值

Fig.3 Calculation and accuracy of radiative heat flux absorbed by surface elements

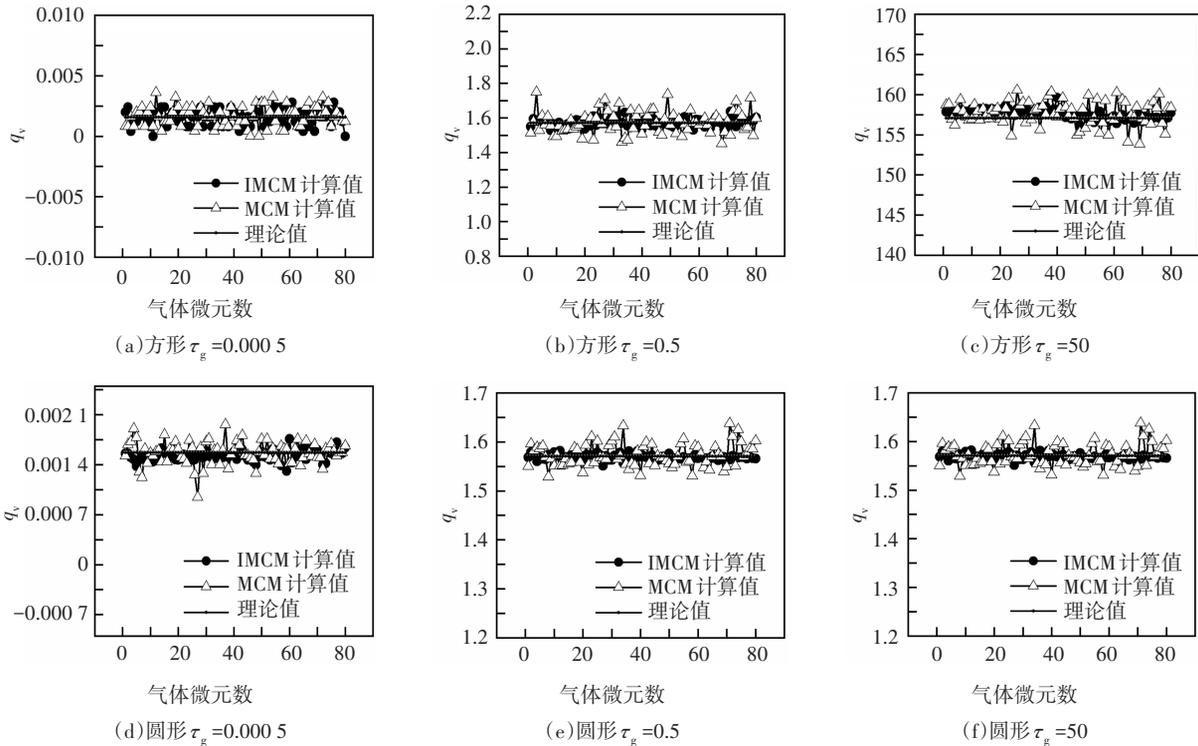


图4 体积微元吸收的辐射热通量的计算值和精度值

Fig.4 Calculation and accuracy of radiative heat flux absorbed by gas elements

3.3 微元发射能束数与计算误差关系

设方形及圆形的表面发射率 $\epsilon = 0.5$, 介质的散射反照率 $\omega = 0.5$, 当微元发射能束数 N 分别为 $N =$

1 000, 3 000, 5 000, 10 000, 100 000, 500 000 时, 求解表面和体积微元无因次热通量最小误差值.

