

电动车动力总成悬置系统的全局灵敏度分析

吕辉^{1,2,3}, 张海标^{1,3}, 李长玉³, 魏政君^{1†}

- (1. 华南理工大学机械与汽车工程学院, 广东广州 510641;
2. 重庆理工大学汽车零部件先进制造技术教育部重点实验室, 重庆 400054;
3. 广州城市理工学院汽车与交通工程学院, 广东广州 510800)

摘要:针对电动汽车动力总成悬置系统(Powertrain Mounting System, PMS)参数同时存在不确定性和相关性的情形,开展考虑不确定参数相关性的电动汽车PMS固有特性的全局灵敏度分析研究.采用含相关性的概率变量描述系统的不确定参数,基于方差分解推导考虑概率变量相关性的一阶和总体全局灵敏度公式;基于蒙特卡洛法(Monte Carlo Method, MCM)提出一种求解全局灵敏度指数的方法;推导当概率变量服从正态分布时的全局灵敏度公式,给出采用MCM计算全局灵敏度指数所需样本集的构造方法;以某电动汽车PMS算例验证方法的有效性.分析结果表明,相关性会影响系统固有频率和解耦率响应对不确定参数的敏感性,考虑不确定参数的相关性可获得更加合理的灵敏度分析结果.

关键词:电动车;动力总成悬置系统;全局灵敏度;不确定性;相关性

中图分类号:U469.72 **文献标志码:**A

Global Sensitivity Analysis on Powertrain Mounting Systems of Electric Vehicles

LÜ Hui^{1,2,3}, ZHANG Haibiao^{1,3}, LI Changyu³, WEI Zhengjun^{1†}

- (1. School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;
2. Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology for Automobile Parts, Ministry of Education, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China; 3. School of Automobile and Traffic Engineering, Guangzhou City University of Technology, Guangzhou 510800, China)

Abstract: Aiming to handle the complex situation where the parameters of the powertrain mounting system (PMS) of an electric vehicle were both uncertain and correlated, the global sensitivity analysis of the PMS inherent characteristics to system parameters was investigated by considering the correlation of uncertain parameters. Firstly, the PMS uncertain parameters was treated as probabilistic variables with correlation, and the first- and total-order global sensitivity formulas were derived based on variance decomposition. Then, a method for solving the global sensitivity indexes was proposed based on the Monte Carlo Method (MCM). Next, the global sensitivity formulas

* 收稿日期:2022-05-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975217), National Natural Science Foundation of China (51975217);广东省自然科学基金资助项目(2023A1515011585), Natural Science Foundation of Guangdong Province (2023A1515011585);汽车零部件先进制造技术教育部重点实验室开放课题(2020KLMT01), Open Fund of Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology for Automobile Parts, Ministry of Education (2020KLMT01)

作者简介:吕辉(1986—),男,广西陆川人,华南理工大学副教授,博士

† 通信联系人, E-mail: weizhj@scut.edu.cn

were further derived for the case where the probabilistic variables are normally distributed, and the required sample sets to calculate the global sensitivity indexes were constructed by using MCM. Finally, the effectiveness of the proposed method was demonstrated by the numerical example of an electric vehicle PMS. The analysis results show that the parametric correlation has some effect on the sensitivities of the intrinsic frequency and decoupling rate responses to uncertain parameters, and the parametric correlation should be taken into account to obtain more reasonable results of sensitivity analysis.

Key words: electric vehicles; powertrain mounting system; global sensitivity; uncertainty; correlation

受加工制造、装配与测量误差、材料老化和复杂工况等因素的影响,工程结构不可避免地存在各种不确定性因素^[1-2].不确定性广泛地存在于汽车动力总成悬置系统(Powertrain Mounting System, PMS)中,对不确定情形下的PMS振动特性进行研究具有重要意义.

