第 49 卷　第 7 期　湖南大学学报（自然科学版）　Vol.49，No.7
2022 年 7 月　Journal of Hunan University（Natural Sciences）　Jul. 2022

文章编号：1674-2974（2022）07-0066-09　DOI：10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2022073

斜坡基桩水平动力响应解析解

张玲[1,2,3]，岳梢[1,2,3†]，刘亚楠[1,2,3]，彭文哲[1,2,3]

（1. 湖南大学 土木工程学院，湖南 长沙 410082；
2. 建筑安全与节能教育部重点实验室（湖南大学），湖南 长沙 410082；
3. 国家级建筑安全与环境国际联合研究中心（湖南大学），湖南 长沙 410082）

摘　要：随着江河岸边斜坡地段的桩基础日益增多，斜坡基桩桩-土水平耦合振动问题也日益受到重视.本文基于现有平地基桩水平动力响应理论，考虑斜坡效应，提出适用于斜坡基桩水平动力响应解析解.首先借助微分变换、亥姆霍兹分解和分离变量法等手段解耦土体三维波动方程，并引入桩-土边界连续条件，求解了平地基桩的桩周土体水平动抗力；在此基础上，引入折减因子考虑斜坡对临空面一侧土体抗力的弱化效应，并忽略一定深度范围内的浅层土体提供的水平动抗力，推导出斜坡段基桩的桩周土体水平动抗力解析解.此外，利用Euler梁模型推导斜坡段基桩自由段、入土段的水平振动控制方程，获得了基于传递矩阵法的基桩水平动力响应解析解，包括基桩动力阻抗以及桩身内力和变形解析表达式；然后通过与已有平地动力阻抗解析解，斜坡段基桩静力内力变形数值解进行对比，验证了本文解析解的合理性.

关键词：斜坡桩；三维波动效应；水平振动；解析解

中图分类号：TU443.15　　**文献标志码**：A

Analytical Solution of Horizontal Dynamic Response of Pile in Sloped Ground

ZHANG Ling[1,2,3]，YUE Shao[1,2,3†]，LIU Yanan[1,2,3]，PENG Wenzhe[1,2,3]

（1. College of Civil Engineering，Hunan University，Changsha 410082，China；
2. Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency of the Ministry of Education（Hunan University），Changsha 410082，China；
3. National International Joint Research Center for Building Safety and Environment（Hunan University），Changsha 410082，China）

Abstract：As the pile foundations in slope areas near rivers are increasingly adopted，the problem of pile-soil horizontal coupling vibration of piles in slope foundations has also received mounting attention. Based on the existing theory of horizontal dynamic response of foundation piles in level ground，this paper proposes an analytical solution for the horizontal vibration response of foundation piles in sloped ground considering the slope effect. Firstly，by means of differential transformation，Helmholtz decomposition and separation of variables method，the three-dimensional wave equation of soil is decoupled，and the continuous condition of the pile-soil boundary is introduced

* **收稿日期**：2022-03-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52078205，52108317），National Natural Science Foundation of China（52078205，52108317）；湖南省自然科学基金资助项目（2020JJ3013），Natural Science Foundation of Hunan Province（2020JJ3013）；创新平台与人才计划-湖湘高层次人才聚集工程-创新团队项目（2019RS1030）
作者简介：张玲（1982—），女，浙江临海人，湖南大学教授，博士生导师，博士
† 通信联系人，E-mail：yueshao7659@163.com

to solve the horizontal dynamic resistance of the surrounding soil of the foundation pile in the level ground. On this basis, the horizontal dynamic resistance of the soil around the foundation pile in the sloped ground can then be deduced by introducing a reduction factor to consider the weakening effect of the sloped ground on the soil resistance on the side of the free surface and ignore the horizontal dynamic resistance provided by the shallow soils within a certain depth; in addition, governing equations for the horizontal vibration of the free section and the submerged section of the foundation pile in the sloped ground is deduced based on Euler beam model; the analytical solutions of the horizontal vibration response of the foundation pile can then be obtained by the transfer matrix method, including the dynamic resistance of the foundation pile and the internal force and deformation of the pile shaft. The proposed solutions are verified by comparing with those existing analytical solutions of dynamic cases in the level ground and numerical simulations for static cases in the sloped ground in terms of internal force and deformation of the foundation pile.

Key words: pile in sloped ground; 3D wave effect; horizontal vibration; analytical solution

随着跨江、跨沟谷等斜坡地形上的高速公路建设的不断推进，斜坡桩基工程越来越多.斜坡基桩不仅要承受上部结构自重等竖向荷载，还要承担车辆制动等水平动荷载作用.与平地基桩相比，因斜坡岩土体应力场分布不对称，斜坡基桩桩-土耦合振动问题以及侧向承载能力设计计算更加复杂.因此，分析水平动荷载作用下斜坡基桩的动力响应具有重要的意义.

目前，国内外已有学者针对水平静载下斜坡基桩的受力变形分析开展了一些研究.试验方面，赵明华等[1]通过现场试验探究了陡坡段双桩基础承载特性及荷载传递机理，为同类工程设计施工提供了有效参考；尹平保等[2]通过室内模型试验研究了坡度等因素对斜坡段基桩的斜坡空间效应的影响；杨明辉等[3]基于室内模型试验指出了桩前土抗力折减效应与坡角及临坡距紧密相关.数值模拟方面，Georgiadis等[4]采用三维有限元软件研究了边坡桩基的水平承载性能，并得到了考虑坡角的p-y曲线表达式；Ng等[5]基于有限元软件，研究了水平荷载下斜坡套筒桩的受力变形，得到了套管对斜坡桩性能影响规律.理论计算方面，赵明华等[6]和杨超炜等[7]根据m法假定，分别提出陡坡段双桩内力计算有限差分解及有限杆单元解；尹平保等[8]假定桩后边坡趋于稳定，产生的水平推力甚小，只考虑桩前土抗力作用，提出了基于p-y曲线法的斜坡段基桩内力变形计算方法；杨明辉等[9]基于斜坡基桩横向加载破坏试验，提出考虑陡坡效应的应变楔计算方法，并研究了陡坡效应的影响范围；Peng等[10-11]假定斜坡地基桩前浅层土难以提供土抗力，提出修正应变楔理论；我国《公路桥涵地基与基础设计规范》(JTG 3363—2019)[12]建议采用m法计算平地桩身内力变形，对于斜坡地形可将地基反力系数比例系数m值折减一半简化计算.上述研究采用不同方式均对桩前土抗力进行折减以考虑斜坡效应，且取得较好的效果，但均属于静力学范畴，斜坡段基桩的动力响应计算方法鲜有报道，尚缺乏系统深入的研究.

