文章编号：1674-2974（2022）10-0024-10　　DOI：10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2022353

基于数值分析理论的低复杂度MED算法

杨喜[1]，田冲[1]，方如意[2]，刘泽宇[1]，张银行[1]，雷可君[1†]
（1. 吉首大学 信息科学与工程学院，湖南 吉首 416000；
2. 中南大学 计算机学院，湖南 长沙 410100）

摘　要：经典的最大特征值检测（MED）算法在检测相关信号时具有优异的性能. 然而，随着信号维度的不断增大，MED算法面临着严重的感知判决量和判决门限计算的效率和实现问题，从而极大地限制了该算法在现代认知通信系统中的进一步应用. 为此，提出了一种基于数值分析理论框架的低复杂度MED频谱感知算法. 所提算法利用Rayleigh商加速幂法迭代地计算感知判决量，与经典的幂法相比，在检测高维信号时具有更快的收敛速度；此外，不同于经典的查表法，新算法基于三次样条插值法快速、准确地确定任意给定目标虚警概率所对应的感知判决门限. 所提MED算法在保持原有算法检测性能的同时，有效提升了计算效率，降低了算法实现复杂度；其对于高维条件下的频谱感知问题尤其具有吸引力. 最后，仿真结果证明了所提算法的有效性.

关键词：高维频谱感知；最大特征值检测；Rayleigh商加速；三次样条插值；数值分析理论
中图分类号：TN925　　　　**文献标志码**：A

Low Complexity MED Algorithm Based on Numerical Analysis Theories

YANG Xi[1]，TIAN Chong[1]，FANG Ruyi[2]，LIU Zeyu[1]，ZHANG Yinhang[1]，LEI Kejun[1†]
（1. College of Information Science and Engineering，Jishou University，Jishou 416000，China；
2. School of Computer Science and Engineering，Central South University，Changsha 410100，China）

Abstract：The classical Maximum Eigenvalue Detection (MED) algorithm has an excellent performance in detecting correlated signals. However, with the increasing signal dimensionality, the MED algorithm faces serious problems in the calculation efficiency and implementation of the test statistic and decision threshold, which greatly limits the further application of the algorithm in modern cognitive communication systems. To this end, a low-implementation complexity MED algorithm based on a numerical analysis theoretical framework is proposed. The new algorithm uses the Rayleigh quotient accelerated power method to iteratively compute the test statistic, which has a fast convergence rate in detecting high-dimensional signals compared with the classical power method. Meanwhile, different from the classical look-up table method, the new threshold calculation method based on the cubic spline in-

* 收稿日期：2021-12-28
基金项目：国家自然科学基金资助项目（62161012，61861019），National Natural Science Foundation of China（62161012，61861019）；湖南省教育厅科学研究项目（21A0335），Scientific Research Project of Department of Education of Hunan Province（21A0335）；国家级大学生创新创业训练项目（S202010531009，202110531029），National Innovation and Entrepreneurship Training Program for College Students（S202010531009，202110531029）；吉首大学研究生科研创新项目（Jdy20014），Master Scientific Research Innovation Project of JSU（Jdy20014）
作者简介：杨喜（1978—），男，湖南湘阴人，吉首大学教授
† 通信联系人，E-mail：leikejun-123@163.com

terpolation method is proposed, which can quickly determine the decision threshold corresponding to any given target false-alarm probability. The proposed MED algorithm effectively improves the computational efficiency and reduces the complexity of algorithm implementation while maintaining the detection performance of the original algorithm, which is particularly attractive for spectrum sensing problems in high-dimensional conditions. Finally, the simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: high dimensional spectrum sensing; maximum eigenvalue detection; Rayleigh quotient acceleration; cubic spline interpolation; numerical analysis theory

随着物联网(IoT)、5G等无线通信技术的快速发展,现有频谱资源正变得日益匮乏.传统频谱分配方案在特定时间、区域将特定频带固定分配给授权用户使用.然而,由于业务使用的不均衡性,这种固定的频谱分配方式将不可避免地导致部分频带陷入拥堵而部分频带处于空闲的状况,从而严重影响频谱使用效率.为此,文献[1]提出利用认知无线电(Cognitive Radio,CR)技术来提升现有频谱资源的利用效率.CR是指一个能够不断进行频谱感知、动态辨别并能对空闲的授权频带进行频谱接入的无线电系统[2].在该系统中,次级用户(Secondary User,SU)能通过未被主用户(Primary User,PU)占用的频带进行通信,同时保证不对PU之间的通信造成干扰.为此,SU需要采用频谱感知技术以可靠地检测目标频段上主用户信号是否出现,进而判断能否接入该频段[3].

经典的频谱感知算法包括匹配滤波检测(Matched Filtering Detection,MFD)[4]、能量检测(Energy Detection,ED)[5]以及基于特征值的检测[6].当PU信号及噪声信号信息完全已知且SU与PU之间同步时,MFD具有最佳的检测性能.然而,SU在检测过程中很难获得上述信息,且在低信噪比条件下极难做到信号同步.ED算法是一种经典的半盲检测算法,其不需要PU信号及同步信息,且工程实现简单,对噪声方差已知的独立高斯信号具有最优的检测性能.但在实际应用中,ED检测性能受噪声不确定性现象和信号相关性的影响很大.文献[7]和文献[8]的研究表明,当存在噪声不确定性或信号高度相关时,ED的检测性能将显著下降.得益于随机矩阵理论的快速发展,近年来基于特征值的检测方法引起了研究者的广泛关注.文献[9]提出了一种基于取样协方差矩阵最大特征值的半盲检测算法.该算法利用取样协方差矩阵最大特征值构造判决量,利用高维随机矩阵中Tracy-Widom分布计算判决门限.由于取样协方差矩阵很好地捕捉了多天线信号的相关性,因此基于最大特征值的检测算法在检测高相关信号时表现出比ED算法更为优异的检测性能[9].文献[10]的结论进一步表明最大特征值检测实际上是在最大化多天线输出信噪比条件下的最佳检测器形式.值得一提的是,通过对噪声方差进行估计,可以进一步得到不同场景下各种基于最大特征值的全盲检测器形式[11-13].正是由于上述优点,MED算法成为认知无线电中相关信号频谱检测场景中广泛关注的半盲检测方法.