近年来,基于不确定性分析的汽车PMS研究已经取得很大进展.其中,概率模型^[3]已被广泛用于处理PMS参数的不确定性.陈剑等^[4]将悬置刚度参数视为服从正态分布的概率变量,结合稳健设计与多目标优化,提出一种PMS的多目标稳健优化方法.谢展等^[5]将悬置刚度等关键参数处理为概率变量,结合多目标优化方法对汽车PMS进行稳健性设计.此外,Xin等^[6]将悬置刚度处理为概率变量,结合多目标优化模型和遗传算法,提出一种针对PMS的多目标鲁棒优化方法.上述研究均将系统不确定参数视为相互独立的概率变量,该情形下的PMS研究已相对成熟.

汽车PMS结构十分复杂,其悬置刚度、安装位置和角度、惯性参数和阻尼参数等的不确定性都会影响系统性能,进而影响整车舒适性.因此,准确选择对系统影响较大的不确定参数对PMS进行优化设计,是降低整车振动和噪声的关键.一般地,可以通过开展灵敏度分析来甄别对PMS性能影响敏感的不确定参数.例如,刘达斌等^[7]对PMS悬置的各刚度参数进行灵敏度分析,确定系统的敏感参数,进而对悬置刚度进行优化设计.张武等^[8]对PMS悬置刚度参数进行灵敏度分析,进而提出一种PMS的多目标稳健优化方法.Şendur等^[9]选取PMS悬置的安装位置和刚度为研究参数,结合灵敏度分析和响应面法对PMS的刚体模态和能量分布进行优化设计.可见,目

前国内外关于PMS的灵敏度分析也形成了一定的研究成果,相关研究主要涉及的是局部灵敏度分析工作.

对于目前PMS的不确定性分析和灵敏度分析研究,可以总结出如下不足:①现有的PMS不确定性分析主要讨论系统的不确定参数相互独立的情况.然而,在工程实际中,机械结构参数之间并非完全独立,而往往存在一定相关性^[10].例如,电动汽车PMS广泛采用的橡胶悬置,其三向刚度参数往往就存在一定相关性.若直接将这些不确定参数视为独立变量,则很可能导致计算结果与实际情况存在较大偏差.②现有的PMS灵敏度分析研究中,关于全局灵敏度的研究较少,且常将系统参数处理为确定参数,没有考虑参数分布对系统响应的影响,亦鲜有考虑参数之间的相关性.因此,同时考虑系统参数的不确定性和相关性,对PMS进行全局灵敏度分析具有重要的研究价值.

针对上述问题,本文旨在提出一种电动汽车PMS不确定参数存在相关性时的系统固有特性全局灵敏度分析方法.方法能充分考虑参数不确定性和相关性对全局灵敏度分析结果的影响.首先,采用含相关性的概率变量描述PMS不确定参数;然后,提出一种基于方差分解的全局灵敏度分析方法;接着,给出求解全局灵敏度指数的方法及其分析步骤;最后通过数值算例验证方法的有效性.

1 电动汽车PMS固有特性计算

1.1 固有频率计算

电动汽车PMS常使用三点布置形式,图1为某电动汽车PMS的三维模型及其对应的六自由度动力

学模型.

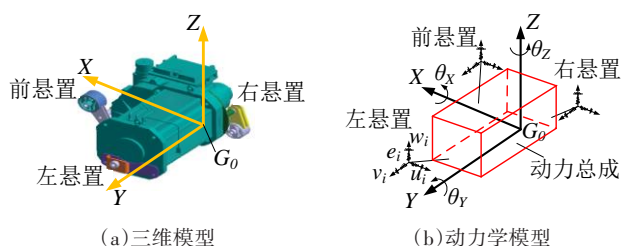


图1 PMS模型

Fig.1 The PMS model

建立动力总成坐标系 $G_0 - XYZ$ 和悬置局部坐标系 $e_i - u_i v_i w_i (i = 1, 2, 3)$, 其中原点 G_0 位于总成质心处, X 轴正方向与汽车行驶方向相同, Z 轴正方向垂直于地面向上, Y 轴正方向根据右手定则确定. PMS 固有频率^[11]可由式(1)求得.

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \lambda_j^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad (1)$$

式中: \mathbf{K} 、 \mathbf{M} 和 \mathbf{I} 分别表示系统刚度、质量和单位矩阵; $\boldsymbol{\varphi}_j$ 为第 j 阶阵型. 求解式(1), 可得系统的 6 阶固有频率 $f_j = \lambda_j / 2\pi, j = 1, 2, \dots, 6$.