现有水平动力响应方面的研究主要是针对平地基桩开展的.早期有学者采用动力Winkler地基梁模型[13-15]将桩周土模拟为弹簧和阻尼器，该模型虽简单直观，但不能很好地反映桩土相互作用，忽略了桩周土的连续性；Nogami等[16]和Novak等[17]考虑土体应力的梯度变化，将土体视为三维连续介质，通过构造势函数解耦土体三维波动方程，求得桩周土水平振动阻力，根据桩土相互作用得到桩基水平振动响应解析解；Zheng等[18]将此扩展到大直径管桩，推导了黏弹性土层中大直径管桩水平动力响应的解析解；栾鲁宝等[19]考虑了竖向应力梯度变化和轴向荷载二阶效应的影响，研究了黏弹性土层中桩-土横向耦合振动问题；Hu等[20]建立了径向非均质黏弹性土体的水平动力阻抗解析解；赵密等[21]考虑水-桩-土之间的耦合作用，建立了水中高桩水平振动响应解析解.以上研究对斜坡基桩振动响应有着一定的参考价值.

鉴于此，本文将在现有平地基桩水平动力响应理论的基础上，考虑斜坡效应，提出适用于斜坡段基桩的水平动力响应解析解，以期为斜坡基桩水平振

动研究提供一定的理论参考.

1 计算模型建立及基本假定

1.1 计算模型

如图1所示,斜坡段基桩桩顶同时受到水平简谐荷载$Q_0e^{i\omega t}$和摇摆简谐荷载$M_0e^{i\omega t}$作用;桩长为L,其中自由段长为L_1,嵌入段深度为L_2;桩径为$D_p=2r_0$.假定桩前一定深度H_0范围内的浅层土体难以提供水平抗力[10-11].实际计算土层厚度为H_1,并设实际计算土层对应的桩轴中心处为坐标原点O,沿深度方向为z轴,水平方向为x轴.

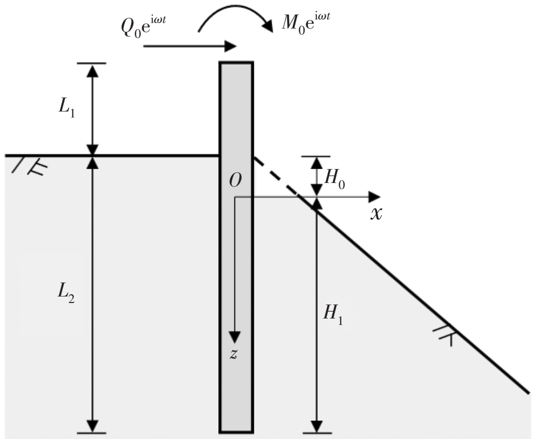


图1 斜坡基桩计算模型简图

Fig.1 Calculation model of pile in sloping ground

1.2 基本假定

为便于分析,根据图1所示的简化计算模型,进一步做出如下假设:

1)桥梁基桩成桩后斜坡基本上趋于稳定,桩后岩土体产生的水平推力甚小,故可假定桩位处斜坡是稳定的,即不考虑斜坡的失稳破坏,也不考虑桩侧摩阻力及桩后土体水平推力的作用[8].

2)基桩视为线弹性Euler杆件,忽略剪切变形及转动惯性,桩周土为各向同性黏弹性体[19, 21].

3)桩土体系为小变形振动,桩-土体系接触良好,接触面不发生相对滑移,且只考虑水平方向位移,忽略竖向位移[19, 21].

2 桩周土层水平振动

在水平简谐荷载作用下,桩-土体系处于简谐振动状态,相应的状态项均包含时间因子$e^{i\omega t}$.为书写方便,在以下推导过程中均省略$e^{i\omega t}$项.在对斜坡桩周土水平动反力推导时,先推导出平地基桩周土水平动反力,再进一步考虑斜坡的土抗力折减效应,最终得出斜坡基桩周土抗力表达式.

2.1 桩周土振动方程建立

当桩周土系统做水平振动时,根据黏弹性动力学理论,建立柱坐标系下桩周土运动方程如下:

$$(\lambda_s+2\mu_s)\frac{\partial\Delta}{\partial r}-\frac{1}{r}\mu_s\frac{\partial e}{\partial\theta}+\mu_s\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}=-\rho_s\omega^2u_r \quad (1)$$

$$(\lambda_s+2\mu_s)\frac{\partial\Delta}{r\partial\theta}+\mu_s\frac{\partial e}{\partial r}+\mu_s\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=-\rho_s\omega^2u_\theta \quad (2)$$

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \quad (3)$$

$$e=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_\theta\right)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right] \quad (4)$$

式中:u_r、u_θ分别为桩周土的径向和环向位移;λ_s和μ_s为复拉梅常数,$\lambda_s=2\mu_s\nu_s/(1-2\nu_s)$,$\mu_s=G_s(1+2i\xi_s)$,$G_s$为桩周土剪切模量,$G_s=E_s/(2(1+\nu_s))$,$\nu_s$、$E_s$、$\xi_s$分别为桩周土泊松比、弹性模量以及滞回阻尼比;$\rho_s$为桩周土密度.

2.2 桩周土边界及连续性条件

桩周土边界条件:

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial z}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \quad (5)$$

$$\left.u_r\right|_{z=H_1}=\left.u_\theta\right|_{z=H_1}=0 \quad (6)$$

$$\left.u_r\right|_{r\to\infty}=\left.u_\theta\right|_{r\to\infty}=0 \quad (7)$$

桩周土接触边界条件:

$$\left.u_r\right|_{r=r_0}=u_p\cos\theta \quad (8)$$

$$\left.u_\theta\right|_{r=r_0}=-u_p\sin\theta \quad (9)$$

式中:u_p为桩身沿$\theta=0$方向水平位移.