MED算法涉及取样协方差矩阵的特征值计算,以及给定目标虚警概率下判决门限的计算.然而,前者要求进行矩阵特征值分解,而后者则包含复杂微分方程的求解、复杂函数的积分及方程求解运算[9,14-16].以上两部分的计算量都非常大,对频谱感知的时限性要求提出了极大的挑战.同时非常不利于工程实现的需要.特别是随着CR与5G、IoT等技术的融合[17-20],将来的频谱感知场景中的接收信号通常呈现高维特征.这一新特征将导致传统的MED算法的运算量和实现复杂度急剧上升而难以实际应用.令人遗憾的是,目前的工作仍集中在低维场景中算法检测性能的研究,而对高维条件下算法的高效实现尚未见诸报道.对于MED算法中特征值的计算,尽管文献[15]提出了一种基于幂法的计算方法,然而该方法在高维信号及低信噪比条件下存在收敛速度慢的问题.此外,门限的计算涉及复杂的逆Tracy-Widom分布函数计算,而该逆函数目前尚无明确的解析表达形式[21,22].因此,目前的研究均需依赖专用软件计算得出一些有限的离散值,然后利用查表的方法获得一些常用目标虚警概率P_{FA}所对应的判决门限值.然而在实际的感知应用中,往往需要根据实际情况灵活确定目标虚警概率值[23-25],此时获得这些新的P_{FA}值所对应的门限值将不得不面临复杂的计算问题.

如何有效解决感知判决量和判决门限的计算难题,设计出相应的低复杂度算法,对于解决高维场景下 MED 的高效频谱感知具有极其重要的应用价值.有鉴于此,本文基于数值分析的理论,提出一种结合 Rayleigh 商加速幂法和三次样条插值法的最大特征值检测算法.新算法在保持优良检测性能的同时显著降低了特征值和判决门限的计算复杂度,有效提高了计算效率并有利于后续的硬件实现.

1 经典 MED 算法及其面临的计算问题

假定认知节点配置的天线数量为 M,并对多天线接收信号进行 N 次连续采样.设第 n 次采样得到的接收信号向量为 $\boldsymbol{x}(n)=[x_1(n), x_2(n), \cdots, x_M(n)]^{\mathrm{T}}$,这里 n=1, 2, …, N.若存在 PU 信号,则实际接收信号为 PU 信号与噪声信号的叠加,即有:

$$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{\eta}(n) \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{s}(n)$ 表示经过无线信道接收到的 PU 信号向量,$\boldsymbol{\eta}(n)$ 表示 M 维加性高斯白噪声向量.标记 $\boldsymbol{\eta}(n)\sim\mathcal{N}_{\mathrm{M}}\left(0, \sigma_\eta^2 \boldsymbol{I}\right)$,其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,σ_η^2 为噪声功率.不失一般性,通常假定 PU 信号与噪声信号之间统计独立.相应地多天线频谱感知问题在数学上可以表示为如下二元假设检验问题:

$$\begin{cases} H_0: \boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{\eta}(n) \\ H_1: \boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{s}(n)+\boldsymbol{\eta}(n) \end{cases} \quad n=1, 2, \cdots, N \tag{2}$$

式中:H_1 表示 PU 信号存在,H_0 则表示 PU 信号不存在.有必要指出,上述模型同样适用于协作式频谱感知问题,此时 M 相应代表参与协作的认知节点数目.由 M 根天线的接收信号可以形成如下 $M\times N$ 维接收信号矩阵:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \cdots & x_M(N) \end{bmatrix} \tag{3}$$

则接收信号的取样协方差矩阵可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x(N)=\frac{1}{N}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n) \tag{4}$$

式中上标 T 表示转置运算.引入如下归一化取样协方差矩阵:

$$\hat{\boldsymbol{R}}_x=\frac{\hat{\boldsymbol{R}}_x(N)}{\sigma_\eta^2}=\frac{1}{N\sigma_\eta^2}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}(n)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(n) \tag{5}$$

经典的 MED 算法流程可以归纳如下.首先,计算取样协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_x(N)$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$,并由此计算感知判决量 $\lambda_{\mathrm{MED}}=\lambda_{\max}/\sigma_\eta^2$(实际上 λ_{MED} 即为归一化取样协方差矩阵 $\hat{\boldsymbol{R}}_x$ 的最大特征值);其次,根据随机矩阵理论中 Tracy-Widom 分布理论计算感知判决门限 γ_{MED};最后,认知节点实施感知判决:若 $\lambda_{\mathrm{MED}}\geqslant\gamma_{\mathrm{MED}}$,则判定 PU 信号存在;反之,则判定 PU 信号不存在.其中,给定目标虚警概率 P_{FA} 条件下判决门限的计算表达式为[9]:

$$\gamma_{\mathrm{MED}}=\frac{\left(\sqrt{N}+\sqrt{M}\right)^2}{N}\cdot\left[1+\frac{\left(\sqrt{N}+\sqrt{M}\right)^{-2/3}}{(NM)^{1/6}}F_1^{-1}(1-P_{\mathrm{FA}})\right] \tag{6}$$

式中:$F_1^{-1}(\cdot)$ 是 1 阶 Tracy-Widom 分布的累积分布函数 $F_1(\cdot)$ 的逆函数.由于数学分析的复杂性,目前尚未找到 $F_1^{-1}(\cdot)$ 的显式解析表达式.因此,$F_1^{-1}(1-P_{\mathrm{FA}})$ 的值需通过解方程 $F_1(x)=1-P_{\mathrm{FA}}$ 才能获得.注意到 $F_1(x)$ 定义为:

$$F_1(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\left[q(u)+(u-x)q^2(u)\right]\mathrm{d}u\right\} \tag{7}$$

式中:$q(u)$ 表示 Painlevé 函数,其定义为如下非线性 Painlevé 微分方程的解:

$$q''(u)=uq(u)+2q^3(u) \tag{8}$$

由式(7)可知 $F_1^{-1}(1-P_{\mathrm{FA}})$ 为如下复杂方程的解:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\left[q(u)+(u-x)q^2(u)\right]\mathrm{d}u\right\}=1-P_{\mathrm{FA}} \tag{9}$$

从上面的分析可知,经典 MED 算法的计算复杂度主要来自于最大特征值和判决门限的计算.现有的 MED 算法在计算最大特征值时采用特征值分解或者幂法求解.基于特征值分解的方法需要计算 $\hat{\boldsymbol{R}}_x$ 的所有特征值,其计算效率低下,不适于感知判决量的快速计算的需要.相对于特征值分解而言,尽管幂法在一定程度上提高了计算效率,但是该方法在高维接收信号条件或低信噪比条件下计算量将急剧增加.另一方面,由于目前尚无 $F_1^{-1}(\cdot)$ 的解析表达式,现有的工作需联立式(8)和式(9)以确定判决门限.该

过程涉及二阶Painlevé微分方程的求解、Painlevé函数$q(u)$的复杂积分和指数运算，以及给定P_{FA}条件下复杂方程的求解.显然，以上两部分的计算需消耗大量计算资源及计算时间.一方面，这对于处理能力有限的认知节点而言显然难以承受，另一方面，认知无线电对于频谱感知有严格的时间限制，大量的计算将导致无法满足频谱感知的时限性要求.