1.2 解耦率计算

系统振动时, 其能量分布在 6 个方向上. 当系统以第 j 阶固有频率 f_j 和振型 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 振动时, 第 s 个广义坐标所占的能量百分比^[11]为:

$$E(s, j) = \frac{\frac{1}{2} \lambda_j^2 \varphi_{sj} \sum_{p=1}^6 (M_{sp} \varphi_{pj})}{\frac{1}{2} \lambda_j^2 \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} = \frac{\varphi_{sj} \sum_{p=1}^6 (M_{sp} \varphi_{pj})}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j} \quad (2)$$

式中: φ_{sj} 与 φ_{pj} 分别为 $\boldsymbol{\varphi}_j$ 的第 s 个和第 p 个元素; M_{sp} 为 \mathbf{M} 的第 s 行第 p 列元素.

第 j 阶振动对应的解耦率为:

$$d_j = \max_{s=1,2,\dots,6} E(s, j) \quad (3)$$

当 $d_j = 100\%$ 时, 表示系统第 j 阶振动时能量全部集中在某广义坐标上, 该阶振动完全解耦.

2 考虑不确定参数相关性的 PMS 全局灵敏度分析

电动汽车 PMS 参数受加工、装配误差和材料老化等因素影响, 其取值通常具有一定随机性, 常用概率模型来描述. 本节将基于方差分解推导 PMS 不确定参数为概率变量且具有相关性时的全局灵敏度分

析公式, 并引出表示敏感性程度的一阶与总体全局灵敏度指数^[12]. 为方便表述, 将 PMS 的固有特性响应函数用 $y = y(\mathbf{x})$ 表示. 其中, \mathbf{x} 为描述系统不确定参数的 n 维概率向量, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其联合概率密度函数记为 $p(\mathbf{x})$.

2.1 全局灵敏度指数

将 \mathbf{x} 分为两组向量 $\mathbf{u} = [x_1, x_2, \dots, x_s] (1 \leq s < n)$ 和 $\mathbf{v} = [x_{s+1}, \dots, x_n]$, 即 $\mathbf{x} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]^T$. 则系统响应 $y(\mathbf{x})$ 的总方差可表示为:

$$D = D_u [E_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))] + E_u [D_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))] \quad (4)$$

式中: D 表示 $y(\mathbf{x})$ 的总方差; $D_u[\cdot]$ 和 $E_u[\cdot]$ 分别表示方差和均值运算. $D_u [E_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]$ 表示当向量 \mathbf{u} 为定值时, 系统响应方差的平均减小量; $E_u [D_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]$ 表示当向量 \mathbf{u} 为定值时, 系统响应方差的平均剩余量^[13]. 概率向量 $(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$ 的联合概率密度函数为 $p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$. 将式(4)总方差标准化, 可得:

$$\frac{D_u [E_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]}{D} + \frac{E_u [D_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]}{D} = 1 \quad (5)$$

式中: 等号左边第 1 项为向量 \mathbf{u} 的一阶全局灵敏度指数; 第 2 项为向量 \mathbf{v} 的总体全局灵敏度指数. 可分别表示为:

$$S_u = \frac{D_u [E_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]}{D} \quad (6)$$

$$S_v^T = \frac{E_u [D_v(y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}))]}{D} \quad (7)$$

类似地, 向量 \mathbf{u} 的总体全局灵敏度指数可表示为:

$$S_u^T = \frac{E_v [D_u(y(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}))]}{D} \quad (8)$$

式中: 概率向量 $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ 的联合概率密度函数为 $p(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$.

式(6)和式(8)即是概率向量 \mathbf{u} 相对于系统响应的一阶和总体全局灵敏度指数. 实际上, 这 2 个指数均为 Sobol 指数^[13-14]的推广. 下面将基于蒙特卡洛法提出一种计算这 2 个指数的方法.