2.3 桩周土振动方程求解

引入势函数对土体振动控制方程进行解耦:

$$u_r(r,\theta,z)=\frac{\partial\phi(r,\theta,z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(r,\theta,z)}{\partial\theta} \quad (10)$$

$$u_\theta(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi(r,\theta,z)}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi(r,\theta,z)}{\partial r} \quad (11)$$

式中:$\phi(r,\theta,z)$、$\psi(r,\theta,z)$为土体的位移势函数.

由式(10)(11)容易得到:

$$\Delta=\nabla^2\phi,\ e=-\nabla^2\psi \quad (12)$$

式中:$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.

将式(10)~(12)代入方程(1)(2),化简得:

$$\left(\lambda_s+2\mu_s\right)\nabla^2\phi+\left(\mu_s\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\rho_s\omega^2\right)\phi=0 \quad (13)$$

$$\mu_s\nabla^2\psi+\left(\mu_s\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\rho_s\omega^2\right)\psi=0 \tag{14}$$

令 $\phi=R(r)\Theta(\theta)Z(z)$，将 ϕ 代入式（13）中，两边同时除以 $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$ 可得：

$$\left(\lambda_s+2\mu_s\right)\left[\frac{1}{R}\frac{\partial^2R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial\Theta^2}{\partial\theta^2}\right]+\mu_s\frac{1}{Z}\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}+\rho_s\omega^2=0 \tag{15}$$

基于分离变量原理，式（15）可分解为三个常微分方程：

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2R}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r}-\frac{1}{r^2}m^2=q^2 \tag{16}$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\partial\Theta^2}{\partial\theta^2}=-m^2 \tag{17}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2Z}{\partial z^2}=-g^2 \tag{18}$$

式中：$q^2=\dfrac{\mu_sg^2-\rho_s\omega^2}{\lambda_s+2\mu_s}$.

式（16）~（18）的通解为：

$$R(r)=AK_{n_1}\left(qr\right)+BI_{n_1}\left(qr\right) \tag{19}$$

$$\Theta(\theta)=C\sin\left(n_1\theta\right)+D\cos\left(n_1\theta\right) \tag{20}$$

$$Z(z)=E\sin\left(gz\right)+F\cos\left(gz\right) \tag{21}$$

式中：A、B、C、D、E 和 F 为待定系数；$K_{n_1}(\cdot)$ 和 $I_{n_1}(\cdot)$ 分别为 n_1 阶第一类和第二类修正 Bessel 函数.

势函数 ϕ 的解为：

$$\phi=\left[AK_{n_1}\left(qr\right)+BI_{n_1}\left(qr\right)\right]\left[C\sin\left(n_1\theta\right)+D\cos\left(n_1\theta\right)\right]\times\left[E\sin\left(gz\right)+F\cos\left(gz\right)\right] \tag{22}$$

同理，可得到势函数 ψ 的解：

$$\psi=\left[A_0K_{n_1}\left(sr\right)+B_0I_{n_1}\left(sr\right)\right]\left[C_0\sin\left(n_1\theta\right)+D_0\cos\left(n_1\theta\right)\right]\left[E_0\sin\left(gz\right)+F_0\cos\left(gz\right)\right] \tag{23}$$

式中：A_0、B_0、C_0、D_0、E_0 和 F_0 为待定系数；$s^2=\dfrac{\mu_sg^2-\rho_s\omega^2}{\mu_s}$.

根据式（7）并考虑修正 Bessel 函数的性质，可得 $B=B_0=0$，$n_1=1$. 由式（8）（9）可知 u_r 是 θ 的偶函数，u_θ 是 θ 的奇函数，可得 $C=D_0=0$. 由式（5）（6）可得 $E=E_0=0$，$g_n=(2n-1)\pi/(2H_1)$；$n=1,2,3,\cdots$.

因此可得：

$$\phi=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}A_nK_1\left(q_nr\right)\cos\left(g_nz\right) \tag{24}$$

$$\psi=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}B_nK_1\left(s_nr\right)\cos\left(g_nz\right) \tag{25}$$

将式（24）（25）代入式（10）（11）得：

$$u_r=\cos\theta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(g_nz\right)\{-A_n[\frac{1}{r}K_1\left(q_nr\right)+q_nK_0\left(q_nr\right)]+B_n\frac{1}{r}K_1\left(s_nr\right)\} \tag{26}$$

$$u_\theta=\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(g_nz\right)\{-A_n\frac{1}{r}K_1\left(q_nr\right)+B_n[\frac{1}{r}K_1\left(s_nr\right)+s_nK_0\left(s_nr\right)]\} \tag{27}$$

式中：A_n、B_n 为待定系数.

将式（26）（27）代入方程（8）（9）化简得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(g_nz\right)\{-A_n[\frac{1}{r_0}K_1\left(q_nr_0\right)+q_nK_0\left(q_nr_0\right)]+B_n\frac{1}{r_0}K_1\left(s_nr_0\right)\}=u_p \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(g_nz\right)\{-A_n\frac{1}{r_0}K_1\left(q_nr_0\right)+B_n[\frac{1}{r_0}K_1\left(s_nr_0\right)+s_nK_0\left(s_nr_0\right)]\}=-u_p \tag{29}$$

由式（28）（29）得到：

$$B_n=\gamma_nA_n \tag{30}$$

式中：$\gamma_n=\dfrac{\left(2/r_0\right)K_1\left(q_nr_0\right)+q_nK_0\left(q_nr_0\right)}{\left(2/r_0\right)K_1\left(s_nr_0\right)+s_nK_0\left(s_nr_0\right)}$.