2　基于数值计算理论的低复杂度MED算法

本节结合Rayleigh商加速幂法和三次样条插值方法，提出一种基于数值计算理论的低复杂度MED算法.2.1和2.2小节将针对上述两个方面分别展开.

2.1　Rayleigh商加速幂法计算感知判决量

传统MED算法采用特征值分解的方法计算判决量，其计算复杂度高[14].注意到判决量只需用到归一化取样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x$的最大特征值，因此文献[15]采用幂法计算最大特征值以降低复杂度.注意到$\hat{\boldsymbol{R}}_x$是M阶实对称矩阵，故由矩阵理论可知$\hat{\boldsymbol{R}}_x$有M个线性无关的特征向量$\boldsymbol{x}_i=[x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iM}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,M)$.相应地有$\hat{\boldsymbol{R}}_x\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$，其中$\lambda_i$是$\hat{\boldsymbol{R}}_x$对应于特征向量$\boldsymbol{x}_i$的特征值.不妨假设$|\lambda_1|>|\lambda_2|\geqslant|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_M|$，则有$\lambda_{\mathrm{MED}}=\lambda_1$.设$\boldsymbol{v}_0$是任意给定的非零向量，则其可以唯一地表示为：

$$\boldsymbol{v}_0=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \tag{10}$$

这里不妨设$\alpha_1\neq 0$.构造如下向量序列：

$$\boldsymbol{u}_k=\hat{\boldsymbol{R}}_x\boldsymbol{v}_{k-1} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k/b_k \tag{12}$$

当$b_k=\max(\boldsymbol{u}_k)$时，即为文献[15]所采用的幂法，这里$\max(\boldsymbol{u}_k)$表示取向量$\boldsymbol{u}_k$中的最大元素.由幂法的基本理论可知，当$k$充分大时，有：

$$\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{k\to\infty}\max(\boldsymbol{u}_k)=\lambda_{\mathrm{MED}}+O\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{\mathrm{MED}}}\right)^k\right] \tag{13}$$

由式(13)可知利用幂法计算λ_{MED}的收敛速度取决于$|\lambda_2/\lambda_{\mathrm{MED}}|$的大小，该值越接近1则迭代收敛速度越慢.值得注意的是，在认知无线电网络中，当主用户信号比较弱或者未出现时有$\hat{\boldsymbol{R}}_x\to\boldsymbol{I}$，相应地则有$|\lambda_2/\lambda_{\mathrm{MED}}|\to 1$.这一情况使得幂法在低信噪比条件下的计算效率大大降低，将显著提升高维条件下MED算法的计算复杂度.为此，本文提出一种基于Rayleigh商加速理论计算判决量的方法.在该方法中，首先基于Rayleigh商理论构造新的迭代序列

$$b_k'=\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}_x\boldsymbol{v}_k/\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_k \tag{14}$$

不难证明[14]：

$$b_k'=\lambda_{\mathrm{MED}}\cdot\frac{1+\sum_{i=2}^{M}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\mathrm{MED}}}\right)^{2k+1}}{1+\sum_{i=2}^{M}\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\mathrm{MED}}}\right)^{2k}} \tag{15}$$

故当k充分大时有：

$$b_k'=\lambda_{\mathrm{MED}}+O\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{\mathrm{MED}}}\right)^{2k}\right]\approx\lambda_{\mathrm{MED}} \tag{16}$$

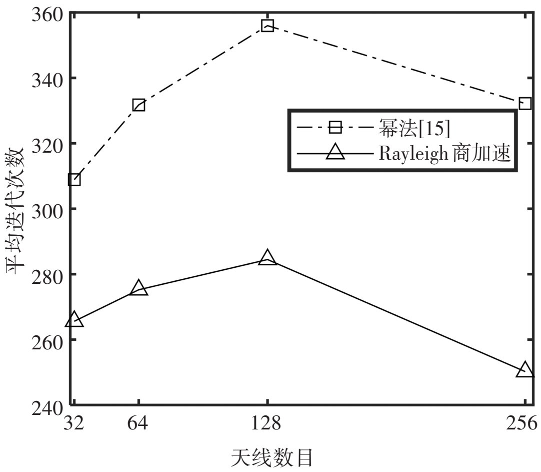
对比式(13)和式(16)不难发现，b_k'比b_k能更快地收敛到归一化取样协方差矩阵的最大特征值λ_{MED}，从而可以有效提升高维条件下低信噪比或主用户信号未出现时MED算法的计算效率.基于Rayleigh商加速幂法计算感知判决量的流程如表1所示.