2.2 一阶全局灵敏度指数计算

将式(6)展开可得:

$$S_u = \frac{1}{D} \left[\int_{R^s} p(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \left[\int_{R^{n-s}} y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}} | \mathbf{u}) d\bar{\mathbf{v}} \right]^2 - y_0^2 \right] \quad (9)$$

式中: $p(\mathbf{u})$ 是联合概率密度函数 $p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 的一个边缘分布函数; $p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}|\mathbf{u})$ 是一个条件概率密度函数. y_0 为 $y(\mathbf{x})$ 的均值,可表示为:

$$y_0^2 = \left[\int_{R^n} y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} \right]^2 \quad (10)$$

式(9)和式(10)可以分别等效表示为:

$$S_u = \frac{1}{D} \left[\int_{R^r} p(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \left[\int_{R^{n-r}} y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}|\mathbf{u}) d\bar{\mathbf{v}} \times \int_{R^{n-r}} y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}') p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}'|\mathbf{u}) d\bar{\mathbf{v}}' \right] - y_0^2 \right] \quad (11)$$

$$y_0^2 = \int_{R^n} y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} \int_{R^n} y(\mathbf{u}', \mathbf{v}') \times p(\mathbf{u}', \mathbf{v}') d\mathbf{u}' d\mathbf{v}' \quad (12)$$

将贝叶斯公式 $p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}|\mathbf{u}) p(\mathbf{u}) = p(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和式(12)代入式(11)可得:

$$S_u = \frac{1}{D} \left[\int_{R^n} y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} \times \left[\int_{R^{n-r}} y(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}') p(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}'|\mathbf{u}) d\bar{\mathbf{v}}' - \int_{R^n} y(\mathbf{u}', \mathbf{v}') p(\mathbf{u}', \mathbf{v}') d\mathbf{u}' d\mathbf{v}' \right] \right] \quad (13)$$

采用蒙特卡洛法对式(13)进行估计^[12]可得

$$S_u = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j) (y(\mathbf{u}_j, \bar{\mathbf{v}}'_j) - y(\mathbf{u}'_j, \mathbf{v}'_j))}{D} \quad (14)$$

式(14)表明,要计算系统响应对概率向量 \mathbf{u} 的一阶全局灵敏度指数,需要构造3个样本集: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) 、 $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ 和 $(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}')$.这些样本的构造方法将在后文中具体描述.

2.3 总体全局灵敏度指数计算

将式(8)表示为^[12]:

$$S_u^T = \frac{D_u^T}{D} = \frac{D - D_v [E_u(y(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}))]}{D} \quad (15)$$

式中: $D_v [E_u(y(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}))]$ 表示当向量 \mathbf{v} 为定值时,系统响应方差的平均减小量^[13].总方差 D 可展开为:

$$D = \int_{R^n} y^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} - y_0^2 = \frac{1}{2} \int_{R^n} y^2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{R^n} y^2(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}) d\bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{v} - y_0^2 \quad (16)$$

基于式(11)、式(15)和式(16),并结合贝叶斯公式可将 D_u^T 表示为:

$$D_u^T = \frac{1}{2} \int_{R^n} y^2(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) p(\mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\bar{\mathbf{u}} d\mathbf{v} + \frac{1}{2} \int_{R^n} y^2(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}) p(\mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{v} - y_0^2 - \left[\int_{R^{n-r}} p(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \left[\int_{R^r} y(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\bar{\mathbf{u}} \times \int_{R^r} y(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\bar{\mathbf{u}}' \right] - y_0^2 \right] \quad (17)$$

通过进一步推导,式(17)可等效表示为:

$$D_u^T = \frac{1}{2} \int_{R^{n-r}} [y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - y(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v})]^2 \times p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\mathbf{u} d\bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{v} \quad (18)$$

因此,总体全局灵敏度指数 S_u^T 为:

$$S_u^T = \frac{1}{2D} \int_{R^{n-r}} [y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - y(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v})]^2 \times p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) p(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v}|\mathbf{v}) d\mathbf{u} d\bar{\mathbf{u}}' d\mathbf{v} \quad (19)$$

采用蒙特卡洛法对式(19)进行估计^[12]可得:

$$S_u^T = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y(\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j) - y(\bar{\mathbf{u}}'_j, \mathbf{v}_j)]^2}{2D} \quad (20)$$

式(20)表明,要计算系统响应对概率向量 \mathbf{u} 的总体全局灵敏度指数,需要构造两个样本集 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) 和 $(\bar{\mathbf{u}}', \mathbf{v})$,其构造方法将在后文中具体描述.