土层对桩的水平阻力 p 可表示为：

$$p=\int_0^{2\pi}\left(-\sigma_r\cos\theta+\tau_{r\theta}\sin\theta\right)\Big|_{r=r_0}r_0\mathrm{d}\theta=\sum_{n=1}^{\infty}b_nA_n\cos\left(g_nz\right) \tag{31}$$

式中：$b_n=-\pi r_0\left[q_n^2\left(\lambda_s+2\mu_s\right)K_1\left(q_nr_0\right)+\gamma_ns_n^2\mu_sK_1\left(s_nr_0\right)\right]$.

以上即得平地水平动反力 p 的表达式，但对于斜坡而言将会存在折减效应[8-9]，《公路桥涵地基与基础设计规范》（JTG 3363—2019）[12]建议当桩基础侧面设有斜坡或台阶，且其坡度（横：竖）或台阶总宽与深度之比大于 1：20 时，地基抗力比例系数 m 值应减小 50% 取用. 即通过考虑土体强度折减来计算水平荷载下斜坡桩的受力变形，本文采用类似处理，对反力系数 b_n 进行折减，引入折减因子 ζ，ζ 数值大小与边坡角度等紧密相关[2-4]，例如：尹平保等[2]基于室内模型试验，提出不同坡度 θ_s 下基桩水平极限承载力的

折减系数拟合式$(1-\theta_s/90°)$.

综上即得斜坡土层水平动反力p_s:

$$p_s = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta b_n A_n \cos\left(g_n z\right) \tag{32}$$

3 单桩水平振动

根据假设1),可将图1土层深度H_0对应桩体划入自由段,并在下文求解中将自由段与土层深度H_0对应桩体统称为自由段,相应的入土段则仅表示埋入土中实际计算土层对应桩体.

3.1 单桩振动方程建立

由动力平衡条件建立柱坐标系中桩运动方程.

自由段:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 u_{p0}}{\partial z^4} - m_p \omega^2 u_{p0} = 0 \tag{33}$$

入土段:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 u_{p1}}{\partial z^4} - m_p \omega^2 u_{p1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta b_n A_n \cos\left(g_n z\right) \tag{34}$$

式中:E_p为桩弹性模量;I_p为桩截面惯性矩;u_{p0}、u_{p1}分别为自由段、入土段的桩身水平位移;m_p为桩单位长度质量,$m_p=\rho_p \pi r_0^2$,ρ_p为桩体密度.

3.2 单桩振动方程求解

3.2.1 自由段

令$\lambda^4 = m_p \omega^2/(E_p I_p)$,可得式(33)的解为:

$$u_{p0}(z) = C_1 \cosh(\lambda z) + C_2 \sinh(\lambda z) + C_3 \sin(\lambda z) + C_4 \cos(\lambda z) \tag{35}$$

式中:C_1、C_2、C_3、C_4为待定常数.

由材料力学位移、转角、弯矩和剪力之间的关系可知:

$$\begin{Bmatrix} u_{p0}(z) \\ \varphi_{p0}(z) \\ M_{p0}(z) \\ Q_{p0}(z) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\chi}_0(z) \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} \tag{36}$$

式中:φ_{p0}、M_{p0}、Q_{p0}分别为桩身自由段转角、弯矩和剪力;$\boldsymbol{\chi}_0$为自由段系数矩阵.

$$\boldsymbol{\chi}_0(z) = \begin{bmatrix} \cosh(\lambda z) & \sinh(\lambda z) & \sin(\lambda z) & \cos(\lambda z) \\ \lambda \sinh(\lambda z) & \lambda \cosh(\lambda z) & \lambda \cos(\lambda z) & -\lambda \sin(\lambda z) \\ E_p I_p \lambda^2 \cosh(\lambda z) & E_p I_p \lambda^2 \sinh(\lambda z) & -E_p I_p \lambda^2 \sin(\lambda z) & -E_p I_p \lambda^2 \cos(\lambda z) \\ E_p I_p \lambda^3 \sinh(\lambda z) & E_p I_p \lambda^3 \cosh(\lambda z) & -E_p I_p \lambda^3 \cos(\lambda z) & E_p I_p \lambda^3 \sin(\lambda z) \end{bmatrix} \tag{37}$$

则桩身自由段上、下两端的水平位移、转角、弯矩、剪力的关系可表示为:

$$\begin{Bmatrix} u_{p0}(0) \\ \varphi_{p0}(0) \\ M_{p0}(0) \\ Q_{p0}(0) \end{Bmatrix} = \left[\boldsymbol{\chi}_0(0)\right]\left[\boldsymbol{\chi}_0\left(-L_1 - H_0\right)\right]^{-1} \begin{Bmatrix} u_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ \varphi_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ M_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ Q_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \end{Bmatrix} \tag{38}$$

3.2.2 入土段

式(34)由通解与特解两部分组成,容易得到式(34)的解为:

$$u_{p1}(z) = C_5 \cosh(\lambda z) + C_6 \sinh(\lambda z) + C_7 \sin(\lambda z) + C_8 \cos(\lambda z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta b_n A_n}{E_p I_p\left(g_n^4 - \lambda^4\right)} \cos\left(g_n z\right) \tag{39}$$

由桩周土接触边界条件式(8)(9)可得:

$$C_5 \cosh(\lambda z) + C_6 \sinh(\lambda z) + C_7 \sin(\lambda z) + C_8 \cos(\lambda z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta b_n A_n}{E_p I_p\left(g_n^4 - \lambda^4\right)} \cos\left(g_n z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(g_n z\right) \{-A_n\left[\frac{1}{r_0} K_1\left(q_n r_0\right) + q_n K_0\left(q_n r_0\right)\right] + \gamma_n A_n \frac{1}{r_0} K_1\left(s_n r_0\right)\} \tag{40}$$

利用三角函数$\cos(g_n z)$正交性,式(40)两端同乘$\cos(g_n z)$,在区间$[0,L]$上积分可得:

$$\frac{2}{L}\int_0^L [C_5 \cosh(\lambda z) + C_6 \sinh(\lambda z) + C_7 \sin(\lambda z) + C_8 \cos(\lambda z)] \cos\left(g_n z\right) \mathrm{d}z = \frac{\zeta b_n A_n}{E_p I_p\left(g_n^4 - \lambda^4\right)} - A_n\left[\frac{1}{r_0} K_1\left(q_n r_0\right) + q_n K_0\left(q_n r_0\right)\right] + \gamma_n A_n \frac{1}{r_0} K_1\left(s_n r_0\right) \tag{41}$$