表1　Rayleigh商加速幂法计算感知判决量

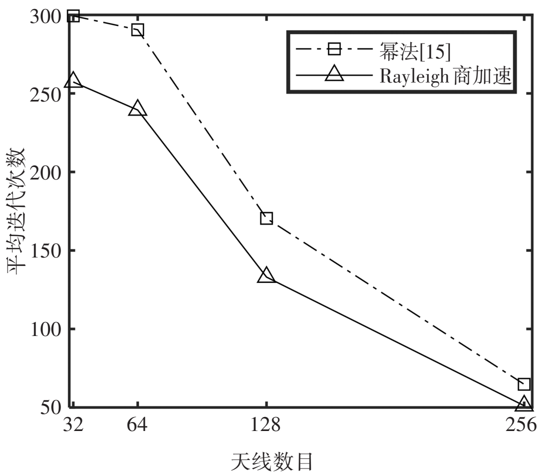
Tab. 1　Rayleigh quotient accelerated power method for computing the sensing statistic

算法1：Rayleigh商加速幂法计算感知判决量	
步骤1	初始化$\boldsymbol{v}_0=[0,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}$、误差界$\varepsilon$、最大迭代次数$K$；
步骤2	依据式(5)计算归一化取样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x$；
步骤3	对于k=1，2，…，K；
步骤4	$\boldsymbol{u}_k=\hat{\boldsymbol{R}}_x\boldsymbol{v}_{k-1}$；
步骤5	$b_k'=\boldsymbol{v}_{k-1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}_x\boldsymbol{v}_{k-1}/\boldsymbol{v}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{k-1}$；
步骤6	$\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{u}_k/b_k'$；
步骤7	若$\lVert\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}_{k-1}\rVert_\infty<\varepsilon$则终止并输出$\lambda_{\mathrm{MED}}=b_k'$；否则$k$=$k$+1；
步骤8	如果$k=K+1$，终止迭代计算

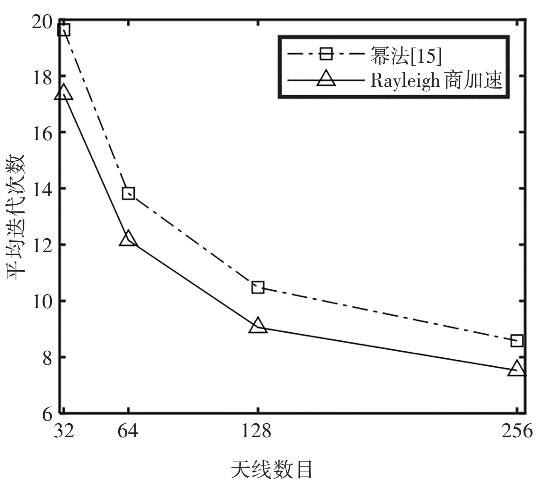
图1给出了信噪比SNR分别为−29 dB、−26 dB和−15 dB，最大迭代次数K=500，误差界$\varepsilon=10^{-4}$，以及天线数目M=32，64，128，256时，文献[15]所提方法和本文所提方法的平均收敛次数对比情况.由仿真结果可知，本文所提方法比文献[15]的方法有更快的收敛速度.特别是在低信噪比条件下，这种优势将变得更为明显.与此同时，还可以看出随着信噪比和天线数目的增大，本文所提方法在高维接收条件下有着极快的收敛速度，因而非常适用于大规模多天线或者大规模协作场景中的频谱感知问题.



(a)SNR=-29 dB



(b)SNR=-26 dB



(c)SNR=-15 dB

图1 不同信噪比时幂法与所提算法计算感知判决量的平均迭代次数对比

Fig. 1 Comparison of the average number of iterations between the power method and the proposed algorithm for calculating the test statistic at different signal-to-noise ratios

2.2 三次样条插值法计算判决门限

由前面的分析可知,利用现有方法计算任意给定的 P_{FA} 值对应的判决门限时存在两方面的问题:(1)只能正向计算累积分布函数值 $F_1(\cdot)$,而不能计算其逆函数 $F_1^{-1}(\cdot)$ 的值,但是判决门限的计算用到的却是 $F_1^{-1}(\cdot)$ 的值;(2)只能给出一些常用 P_{FA} 值(如0.1,0.05等),然而实际问题则可能需要用到任意 P_{FA} 值所对应的门限求解.为解决上述两个难题,本节提出一种基于三次样条插值的 $F_1^{-1}(\cdot)$ 计算方法,利用该方法可以实时计算出任意给定 P_{FA} 时所对应的判决门限值.

经典的插值方法包括Lagrange插值、Hermite插值和样条插值法[14].其中,Lagrange插值随着插值次数增大将出现龙格(Runge)现象,曲线两端易出现震荡,而Hermite插值需要各节点的导数值.三次样条插值法则克服了上述缺点,且近似曲线在插值节点处连续且光滑.综合以上考虑,本文选择利用三次样条插值方法求解 $F_1^{-1}(t)$ 近似曲线 $G(t)$. 文献[16]利用专业软件计算了1 051个1阶Tracy-Widom累积分布函数的离散值.为了兼顾插值精度与计算复杂度,通过大量的实验,本文选取其中的20个点作为插值基点.具体的插值基点 (t_l, g_l) 如表2所示,这里 $l=0,1,\cdots,19$.

表2 插值基点

Tab. 2 Interpolation base points

l	t_l	g_l	l	t_l	g_l	l	t_l	g_l
0	0.000 059	−5.37	7	0.108 503	−2.73	14	0.995 809	2.52
1	0.000 365	−4.93	8	0.271 513	−2.01	15	0.997 771	2.86
2	0.000 946	−4.67	9	0.659 912	−0.74	16	0.999 478	3.59
3	0.005 733	−4.10	10	0.745 724	−0.41	17	0.999 880	4.27
4	0.022 132	−3.57	11	0.904 799	0.49	18	0.999 885	4.29
5	0.037 180	−3.33	12	0.965 559	1.24	19	0.999 955	4.69
6	0.053 976	−3.14	13	0.983 529	1.72			

设区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的三次样条插值多项式为:

$$G_i(t)=\sum_{k=1}^{4} a_{ki}\left(t-t_i\right)^{4-k},\ i=0,1,\cdots,18 \tag{17}$$

式中:a_{ki} 表示三次样条插值多项式的系数.标记相邻插值基点之间的步长为

$$h_i=t_{i+1}-t_i \tag{18}$$

利用三次样条插值理论,基于非节点边界条件可建立如下线性方程组:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_0+h_1 & -h_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h_{17} & 2(h_{17}+h_{18}) & h_{18} \\ 0 & \cdots & \cdots & -h_{18} & h_{17}+h_{18} & -h_{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{19} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g_2-g_1}{h_1} - \frac{g_1-g_0}{h_0} \\ \frac{g_3-g_2}{h_2} - \frac{g_2-g_1}{h_1} \\ \frac{g_4-g_3}{h_3} - \frac{g_3-g_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{g_{19}-g_{18}}{h_{18}} - \frac{g_{18}-g_{17}}{h_{17}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