表 1 $E_{a,\min}$ 和 $E_{v,\min}$ 随 N 的变化
Tab.1 The change of $E_{a,\min}$ and $E_{v,\min}$ with different N

| N | 1 000 | 3 000 | 5 000 | 10 000 | 100 000 | 500 000 |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 方形/圆形 | 方形/圆形 | 方形/圆形 | 方形/圆形 | 方形/圆形 | 方形/圆形 |
| $E_{a,\min}$ | 0.023 2/0.027 6 | 0.012 4/0.019 9 | 0.008 7/0.015 3 | 0.007 2/0.010 0 | 0.002 0/0.007 0 | 0.000 8/0.005 7 |
| $E_{v,\min}$ | 0.051 0/0.053 2 | 0.028 4/0.035 2 | 0.022 3/0.024 0 | 0.015 3/0.017 3 | 0.004 8/0.004 2 | 0.002 1/0.002 2 |

表 1 给出了 $E_{a,\min}$ 、 $E_{v,\min}$ 与微元发射能束数之间的关系. 可以看出, 随着微元发射能束数增加, 最小误差逐渐减小. 对圆形封闭腔, 无因次热通量最小误差值 $E_{a,\min}$ 与微元发射能束数 N 的关系可拟合为如式 (22) 所示.

$$E_{a,\min} = 0.006 1 + \frac{0.027 5}{\left[1 + \left(\frac{N}{2 932} \right)^{1.192 3} \right]} \quad (22)$$

则有

$$N = 2 932 \times \left(\frac{0.027 5}{E_{a,\min} - 0.006 1} - 1 \right)^{0.838 7} \quad (23)$$

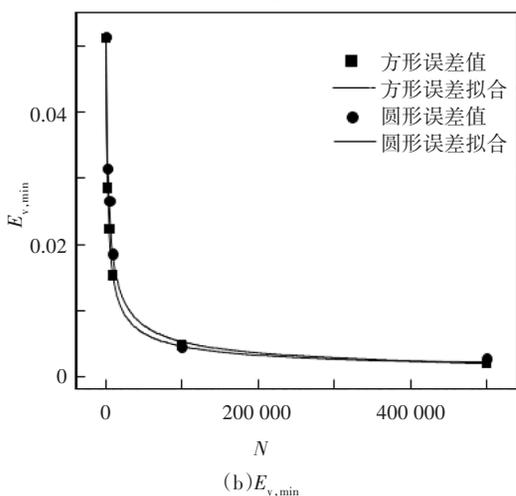
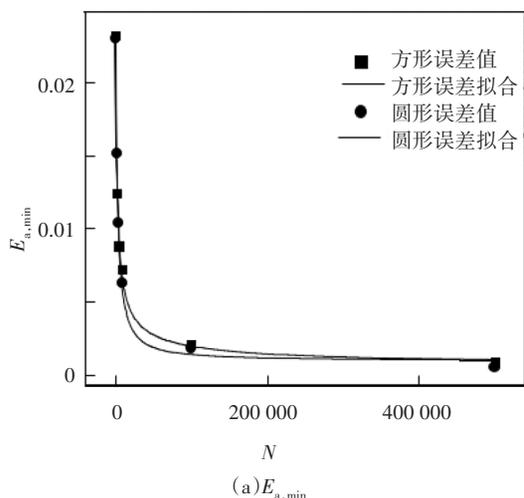


图 5 $E_{a,\min}$ 和 $E_{v,\min}$ 与 N 的函数关系

Fig.5 The functional relationship between $E_{a,\min}$, $E_{v,\min}$ and N

由图 5 可知, 计算精度随着微元能束数的增加而提高, 但是当达到一定的微元能束数时, 能束数继续增加对计算精度提升逐渐不明显. 通常对于燃烧模拟, 辐射传热计算中可接受的 $E_{a,\min}$ 误差水平要求约为 0.01, 所以对于用改进 MCM 求解辐射传热的方形和圆形算例分别需要微元能束数 $N=5 000$ 和 $N=10 000$ 即为满足精度要求. 通过式 (23) 可以获得不同最小误差要求情况下需要的微元能束数目.

4 结 论

本文阐述了基于改进 MCM 进行求解辐射换热问题的思路, 并引入直接定量评价方法对不同光学厚度情况下的圆形腔及方腔内参与性介质的辐射热通量计算精度进行了评价. 研究结果如下:

1) 改进 MCM 对方腔及圆形腔内辐射问题具有适用性, 在相同计算条件下, 其直接评价结果明显高于采用改进 MCM 进行计算的精度. 如对于光学厚度为 0.005 时, 对方腔及圆形腔, 采用改进 MCM 的 E_a 值分别为 0.002 5 及 0.002 3 而采用 MCM 时 E_a 分别为 0.008 0 及 0.003 7.