由式(41)可得:

$$A_n = \frac{C_5 F_{1n} + C_6 F_{2n} + C_7 F_{3n} + C_8 F_{4n}}{\frac{\zeta b_n}{E_p I_p\left(g_n^4 - \lambda^4\right)} + \eta_n} \tag{42}$$

式中:$F_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L \cosh(\lambda z) \cos\left(g_n z\right) \mathrm{d}z$,

$F_{2n} = \frac{2}{L}\int_0^L \sinh(\lambda z) \cos\left(g_n z\right) \mathrm{d}z$,

$F_{3n} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\lambda z) \cos\left(g_n z\right) \mathrm{d}z$,

$$F_{4n}=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}\cos(\lambda z)\cos(g_n z)\mathrm{d}z,$$

$$\eta_n=-\left[\frac{1}{r_0}K_1(q_n r_0)+q_n K_0(q_n r_0)\right]+\gamma_n\frac{1}{r_0}K_1(s_n r_0).$$

将式(42)代入式(39)中可得斜坡基桩入土段水平位移 $u_{\mathrm{p}1}$ 解：

$$u_{\mathrm{p}1}(z)=\left[\cosh(\lambda z)-\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_{1n}\cos(g_n z)\right]C_5+\left[\sinh(\lambda z)-\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_{2n}\cos(g_n z)\right]C_6+\left[\sin(\lambda z)-\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_{3n}\cos(g_n z)\right]C_7+\left[\cos(\lambda z)-\sum_{n=1}^{\infty}\kappa_{4n}\cos(g_n z)\right]C_8 \tag{43}$$

式中：$\kappa_{1n}=\dfrac{\zeta b_n F_{1n}}{\zeta b_n+\eta_n E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}(g_n^4-\lambda^4)}$，$\kappa_{2n}=\dfrac{\zeta b_n F_{2n}}{\zeta b_n+\eta_n E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}(g_n^4-\lambda^4)}$，$\kappa_{3n}=\dfrac{\zeta b_n F_{3n}}{\zeta b_n+\eta_n E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}(g_n^4-\lambda^4)}$，$\kappa_{4n}=\dfrac{\zeta b_n F_{4n}}{\zeta b_n+\eta_n E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}(g_n^4-\lambda^4)}$.

由材料力学位移、转角、弯矩和剪力之间的关系可得：

$$\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{p}1}(z)\\ \varphi_{\mathrm{p}1}(z)\\ M_{\mathrm{p}1}(z)\\ Q_{\mathrm{p}1}(z)\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\chi}_1(z)\begin{Bmatrix}C_5\\ C_6\\ C_7\\ C_8\end{Bmatrix} \tag{44}$$

式中：$\varphi_{\mathrm{p}1}$、$M_{\mathrm{p}1}$、$Q_{\mathrm{p}1}$ 分别为桩身入土段转角、弯矩和剪力；$\boldsymbol{\chi}_1$ 为入土段系数矩阵.

$$\boldsymbol{\chi}_1(z)=\begin{bmatrix}\cosh(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{1n}\cos(g_n z) & \sinh(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{2n}\cos(g_n z) & \sin(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{3n}\cos(g_n z) & \cos(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{4n}\cos(g_n z)\\ \lambda\sinh(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{1n}g_n\sin(g_n z) & \lambda\cosh(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{2n}g_n\sin(g_n z) & \lambda\cos(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{3n}g_n\sin(g_n z) & -\lambda\sin(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{4n}g_n\sin(g_n z)\\ E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[\lambda^2\cosh(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{1n}g_n^2\cos(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[\lambda^2\sinh(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{2n}g_n^2\cos(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[-\lambda^2\sin(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{3n}g_n^2\cos(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[-\lambda^2\cos(\lambda z)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{4n}g_n^2\cos(g_n z)\right]\\ E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[\lambda^3\sinh(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{1n}g_n^3\sin(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[\lambda^3\cosh(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{2n}g_n^3\sin(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[-\lambda^3\cos(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{3n}g_n^3\sin(g_n z)\right] & E_{\mathrm{p}}I_{\mathrm{p}}\left[\lambda^3\sin(\lambda z)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\kappa_{4n}g_n^3\sin(g_n z)\right]\end{bmatrix} \tag{45}$$

则入土桩段上、下两端的水平位移、转角、弯矩、剪力的关系可表示为：

$$\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ \varphi_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ M_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ Q_{\mathrm{p}1}(H_1)\end{Bmatrix}=\left[\boldsymbol{\chi}_1(H_1)\right]\left[\boldsymbol{\chi}_1(0)\right]^{-1}\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{p}1}(0)\\ \varphi_{\mathrm{p}1}(0)\\ M_{\mathrm{p}1}(0)\\ Q_{\mathrm{p}1}(0)\end{Bmatrix} \tag{46}$$

结合式(38)和式(46)，考虑桩身连续条件，可得桩底和桩顶的水平位移、转角、弯矩、剪力的关系为：

$$\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ \varphi_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ M_{\mathrm{p}1}(H_1)\\ Q_{\mathrm{p}1}(H_1)\end{Bmatrix}=f_{\mathrm{p}}\begin{Bmatrix}u_{\mathrm{p}0}(-L_1-H_0)\\ \varphi_{\mathrm{p}0}(-L_1-H_0)\\ M_{\mathrm{p}0}(-L_1-H_0)\\ Q_{\mathrm{p}0}(-L_1-H_0)\end{Bmatrix} \tag{47}$$

式中：$f_{\mathrm{p}}=[\boldsymbol{\chi}_1(H_1)][\boldsymbol{\chi}_1(0)]^{-1}[\boldsymbol{\chi}_0(0)][\boldsymbol{\chi}_1(-L_1-H_0)]^{-1}$.