PMS的不确定参数由概率向量 \mathbf{x} 描述,故当向量 $\mathbf{u} = [x_1, x_2, \dots, x_s]$ ($1 \leq s < n$) 和 $\mathbf{v} = [x_{s+1}, \dots, x_n]$ 中取 $s = 1$ 时,即可求得PMS中的某个不确定参数的全局灵敏度指数.

3 正态分布情形下考虑相关性的PMS全局灵敏度分析

现有研究多数情况下采用正态分布的概率变量描述PMS的不确定参数.因此,本文主要研究具有相关性的不确定参数服从正态分布时的PMS全局灵敏度分析.

3.1 正态分布情形下考虑相关性的灵敏度指数

当概率向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 服从正态分布时,根据其均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 \mathbf{C} ,其累积分布函数可表示为:

$$\Phi_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^{n/2} \sqrt{|\mathbf{C}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})} \quad (21)$$

式中: $|C|$ 表示协方差矩阵 C 的行列式. 均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 C 可分别表示为:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

根据第2节, 将正态分布下的向量 \boldsymbol{x} 划分为向量 \boldsymbol{u} 和 \boldsymbol{v} , 则对应的均值向量 $\boldsymbol{\mu}_u$ 、 $\boldsymbol{\mu}_v$ 和协方差矩阵 C_u 、 C_v 可分别表示为:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_u \\ \boldsymbol{\mu}_v \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_u & C_{uv} \\ C_{vu} & C_v \end{bmatrix} \quad (23)$$

条件分布 $\Phi_{n-s}(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{u})$ 也服从正态分布, 可表示为:

$$\Phi_{n-s}(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2\pi^{(n-s)/2} \sqrt{|C_{vc}|}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\mu}_{vc})^T C_{vc}^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{\mu}_{vc})} \quad (24)$$

式中:

$$\boldsymbol{\mu}_{vc} = \boldsymbol{\mu}_v + C_{vu} C_u^{-1}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu}_u) \quad (25)$$

$$C_{vc} = C_v - C_{vu} C_u^{-1} C_{uv} \quad (26)$$

边缘分布函数 $p(\boldsymbol{u})$ 可表示为:

$$\Phi_s(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2\pi^{s/2} \sqrt{|C_u|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu}_u)^T C_u^{-1}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\mu}_u)} \quad (27)$$

因此, 一阶与总体全局灵敏度指数 S_u 和 S_u^T 可分别表示为:

$$S_u = \frac{1}{D} \left[\int_{R^s} \Phi_s(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u} \left[\int_{R^{n-s}} y(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}) \Phi_{n-s}(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{u}) d\bar{\boldsymbol{v}} \times \int_{R^{n-s}} y(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}') \Phi_{n-s}(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}'|\boldsymbol{u}) d\bar{\boldsymbol{v}}' \right] - y_0^2 \right] \quad (28)$$

$$S_u^T = \frac{1}{2D} \int_{R^{n+s}} [y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - y(\bar{\boldsymbol{u}}', \boldsymbol{v})]^2 \times \Phi_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \Phi_s(\bar{\boldsymbol{u}}', \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{u} d\bar{\boldsymbol{u}}' d\boldsymbol{v} \quad (29)$$

3.2 正态分布情形下考虑相关性的样本集构造

为构造两组具有相关性的正态分布样本 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 和 $(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$, 本文基于蒙特卡洛法提出了一种正态分布情形下考虑相关性的样本集构造方法. 方法主要步骤如下:

1) 使用 Sobol 序列^[15]生成均匀分布在 0~1 的两组 n 维概率向量 \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{w}' .