利用式(18)和表2的数据可计算得到h_i，将其与g_i一并代入式(19)，可最终计算得到m_l(l=0，1，⋯，19).在此基础上，各三次样条插值函数的系数a_{ki}可计算如下：

$$a_{1i} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \tag{20}$$

$$a_{2i} = \frac{m_i}{2} \tag{21}$$

$$a_{3i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_{i+1} + 2m_i) \tag{22}$$

$$a_{4i} = g_i \tag{23}$$

由此得到1阶Tracy-Widom分布的逆累积分布函数$F_1^{-1}(\cdot)$的三次样条函数表达形式：

$$G(t) = \begin{cases} 750\,394\,218.27t^3 - 2\,148\,127.63t^2 + 2\,232.45t - 5.49 & 0.000\,059 < t \leqslant 0.000\,365 \\ 750\,394\,218.27t^3 - 2148127.63t^2 + 2232.45t - 5.49 & 0.000\,365 < t \leqslant 0.000\,946 \\ 942\,659.04t^3 - 20\,500.82t^2 + 219.07t - 4.86 & 0.000\,946 < t \leqslant 0.005\,733 \\ 95\,488.33t^3 - 5\,929.93t^2 + 135.53t - 4.70 & 0.005\,733 < t \leqslant 0.022\,132 \\ -15\,845.21t^3 + 1\,462.09t^2 - 28.07t - 3.49 & 0.022\,132 < t \leqslant 0.037\,180 \\ 5\,311.87t^3 - 897.80t^2 + 59.67t - 4.58 & 0.037\,180 < t \leqslant 0.053\,976 \\ 131.50t^3 - 58.96t^2 + 14.40t - 3.77 & 0.053\,976 < t \leqslant 0.108\,503 \\ 30.22t^3 - 25.99t^2 + 10.82t - 3.64 & 0.108\,503 < t \leqslant 0.271\,513 \\ 2.75t^3 - 3.62t^2 + 4.74t - 3.09 & 0.271\,513 < t \leqslant 0.659\,912 \\ 16.76t^3 - 31.35t^2 + 23.05t - 7.11 & 0.659\,912 < t \leqslant 0.745\,724 \\ 17.05t^3 - 31.97t^2 + 23.51t - 7.23 & 0.745\,724 < t \leqslant 0.904\,799 \\ 1\,077.82t^3 - 2\,911.34t^2 + 2\,628.76t - 792.97 & 0.904\,799 < t \leqslant 0.965\,559 \\ 5\,437.58t^3 - 15\,540.17t^2 + 14\,822.64t - 4717.61 & 0.965\,599 < t \leqslant 0.983\,529 \\ 165\,438.96t^3 - 487\,640.90t^2 + 479\,147.20t - 156\,943.10 & 0.983\,529 < t \leqslant 0.995\,809 \\ 10\,153\,291.61t^3 - 30\,325\,607.80t^2 + 30\,192\,052.42t - 10\,019\,732.34 & 0.995\,809 < t \leqslant 0.997\,771 \\ 17\,165\,665.67t^3 - 51\,315\,835.47t^2 + 51\,135\,490.11t - 16\,985\,316.34 & 0.997\,771 < t \leqslant 0.999\,478 \\ 6\,104\,927\,517.10t^3 - 18\,305\,062\,378.76t^2 + 18\,295\,348\,004.67t - 6\,095\,213\,138.18 & 0.999\,478 < t \leqslant 0.999\,880 \\ 235\,996\,301\,525.20t^3 - 707\,896\,358\,653.31t^2 + 707\,803\,828\,476.36t - 235\,903\,771\,343.01 & 0.999\,880 < t \leqslant 0.999\,885 \\ 235\,996\,301\,525.23t^3 - 707\,896\,358\,653.40t^2 + 707\,803\,828\,476.45t - 235\,903\,771\,343.05 & 0.999\,885 < t \leqslant 0.999\,955 \end{cases} \tag{24}$$

联立式(6)可得到基于三次样条插值理论的判决门限表达式：

$$\gamma_{\mathrm{MED}} = \frac{\left(\sqrt{N} + \sqrt{M}\right)^2}{N} \cdot \left[1 + \frac{\left(\sqrt{N} + \sqrt{M}\right)^{-2/3}}{(NM)^{1/6}} G\left(1 - P_{\mathrm{FA}}\right)\right] \tag{25}$$

为验证本文所提算法的有效性，图2利用文献[16]给出的1 051个点绘制了$F_1^{-1}(t)$的真实曲线作为比较参考基准，同时给出了利用本文提出的基于三次样条插值方法绘制的连续曲线.由图可知，$G(t)$与$F_1^{-1}(t)$吻合得非常好，由此证明了本文所提方法的正确性和有效性.

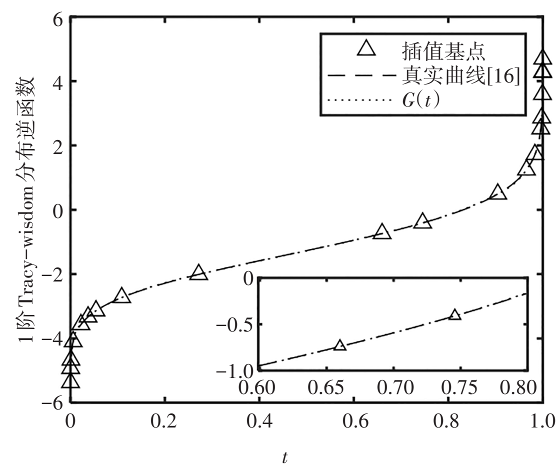


图2　三次样条插值曲线与真实值曲线比较

Fig. 2　Comparison between the cubic spline interpolation curve and the real value curve

为了量化三次样条插值方法的效果,引入平均误差 $\sum_{i=1}^{K}\left[F^{-1}\left(t_i\right)-G\left(t_i\right)\right]2/K$. 利用文献[16]给出的1 051个离散点,可以算出该值仅为4.69×10^{-4}. 由此可知,利用所提方法计算逆Tracy-Widom分布函数所产生误差非常小,在实际应用中基本可以忽略.值得一提的是,本文所提$G(t)$是连续曲线,可以计算出任意给定的t值所对应的函数值.因此,利用$G(t)$函数即可以方便地直接计算任意给定的P_{FA}值所对应的门限值.与之相对,文献[16]只是给出了一系列离散点的值,对于这些离散点之外的值,则仍需采用专用软件进行复杂的计算才能获得.