3.3 边界条件

Novak 等[17]给出了平地单桩桩端固定与铰接时的桩动力阻抗的解答，对于斜坡基桩而言，桩端一般嵌入基岩中，故本文给出式(48)桩端固定时的详细解答，铰接可类似得出.

$$u_{\mathrm{p}}\Big|_{z=H_1}=\frac{\partial u_{\mathrm{p}}}{\partial z}\Big|_{z=H_1}=0 \tag{48}$$

桩顶已知边界条件：

$$\begin{cases}M_{\mathrm{p}}\Big|_{z=-L_1-H_0}=M_0\\ Q_{\mathrm{p}}\Big|_{z=-L_1-H_0}=Q_0\end{cases} \tag{49}$$

限于篇幅，下文仅给出桩顶自由、桩端固定时的

详细解答，其他边界条件可类似得出.

3.4 动力阻抗解答

结合边界条件式(48)，由式(47)可得桩顶弯矩、剪力和桩顶水平位移、转角的关系：

$$\begin{Bmatrix} M_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ Q_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{K}_p \begin{Bmatrix} u_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ \varphi_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \end{Bmatrix} \tag{50}$$

式中：$\boldsymbol{K}_p$为动力阻抗矩阵，其表达式为：

$$\boldsymbol{K}_p = -\begin{bmatrix} f_p(1,3) & f_p(1,4) \\ f_p(2,3) & f_p(2,4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_p(1,1) & f_p(1,2) \\ f_p(2,1) & f_p(2,2) \end{bmatrix} \tag{51}$$

桩端铰接时的动力阻抗矩阵为：

$$\boldsymbol{K}_p = -\begin{bmatrix} f_p(1,3) & f_p(1,4) \\ f_p(3,3) & f_p(3,4) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_p(1,1) & f_p(1,2) \\ f_p(3,1) & f_p(3,2) \end{bmatrix} \tag{52}$$

根据动力阻抗的定义[15]，可得单桩水平动力阻抗K_h、摇摆动力阻抗K_r以及水平-摇摆耦合动力阻抗K_{hr}如下：

$$K_h = \frac{Q_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)}{u_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)} = K_p(2,1) \tag{53}$$

$$K_r = \frac{M_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)}{\varphi_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)} = K_p(1,2) \tag{54}$$

$$K_{hr} = \frac{Q_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)}{\varphi_{p0}\left(-L_1 - H_0\right)} = K_p(2,2) \tag{55}$$

3.5 内力变形解答

结合边界条件式(48)(49)，由式(47)可得桩顶水平位移、转角和桩顶弯矩、剪力的关系：

$$\begin{Bmatrix} u_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \\ \varphi_{p0}\left(-L_1 - H_0\right) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{K}_0 \begin{Bmatrix} M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} \tag{56}$$

式中：$\boldsymbol{K}_0$为系数矩阵，其表达式为：

$$\boldsymbol{K}_0 = -\begin{bmatrix} f_p(1,1) & f_p(1,2) \\ f_p(2,1) & f_p(2,2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_p(1,3) & f_p(1,4) \\ f_p(2,3) & f_p(2,4) \end{bmatrix} \tag{57}$$

综上结合式(36)(44)即可得桩身内力变形解.

4 算例验证分析

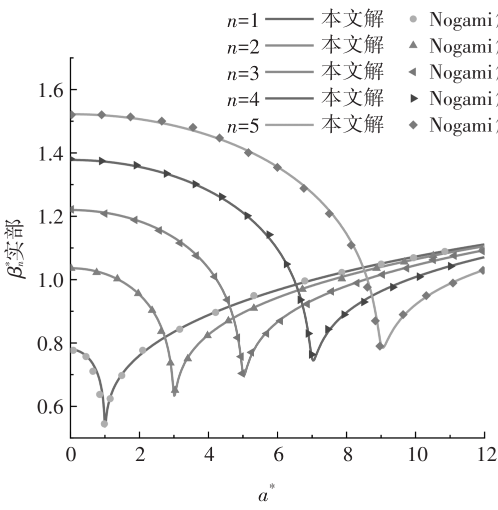
因现有文献鲜有斜坡基桩水平动力试验或数值模拟报道，难以直接用对应试验结果验证本文解答正确性，故下文将分两步进行验证，其一是不考虑斜坡效应，将解答退化为平地基桩动力问题，并与已有平地动力解析解对比，验证桩周土振动方程以及基桩动力阻抗方程解答正确性；其二是不考虑水平动荷载的影响，将解答退化为斜坡基桩静力问题，与已有斜坡基桩静力数值试验对比，验证斜坡基桩水平振动响应解答的正确性.

为使得到的结论具有普遍适用性，采用无量纲方法进行验证，其中：$z^*=z/L$；$u_p^*=u_p/r_0$；$a_0^*=L/(V_s\omega)$；$\lambda^* = L\sqrt[4]{m\omega^2/E_pI_p}$. 土中的纵波速度$V_1$和横波速度$V_s$及其比值$\eta_s$为：$V_1 = \sqrt{\left(\lambda_s + 2\mu_s\right)/\rho_s}$，$V_s = \sqrt{\mu_s/\rho_s}$，$\eta_s = V_1/V_s = \sqrt{\left(\lambda_s + 2\mu_s\right)/\mu_s}$. 桩体剪切波速为：$V_p = \sqrt{E_p/\rho_p}$，桩土波速比$\eta'$为：$\eta' = \dfrac{V_s}{V_p} = \sqrt{\dfrac{\mu_s\rho_p}{E_p\rho_s}}$.