2) 利用逆正态累积分布函数将向量 \boldsymbol{w} 和 \boldsymbol{w}' 中任一元素 w_i 和 w'_i 转化为具有零均值和单位方差的标准

正态分布元素, 即 $\bar{x}_i = F^{-1}(w_i)$ 、 $\bar{x}'_i = F^{-1}(w'_i)$, 进而得到独立的标准正态分布向量 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}' = (\bar{\boldsymbol{u}}', \bar{\boldsymbol{v}}')$.

3) 将概率变量对应的协方差矩阵 C 进行 Cholesky 分解, 得到对应的下三角矩阵 $A: AA^T = C$.

4) 将 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}'$ 通过以下变换得到所需考虑相关性的正态分布样本 \boldsymbol{x} 和 \boldsymbol{x}' : $\boldsymbol{x} = A\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\mu}$ 、 $\boldsymbol{x}' = A\bar{\boldsymbol{x}}' + \boldsymbol{\mu}$; 其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为式(22)中的均值向量.

通过上述变换, 可构造出样本集合 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 和 $\boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}')$. 下面将构造样本 $(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}')$ 和 $(\bar{\boldsymbol{u}}', \boldsymbol{v})$. 由于这两组样本属于同一类型, 其构造原理相同, 故此处仅介绍样本 $(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}')$ 的构造.

1) 将上述变换过程中的两组样本提出, 一组是独立的标准正态分布样本 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}})$, 另一组是相关情形下的正态分布样本 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

2) 基于样本 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, 结合式(25)求得 $\boldsymbol{\mu}_{vc}$.

3) 将式(23)中的协方差矩阵 C 的分量矩阵 C_{vc} 进行 Cholesky 分解: $A_{vc} A_{vc}^T = C_{vc}$.

4) 将向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 中的分量 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 通过下式转化成向量 $\bar{\boldsymbol{v}}'$: $\bar{\boldsymbol{v}}' = A_{vc} \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\mu}_{vc}$.

5) 将向量 \boldsymbol{x} 中的分量 \boldsymbol{u} 和向量 $\bar{\boldsymbol{v}}'$ 进行组合, 得到样本 $(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}')$.

6) 同理进行对称变换, 可得到样本 $(\bar{\boldsymbol{u}}', \boldsymbol{v})$.

此外, 对于一般不确定情形下的相关概率变量, 可以先使用高斯公式将其转化为具有相关性的正态分布概率变量^[12], 进而可采用本文方法开展一般不确定情形下考虑相关性的全局灵敏度分析研究. 图2为考虑不确定参数相关性的电动汽车 PMS 全局灵敏度分析流程图.

4 算例分析

4.1 分析模型

以某电动汽车三点橡胶悬置 PMS 为例. 电机总成质量为 78.9 kg, 系统的惯性参数值如表 1 所示, 其中 I_{Xx} 、 I_{Yy} 和 I_{Zz} 分别表示总成在 X 、 Y 和 Z 方向上的转动惯量; I_{Xy} 、 I_{Yz} 和 I_{Zx} 分别表示总成在 X 和 Y 、 Y 和 Z 以及 X 和 Z 两两方向上的惯性积. 表 2 为悬置静刚度和安装位置, 其中 k_u 、 k_v 和 k_w 分别表示各悬置在各自局部坐标系下 u 、 v 和 w 方向的初始刚度.

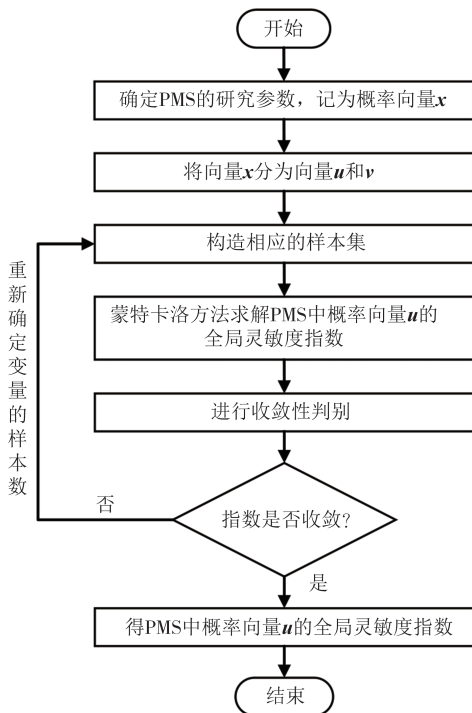


图2 考虑不确定参数相关性的电动汽车PMS全局灵敏度分析流程图

Fig.2 The procedure of global sensitivity of the electric vehicle PMS considering the correlation of uncertain parameters