2.3 基于数值分析理论的低复杂度MED算法

综合2.1和2.2节的结论,可以得到一种新的基于数值分析理论的低复杂度MED频谱感知算法.新方法首先利用Rayleigh商加速幂法计算归一化取样协方差矩阵的最大特征值,其次利用三次样条插值法计算感知判决门限,最后进行感知判决.所提算法的流程如表3所示.由于本文所提方法可以利用式(25)直接计算判决门限值,其运算量基本可以忽略.因此,不同于经典的MED算法,本文所提算法的计算复杂度主要来自归一化取样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x$以及$\hat{\boldsymbol{R}}_x$最大特征值λ_{MED}的计算.其中,$\hat{\boldsymbol{R}}_x$的计算复杂度为$O\left(NM^2\right)$,而采用基于Rayleigh商加速幂法的λ_{MED}计算复杂度为$O\left(kM^2\right)$,这里k为迭代次数.故本文所提基于数值分析理论的MED频谱感知算法总复杂度为$O\left(NM^2\right)+O\left(kM^2\right)$.

表3 基于数值分析理论的低复杂度MED频谱感知算法

Tab. 3 Low-complexity MED spectrum sensing algorithm based on numerical analysis theories

算法2:基于数值分析理论的低复杂度MED频谱感知算法	
步骤1	对接收信号进行连续采样,根据式(5)计算归一化取样协方差矩阵$\hat{\boldsymbol{R}}_x$;
步骤2	利用Rayleigh商加速幂法计算$\hat{\boldsymbol{R}}_x$的最大特征值λ_{MED}(见算法1);
步骤3	利用式(25)基于三次样条插值函数计算给定目标虚警概率P_{FA}对应的判决门限γ_{MED};
步骤4	实施感知判决:当感知判决量λ_{MED}大于判决门限γ_{MED}时,判定PU信号存在;反之,则判定PU信号不存在

3 检测性能分析

所提基于数值分析理论的MED算法的计算误差来自Rayleigh商加速幂法计算感知判决量λ_{MED}和基于三次样条插值法计算判决门限γ_{MED}两部分.表4给出了N=3 200,M=64,信噪比分别为-25 dB至-21 dB时采用Rayleigh商加速幂法与文献[15]所用传统幂法计算λ_{MED}的误差情况.这里Monte Carlo仿真次数为5 000,仿真过程中设置迭代次数为50,真实的最大特征值采用Matlab的eig函数计算得到(即采用特征值分解法[9]).

由表4的结果可知,本文所提方法在计算λ_{MED}时具有很高的精度,且各项精度均明显高于传统幂法.例如,当信噪比为-21 dB时,所提方法计算结果的平均绝对误差仅为$6.502\,092\,89\times10^{-7}$,对应的平均相对误差为$4.222\,098\,41\times10^{-7}$,而此时采用幂法的对应结果则分别为$4.145\,751\,87\times10^{-5}$和$2.741\,964\,93\times10^{-5}$.此时,误差精度均提升了近2个数量级.另外,从仿真结果不难看出,随着接收信噪比的增大,本文所提算法的计算精度显著提高.其原因在于,随着信噪比的增加,归一化取样协方差矩阵的次大和最大特征值的差别越大,使得Rayleigh商加速幂法以更快的速度收敛,从而获得更高的计算精度.

表4 Rayleigh商加速幂法计算感知判决量的平均误差

Tab. 4 Rayleigh quotient accelerated power method for the average calculating errors in test statistics

SNR(dB)	Rayleigh商加速幂法		幂法[15]	
	平均绝对误差	平均相对误差	平均绝对误差	平均相对误差
-25	$9.041\,407\,49\times10^{-3}$	$6.865\,932\,64\times10^{-3}$	$1.142\,570\,57\times10^{-2}$	$8.669\,253\,26\times10^{-3}$
-24	$5.962\,205\,84\times10^{-3}$	$4.445\,386\,87\times10^{-3}$	$7.508\,417\,32\times10^{-3}$	$5.589\,273\,09\times10^{-3}$
-23	$1.647\,801\,27\times10^{-3}$	$1.192\,186\,59\times10^{-3}$	$2.860\,556\,92\times10^{-3}$	$2.073\,129\,10\times10^{-3}$
-22	$1.265\,643\,60\times10^{-4}$	$8.705\,724\,79\times10^{-5}$	$3.272\,304\,97\times10^{-4}$	$2.266\,596\,99\times10^{-4}$
-21	$6.502\,092\,89\times10^{-7}$	$4.222\,098\,41\times10^{-7}$	$4.145\,751\,87\times10^{-5}$	$2.741\,964\,93\times10^{-5}$

表5给出了当N=3 200,M=64时在不同目标虚警概率P_{FA}条件下三次样条插值方法计算γ_{MED}的误差,其中真实门限值采用文献[16]中查表方法计算得到.由表5的结果可知,在给定的一系列P_{FA}值中,其对应的判决门限的最大绝对误差为2.014 490 63×10^{-3},最小绝对误差为2.548 672 64×10^{-5},最大相对误差为1.486 093 89×10^{-3},最小相对误差为1.958 776 01×10^{-5}.通常绝对误差和相对误差在10^{-4}或10^{-5}数量级.由此可知,本文所提利用三次样条插值法计算判决门限产生的误差是极小的.

表5 三次样条插值法计算判决门限的误差

Tab. 5 Cubic spline interpolation algorithm for the calculation errors in decision thresholds

P_{FA}	真实门限值	三次样条插值法	绝对误差	相对误差
0.000 033	1.355 560 80	1.353 546 31	2.014 490 63×10^{-3}	1.486 093 89×10^{-3}
0.100 384	1.307 692 78	1.307 603 47	8.931 087 86×10^{-5}	6.829 652 97×10^{-5}
0.200 766	1.301 155 73	1.301 130 25	2.548 672 64×10^{-5}	1.958 776 01×10^{-5}
0.300 111	1.296 621 98	1.296 585 28	3.669 691 88×10^{-5}	2.830 194 11×10^{-5}
0.400 873	1.292 931 71	1.292 820 24	1.114 710 38×10^{-4}	8.621 571 96×10^{-5}
0.502 724	1.289 557 75	1.289 312 22	2.455 353 77×10^{-4}	1.904 027 77×10^{-4}
0.601 898	1.286 183 80	1.286 000 26	1.835 307 90×10^{-4}	1.426 940 62×10^{-4}
0.700 602	1.282 704 40	1.282 635 94	6.845 753 19×10^{-5}	5.336 968 66×10^{-5}
0.801 087	1.278 803 26	1.278 857 07	5.380 477 45×10^{-5}	4.207 431 75×10^{-5}
0.901 205	1.273 531 45	1.273 401 84	1.296 181 54×10^{-4}	1.017 785 26×10^{-4}
0.999 979	1.244 852 81	1.245 390 08	5.372 718 71×10^{-4}	4.315 946 96×10^{-4}