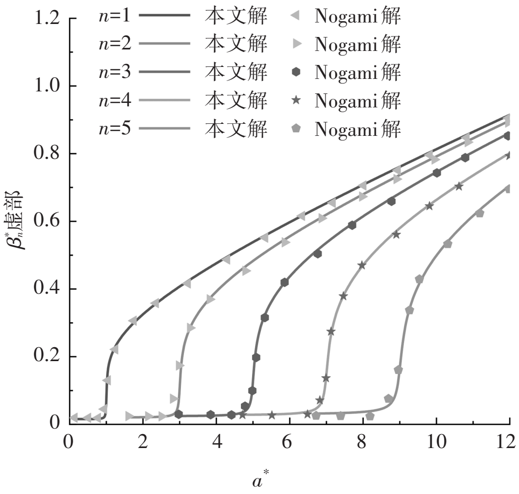
4.1 算例1

为验证本文桩周土振动方程的正确性，本文与Nogami等[16]理论解进行对比验证，基本参数为：$r_0/H_1=100$，$\nu_s=0.4$，$\xi_s=0.01$，$\zeta=1$，$H_0=0$，$L_1=0$，计算结果如图2所示. 图2中土体第n振动模态阻抗因子$\beta_n=b_n/\eta_s$（第n模态下桩在发生单位水平位移时，对应土体在$r=r_0$产生的水平阻力）；a_n为土体第n阶固有频率，$a_n=\pi(2n-1)/2$，$n=1,2,3,\cdots$. 图2中横纵坐标分别为：无量纲土体频率$a^*=a_0^*/a_1$（$a_1=\pi/2$）；无量纲土体阻抗因子$\beta_n^*=\beta_n/(\pi\mu_s)$，$\beta_n^*$通常为复数，根据定义[16]，$\beta_n^*$实部为土体刚度，$\beta_n^*$虚部为阻尼.

由图2可知，本文解与Nogami理论解[16]吻合较好，表明本文桩周土振动方程是正确的.



(a)实部(刚度)



(b)虚部(阻尼)

图2　不同振动模态n下，土体阻抗因子β_n^*随频率a^*的变化对比

Fig.2　Comparison of soil resistance factor β_n^* with frequency a^* under different vibration modes n

4.2　算例2

为验证本文斜坡段基桩动力阻抗方程的正确性，令$H_0=0$，$L_1=0$，$\zeta=1$，即退化为平地基桩动力阻抗解，与Chau等[22]解析解进行验证．基本参数为：$\nu_s=0.4$，$\rho_s/\rho_p=0.6$，$L/r_0=H_1/r_0=30$，$\xi_s=0.05$，$\eta'=0.01$．边界条件为桩端铰接，计算结果如图3所示．图3中，横坐标为λ^*/λ_0，其中λ_0为无土的独立弹性桩λ^*的最小值，对于桩端铰接，K_h对应的$\lambda_0=1.571$，其他边界条件取值见文献[22]．纵坐标$K_h'=K_h$(动力)$/K_h$(静力)，K_h(静力)可令$\omega\to0$，通过计算K_h(动力)的值确定．

由图3可知，本文解与文献[22]解吻合较好，验证了本文动力阻抗方程以及相应程序的正确性．

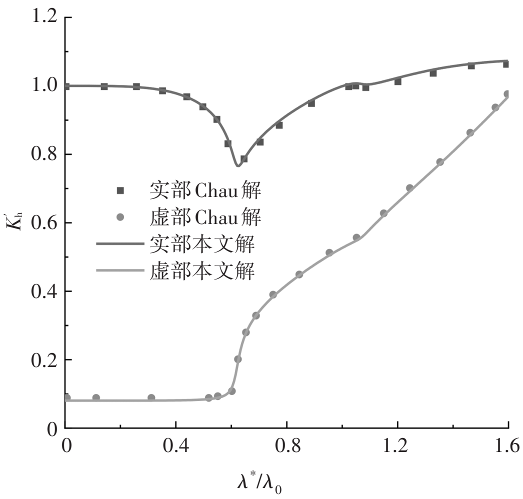


图3　无量纲水平动力阻抗K_h'随频率的变化对比

Fig.3　Comparison of dimensionless horizontal dynamic resistance K_h' with frequency

4.3　算例3

为验证本文斜坡基桩水平振动响应解析解的正确性与适用性，令$\omega\to0$，即退化为水平静载下斜坡基桩解答，与Peng等[11]基于张-花高速公路现场试验的ABAQUS有限元软件解进行对比．基本参数如下：$L=L_2=18$，$r_0=1$ m，$\rho_p=2\ 400$ kg/m³，$E_p=29\ 600$ MPa，$\nu_s=0.3$，$E_s=100$ MPa，$\rho_s=2\ 000$ kg/m³，$\zeta=0.5$．桩顶受水平荷载$Q_0=200$ kN作用，且桩顶自由，桩端固定．通过有限元解最大位移值反算土层深度$H_0=1D_p$，计算结果如图4所示．图4中纵轴坐标参照文献[11]坐标系，以桩顶为零点．

图4表明本文解与文献[11]解吻合很好，且相比于规范法误差更小，验证了本文解的适用性．

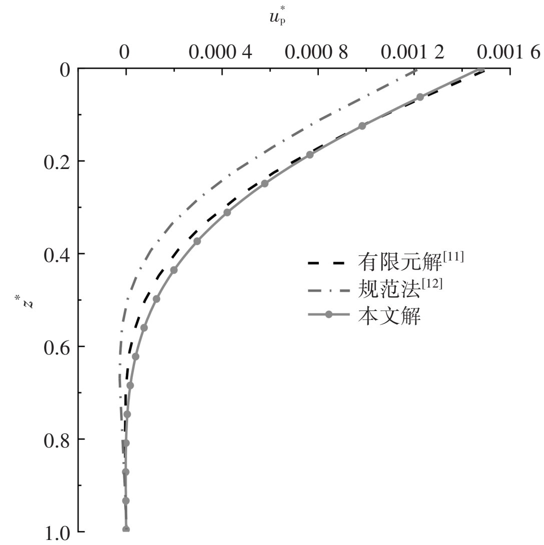


图4　桩身水平位移结果对比

Fig.4　Comparison of pile lateral displacement results

5　结　论

本文基于土体三维波动方程，引入折减因子并忽略桩前一定深度范围内的浅层土体的水平抗力作用，求得斜坡桩周土水平动反力；在此基础上，利用Euler模型推导斜坡基桩自由段以及入土段水平振动控制方程，运用传递矩阵法结合边界条件得到斜坡段基桩水平振动响应解析解，并通过退化分别与已有平地基桩水平振动响应解析解以及斜坡基桩静力变形有限元解进行对比验证了本文斜坡基桩模型解的正确性与合理性，可为斜坡基桩水平振动研究提供初步理论参考．