表1 系统的惯性参数值

Tab.1 The inertial parameter values of the system

kg·m ²					
I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}	I_{xy}	I_{yz}	I_{zx}
1.883	4.314	4.839	-0.404	0.022	0.005

表2 悬置静刚度和安装位置

Tab.2 The static stiffness and locations of mounts

悬置	静刚度值/(N·mm ⁻¹)			各方向上的安装位置/mm		
	k_u	k_v	k_w	X	Y	Z
前悬置	120	146	190	374	-27	-176.5
左悬置	110	80	245	-77	143	0
右悬置	125	79	165	-77	-308	8.0

4.2 全局灵敏度分析

工程中,电动汽车PMS的橡胶悬置刚度往往具有不确定性和相关性,且已有研究大多数选择悬置刚度作为PMS的主要设计参数^[16].此外,对于PMS的振动特性,通常主要关注其竖直方向(Bounce方向)和绕定转子中心线旋转方向(Pitch方向)的固有频率和解耦率响应.因此,本文重点研究PMS各悬置的三向刚度存在不确定性和相关性时Bounce和Pitch方向的固有频率和解耦率响应,以及相应全局灵敏度分析.

采用最常用的正态分布概率变量来描述不确定情形下的悬置刚度参数,且取变量的变异系数(即标准差与均值之比)为0.075.为了便于分析,将前、左和右悬置的三向刚度分别记为 k_{ui} 、 k_{vi} 和 k_{wi} ($i = 1, 2, 3$),将Bounce方向的固有频率和解耦率分别记为 f_B 和 d_B ,Pitch方向的固有频率和解耦率分别记为 f_P 和 d_P .根据相关工程经验和已有研究工作基础^[17],将前悬置 u 与 v 方向、 u 与 w 方向、 v 与 w 方向的刚度参数之间的相关系数分别记为0.6、0.4和0.5;左悬置和右悬置相应的相关系数分别记为0.6、0.5和0.4,不同悬置之间的参数相关系数记为0.

图3展示了在此相关性情形下,基于本文方法计算得到的Bounce方向和Pitch方向固有频率和解耦率响应对刚度参数的一阶与总体全局灵敏度指数.

对图3(a)进行分析,可以得到如下结论:

1) 9个刚度参数中, k_{w2} 的总体全局灵敏度指数最大,故其不确定性对 f_B 的影响最大.类似可知参数 k_{w3} 的不确定性对 f_B 的影响也较大.

2) 对于 k_{u2} 、 k_{v2} 、 k_{w2} 、 k_{u3} 和 k_{w3} ,其一阶全局灵敏度指数均明显大于总体全局灵敏度指数,说明这5个参数与其他参数之间的相关性对 f_B 有较大影响.

因此,在研究响应 f_B 时,应侧重考虑 k_{w2} 和 k_{w3} 的不确定性,以及 k_{u2} 、 k_{v2} 、 k_{w2} 、 k_{u3} 和 k_{w3} 与其他刚度参数之间的相关性对 f_B 的影响.其他4个参数 k_{u1} 、 k_{v1} 、 k_{w1} 和 k_{v3} 的一阶和总体全局灵敏度指数均很小,故它们的不确定性和相关性对 f_B 的影响较小.在设计时可忽略这4个参数的不确定性和相关性对 f_B 的影响,进而可简化问题.

进一步分析9个悬置刚度参数对系统响应 f_P 、 d_B 和 d_P 的全局灵敏度,可综合得到如表3所示的分析结果.