2) 研究了微元发射能束数与计算误差关系, 给出了能束数与 E_a 关系拟合式, 为采用改进 MCM 进行辐射换热计算提供追踪能束数选取的依据.

参 考 文 献

[1] 李国军, 陈海耿, 伊智. 积分降重法求解辐射直接交换面积 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2010, 31(1): 80-83.
LI G J, CHEN H G, YI Z. Calculation of radiative direct exchange areas using a reduced integration scheme [J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2010, 31(1): 80-83. (In Chinese)

[2] MODEST M F. Radiative heat transfer [M]. New York: Academic Press, 1993: 639-666.

[3] RUAN L M, TAN H P, YAN Y Y. A Monte Carlo (mc) method

- applied to the medium with nongray absorbing-emitting-anisotropic scattering particles and gray approximation[J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2002, 42(3): 253-268.
- [4] TAN H P, SHUAI Y, XIA X L. Reliability of stray light calculation code by the Monte Carlo method[J]. Optical Engineering, 2005, 44(2): 1-2.
- [5] KOVTANYUK A E, BOTKIN N D, HOFFMANN K H. Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012, 55(4): 649-654.
- [6] TSENG H Y, HONG Y B, WU C Y, *et al.* Monte Carlo simulation of radiative transfer in a medium with varying refractive index specified at discrete points[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 48: 870-884.
- [7] WANG C H, ZHANG Y, YI H L, *et al.* Transient radiative transfer in two-dimensional graded index medium by Monte Carlo method combined with the time shift and superposition principle[J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2016, 69(6): 574-588.
- [8] 龚光彩, 刘佳. 空气载能辐射空调混合通风协同运行研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2019, 46(5): 148-156.
GONG G C, LIU J. Research on synergistic operation of mixing ventilation for air carrying energy radiant air-conditioning system[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2019, 46(5): 148-156. (In Chinese)
- [9] KHANNA S, YADAV U. Computation of total exchange areas using Monte Carlo method[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2013, 8(3): 1-7.
- [10] LI G J, ZHONG J Q, WANG X D. An improved Monte Carlo method for radiative heat transfer in participating media[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2020, 251: 107081.
- [11] SIEGEL R, HOWELL J R. Thermal radiation heat transfer[M]. New York: Taylor & Francis, 2002: 23-566.
- [12] PLANAS ALMAZAN P. Accuracy of Monte Carlo ray-tracing thermal radiation calculations: A practical discussion[J]. Noordwijk: European Space Agency, 1997: 579-591.
- [13] PLOTNIKOV M Y, SHKARUPA E V. Estimation of the statistical error of the direct simulation Monte Carlo method[J]. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, 50(2): 335-344.
- [14] 阮立明, 谭建宇, 董士奎, 等. 辐射传递蒙特卡洛法精度分析及数值试验[J]. 工程热物理学报, 2003, 24(5): 813-816.
RUAN L M, TAN J Y, DONG S K, *et al.* The precision analysis about radiative transfer Monte-Carlo method and numerical experiment research[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2003, 24(5): 813-816. (In Chinese)
- [15] YARAHMADI M, MAHAN J R, PRIESTLEY J. Estimation and use of the radiation distribution factor median for predicting uncertainty in the Monte Carlo ray-trace method[J]. Journal of Heat Transfer, 2019, 141(6): 1-7.
- [16] WANG D D, ZHOU H C. Quantitative evaluation of the computational accuracy for the Monte Carlo calculation of radiative heat transfer[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2019, 226: 100-114.
- [17] WANG D D, CHENG Q, ZHUO X S, *et al.* Effects of surface emissivity and medium scattering albedo on the computational accuracy of radiative heat transfer by MCM[J]. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2020, 240: 106712.