参考文献

[1]　赵明华，杨超炜，陈耀浩，等．高陡横坡段桩柱式桥梁双桩基础

现场试验研究[J]. 岩土工程学报,2018,40(2):329-335.
ZHAO M H, YANG C W, CHEN Y H, *et al*. Field tests on double-pile foundation of bridges in high-steep cross slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2018, 40(2): 329-335.(In Chinese)

[2] 尹平保,贺炜,张建仁,等. 斜坡基桩的斜坡空间效应及其水平承载特性研究[J]. 土木工程学报,2018,51(4):94-101.
YIN P B, HE W, ZHANG J R, *et al*. Study on spatial effect of slope and horizontal bearing behavior of piles in sloping ground [J]. China Civil Engineering Journal, 2018, 51(4): 94-101.(In Chinese)

[3] 杨明辉,聂华杰,赵明华.边坡段水平受荷桩桩前土抗力折减效应的模型试验研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2019,46(3):114-121.
YANG M H, NIE H J, ZHAO M H. Model testing study on effect of predicament resistance reduction on lateral loaded pile near slope [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2019, 46(3): 114-121.(In Chinese)

[4] GEORGIADIS K, GEORGIADIS M. Undrained lateral pile response in sloping ground[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, 136(11): 1489-1500.

[5] NG C W W, ZHANG L M. Three-dimensional analysis of performance of laterally loaded sleeved piles in sloping ground[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, 127(6): 499-509.

[6] 赵明华,彭文哲,杨超炜,等.高陡横坡段桥梁双桩内力计算有限差分解[J].中国公路学报,2019,32(2):87-96.
ZHAO M H, PENG W Z, YANG C W, *et al*. Finite difference solution of bridge double-pile structure on a steep transverse slope[J]. China Journal of Highway and Transport, 2019, 32(2): 87-96.(In Chinese)

[7] 杨超炜,赵明华,陈耀浩,等.高陡横坡段桩柱式桥梁双桩基础受力分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2018,45(3):129-135.
YANG C W, ZHAO M H, CHEN Y H, *et al*. Force analysis of bridge double-piles foundation in high and steep cross slopes[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(3): 129-135.(In Chinese)

[8] 尹平保,聂道流,杨朝晖,等.斜坡基桩 p-y 曲线及水平承载计算方法研究[J].岩石力学与工程学报,2018,37(4):996-1003.
YIN P B, NIE D L, YANG Z H, *et al*. The p-y curve and computation method of the horizontal bearing capacity of piles in sloping ground[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(4): 996-1003.(In Chinese)

[9] 杨明辉,冯超博,赵明华,等.考虑坡度效应的水平受荷桩应变楔计算方法[J].岩土力学,2018,39(4):1271-1280.
YANG M H, FENG C B, ZHAO M H, *et al*. A method for calculating laterally loaded pile using strain wedge model considering slope effect[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(4): 1271-1280.(In Chinese)

[10] PENG W Z, ZHAO M H, ZHAO H, *et al*. Behaviors of a laterally loaded pile located in a mountainside[J]. International Journal of Geomechanics, 2020, 20(8): 04020123.

[11] PENG W Z, ZHAO M H, XIAO Y, *et al*. Analysis of laterally loaded piles in sloping ground using a modified strain wedge model [J]. Computers and Geotechnics, 2019, 107: 163-175.

[12] 公路桥涵地基与基础设计规范:JTG 3363—2019[S].北京:人民交通出版社股份有限公司,2020.
Specifications for design of foundation of highway bridges and culverts: JTG 3363—2019[S]. Beijing: China Communications Press Co., Ltd., 2020. (In Chinese)

[13] 周绪红,蒋建国,邹银生.粘弹性介质中考虑轴力作用时桩的动力分析[J].土木工程学报,2005,38(2):87-91.
ZHOU X H, JIANG J G, ZOU Y S. Dynamic analysis of piles under axial loading and lateral dynamic force in visco-elastic medium[J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(2): 87-91.(In Chinese)

[14] 胡安峰,谢康和,王奎华.粘弹性地基中有限长桩横向受迫振动问题解析解[J].岩土力学,2003,24(1):25-29.
HU A F, XIE K H, WANG K H. An analytical solution for lateral vibration of a pile with finite length pile in viscoelastic subgrade [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(1): 25-29.(In Chinese)

[15] 黄茂松,边学成,陈育民,等.土动力学与岩土地震工程[J]. 土木工程学报,2020,53(8):64-86.
HUANG M S, BIAN X C, CHEN Y M, *et al*. Soil dynamics and geotechnical earthquake engineering[J]. China Civil Engineering Journal, 2020, 53(8): 64-86.(In Chinese)

[16] NOGAMI T, NOVAK M. Resistance of soil to a horizontally vibrating pile [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, 5(3): 249-261.

[17] NOVAK M, NOGAMI T. Soil-pile interaction in horizontal vibration[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, 5(3): 263-281.

[18] ZHENG C J, LIU H L, DING X M. Lateral dynamic response of a pipe pile in saturated soil layer[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2016, 40(2): 159-184.

[19] 栾鲁宝,丁选明,周仕礼,等.考虑竖向荷载的桩基水平振动响应解析解[J].建筑结构,2015,45(19):80-86.
LUAN L B, DING X M, ZHOU S L, *et al*. Analytical solution of lateral vibration response of an axial loaded pile[J]. Building Structure, 2015, 45(19): 80-86.(In Chinese)

[20] HU A F, FU P, XIA C Q, *et al*. Horizontal impedances of saturated soil layer with radially inhomogeneous boundary zone[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 111: 184-192.

[21] 赵密,黄义铭,王丕光,等.桩顶水平动荷载作用下水-桩-土相互作用的解析解[J].岩土工程学报,2022,44(5):907-915.
ZHAO M, HUANG Y M, WANG P G, *et al*. Analytical solution for water-pile-soil interaction under horizontal dynamic loads on pile head[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(5): 907-915. (In Chinese)

[22] CHAU K T, YANG X. Nonlinear interaction of soil-pile in horizontal vibration[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(8): 847-858.