图3给出了主用户信号为BPSK信号时文献[9]和本文所提基于数值分析框架两种MED算法在P_{FA}=0.1时的性能对比曲线.仿真过程中设置M分别为32,64,128、256,信噪比从−30 dB变化到−15 dB. Monte Carlo仿真次数为5 000.这里经典的MED算法采用eig函数通过特征值分解方法计算精确的最大特征值,基于专用软件计算得到精确的判决门限.因此该方法的结果可以作为判断计算误差对感知性能影响大小的基准.采用本文所提方法时通过设置最大迭代次数K=500,误差界ε=10^{-4},然后利用Rayleigh商加速法计算λ_{MED},并利用式(25)实时计算γ_{MED}.

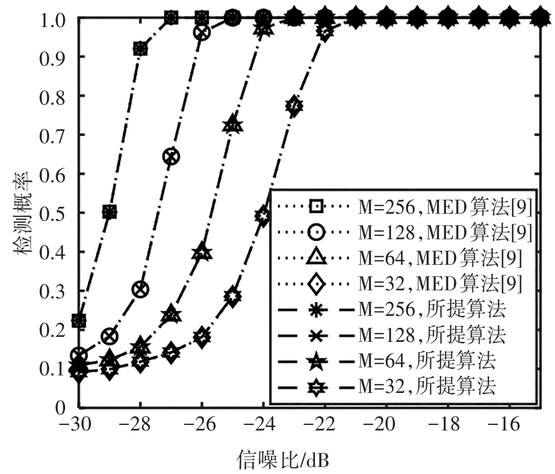


图3 经典MED算法与所提算法检测概率对比

Fig. 3 Comparison of the detection probabilities between the classical MED algorithm and the proposed algorithm

从图3的仿真结果不难看到,本文所提方法的检测结果和文献[9]中经典计算方法获得的结果高度匹配.由此证明了本文所提基于数值分析理论的MED算法产生了极为可靠的感知判决结果.这也表明本文所提利用Rayleigh商加速法计算最大特征值,以及基于三次样条插值方法计算判决门限所引入的误差对感知判决结果带来的影响在实际应用中可以忽略.然而值得一提的是,本文所提方法比文献[9]中经典的MED算法具有更低的计算复杂度和实现复杂度.与此同时,图4给出了两种算法的实际虚警概率曲线的对比情况.这里文献[9]中经典MED算法采用专用软件计算精确判决门限.仿真结果清楚地表明,利用本文所提三次样条插值法产生的实际虚警概率和经典MED算法产生的实际虚警概率同样高度匹配.这表明本文所提门限计算方法在具有极高的计算效率的同时,能够产生准确的判决门限,并获得可靠的虚警性能.

为进一步评估本文所提MED算法的性能.图5和图6分别给出了信噪比和天线数目变化时算法的ROC工作性能曲线.其中,图5天线数目设置为64,图6信噪比设置为−28dB.图5的仿真结果表明,所提算法的检测性能随着信噪比的提高而提升.例如,当P_{FA} = 0.1时,算法的检测概率在信噪比为−27 dB、−26 dB和−25 dB时分别为0.221 4、0.384 0、0.745 2,其检测概率随信噪比增大而明显增大.与此同时,图6

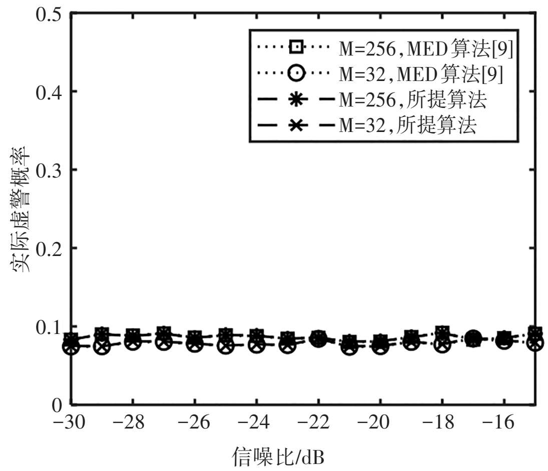


图4 经典MED算法和所提算法实际虚警概率对比

Fig. 4 Comparison of the actual false-alarm probabilities between the classical MED algorithm and the proposed one

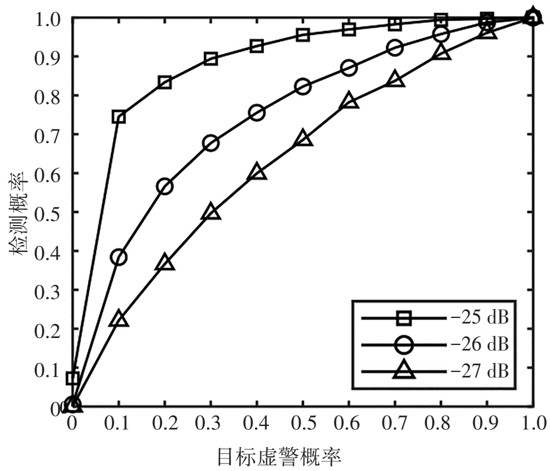


图5 信噪比变化时所提MED算法的ROC曲线

Fig. 5 ROC curves of the proposed algorithm when the signal-to-noise ratio changes

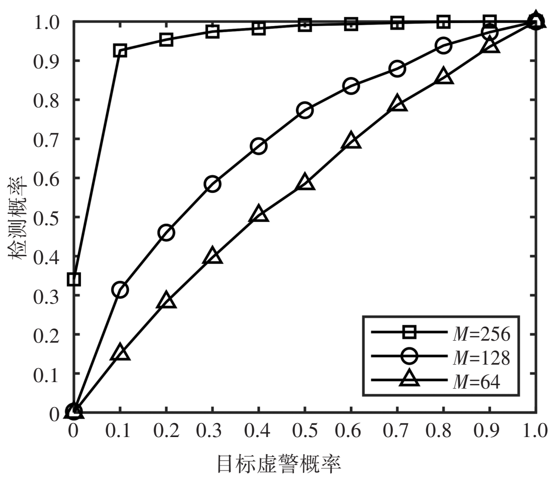


图6 天线数目变化时所提MED算法的ROC曲线

Fig.6 ROC curves of the proposed algorithm when the number of antennas changes

的仿真结果表明,随着天线数目的增多,所提MED算法的检测性能相应提升.因此,在实际应用过程中可以通过增加天线的数目获得检测性能的增益.

4 结 论

经典的MED算法在5G、大规模协作等高维接收信号场景中面临着感知判决量和判决门限计算复杂度高以及难以实现的问题.为此,本文提出了一种基于数值分析理论的低复杂度MED算法,该算法利用Rayleigh商加速幂法计算感知判决量,利用三次样条插值法计算感知判决门限.理论分析和实验仿真结果均表明,所提算法在高维信号感知条件下,在大大提升MED算法计算效率的同时,能取得极为可靠的感知性能.本文所提出的基于数值分析理论的MED算法在现代认知无线通信中广泛存在的高维信号频谱感知场景方面具有广泛的应用前景.

参考文献

[1] MITOLA J, MAGUIRE G Q. Cognitive radio: making software radios more personal[J]. IEEE Personal Communications, 1999, 6(4):13-18.

[2] 胡志刚,汤海冰.认知无线电系统的最优帧长设计[J].湖南大学学报(自然科学版),2013,40(1):98-102.

HU Z G, TANG H B. Optimal frame duration for cognitive radio system[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2013, 40(1):98-102.(In Chinese)

[3] 雷可君,谭阳红,杨喜,等. 一种新的认知无线电宽带盲频谱感知方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(2): 150-156.

LEI K J, TAN Y H, YANG X, *et al*. A new method of wideband blind spectrum sensing for cognitive radio[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(2): 150-156.(In Chinese)

[4] KABEEL A A, HUSSEIN A H, KHALAF A A M, *et al.* A utilization of multiple antenna elements for matched filter based spectrum sensing performance enhancement in cognitive radio system [J]. AEU - International Journal of Electronics and Communications, 2019, 107:98-109.

[5] YE Y H, LI Y Z, LU G Y, *et al.* Improved energy detection with Laplacian noise in cognitive radio[J]. IEEE Systems Journal, 2019, 13(1):18-29.

[6] MAJUMDER S. A Gaussian mixture model method for eigenvalue-based spectrum sensing with uncalibrated multiple antennas[J]. Signal Processing, 2022, 192:108404.

[7] ALI A, HAMOUDA W. Advances on spectrum sensing for cognitive radio networks: theory and applications[J]. IEEE Communi-

cations Surveys & Tutorials,2017,19(2):1277-1304.

[8] KIM S, LEE J, WANG H, *et al*. Sensing performance of energy detector with correlated multiple antennas[J]. IEEE Signal Processing Letters,2009,16(8):671-674.

[9] ZENG Y, KOH C L, LIANG Y C. Maximum eigenvalue detection: theory and application[C]//2008 IEEE International Conference on Communications. Beijing, China:IEEE,2008:4160-4164.

[10] YANG L, CHEN Z, YIN F L. Cyclo-energy detector for spectrum sensing in cognitive radio[J]. AEU - International Journal of Electronics and Communications,2012,66(1):89-92.

[11] AWIN F, ABDEL-RAHEEM E, TEPE K. Blind spectrum sensing approaches for interweaved cognitive radio system: a tutorial and short course[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2019,21(1):238-259.

[12] BOUALLEGUE K, DAYOUB I, GHARBI M, *et al*. Blind spectrum sensing using extreme eigenvalues for cognitive radio networks[J]. IEEE Communications Letters,2018,22(7):1386-1389.

[13] ZHAO W J, LI H, JIN M L, *et al*. Eigenvalues-based universal spectrum sensing algorithm in cognitive radio networks[J]. IEEE Systems Journal,2021,15(3):3391-3402.

[14] SAUER T. Numerical analysis[M]. 2nd ed. Boston: PEARSON, 2012: 166-178.

[15] CHAURASIYA R B, SHRESTHA R. Fast sensing-time and hardware-efficient eigenvalue-based blind spectrum sensors for cognitive radio network[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Regular Papers,2020,67(4):1296-1308.

[16] PRAHOFER M, SPOHN H. Exact scaling functions for one-dimensional stationary KPZ growth[EB/OL]. (2003-03-29)[2021-12-21]. http://www-m5.ma.tum.de/KPZ.

[17] MORALES-JIMENEZ D, LOUIE R H Y, MCKAY M R, *et al*. Analysis and design of multiple-antenna cognitive radios with multiple primary user signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2015,63(18):4925-4939.

[18] ZHANG L, LIANG Y C. Joint spectrum sensing and packet error rate optimization in cognitive IoT[J]. IEEE Internet of Things Journal,2019,6(5):7816-7827.

[19] LIU M Q, QU N, TANG J, *et al*. Signal estimation in cognitive satellite networks for satellite-based industrial Internet of Things[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics,2021,17(3):2062-2071.

[20] TIAN D X, ZHOU J S, WANG Y P, *et al*. Channel access optimization with adaptive congestion pricing for cognitive vehicular networks: an evolutionary game approach[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing,2020,19(4):803-820.

[21] BAI Z D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review[J]. Statistica Sinica, 1999, 9: 611-677.

[22] TRACY C A, WIDOM H. On orthogonal and symplectic matrix ensembles[J]. Communications in Mathematical Physics,1996,177(3):727-754.

[23] PAYSARVI-HOSEINI P, BEAULIEU N C. Optimal wideband spectrum sensing framework for cognitive radio systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2011,59(3):1170-1182.

[24] DEHGHANI FIROUZABADI A, RABIEI A M. Sensing-throughput optimisation for multichannel cooperative spectrum sensing with imperfect reporting channels[J]. IET Communications,2015,9(18):2188-2196.

[25] QUAN Z, CUI S G, SAYED A H. Optimal linear cooperation for spectrum sensing in cognitive radio networks[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing,2008,2(1):28-40.