从表3可以发现,左悬置Z方向上的刚度 k_{w2} 以及右悬置Z方向上的刚度 k_{w3} ,这两个参数的不确定性对Bounce方向固有频率和解耦率具有明显的影响;前悬置X方向和Z方向上的刚度 k_{u1} 和 k_{w1} ,这两个参数的不确定性则对Pitch方向固有频率和解耦率具有明显的影响,在工程设计中应当重点关注.而悬置刚度之间的相关性对这两个方向固有频率和解耦率的影响规律比较复杂,没有特定变化规律,且不同的系统响应下可被忽略其影响的参数也有所不同,应根据实际需求进行具体分析.

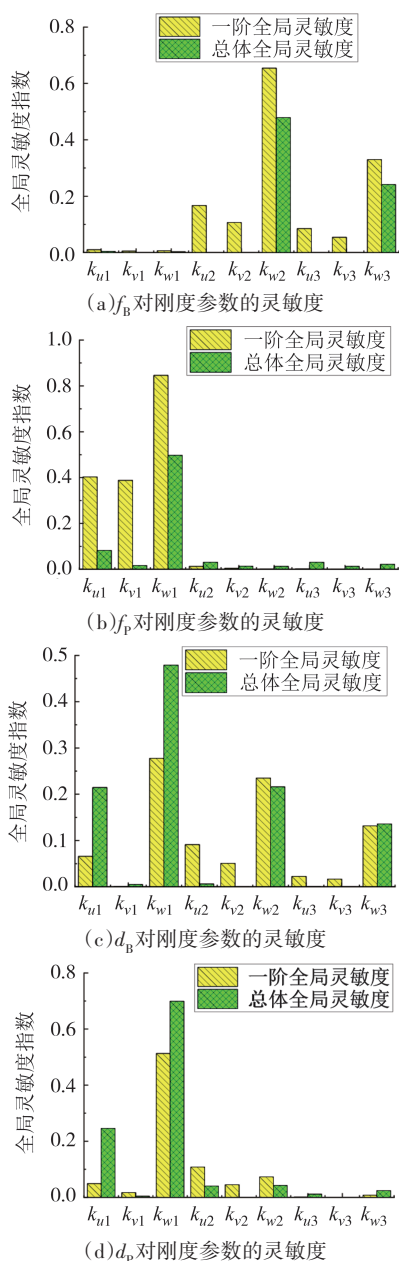


图 3 f_B 、 f_P 、 d_B 和 d_P 对刚度参数的全局灵敏度
Fig.3 The global sensitivities of f_B , f_P , d_B and d_P to stiffness parameters

表 3 全局灵敏度分析结果

Tab.3 The results of global sensitivity analysis

系统响应	不确定性对响应影响大的参数	相关性对响应影响大的参数	可忽略的参数
f_B	k_{w2}, k_{w3}	$k_{u2}, k_{v2}, k_{w2}, k_{u3}, k_{v3}, k_{w3}$	$k_{u1}, k_{v1}, k_{w1}, k_{v3}$
f_P	k_{u1}, k_{w1}	k_{u1}, k_{v1}, k_{w1}	$k_{u2}, k_{v2}, k_{w2}, k_{u3}, k_{v3}, k_{w3}$
d_B	$k_{u1}, k_{w1}, k_{w2}, k_{w3}$	k_{u2}, k_{v2}, k_{w2}	k_{v1}, k_{u3}, k_{v3}
d_P	k_{u1}, k_{w1}	k_{u2}, k_{w2}	$k_{v1}, k_{v2}, k_{u3}, k_{v3}, k_{w3}$

4.3 不同相关性的影响分析

为分析不同参数相关性对 PMS 固有特性的影

响, 本文将进一步分析不同相关情形下系统固有频率和解耦率对悬置刚度参数的灵敏度. 在前文研究基础上, 固定各悬置在 u 方向与 v 方向和 v 方向与 w 方向的刚度参数之间的相关系数, 将各悬置 u 方向与 w 方向的刚度参数之间的相关系数统一按照 0、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8 和 0.9 等 10 种相关情形进行变化. 分别进行计算并分析, 结果分别如图 4~图 7 所示.

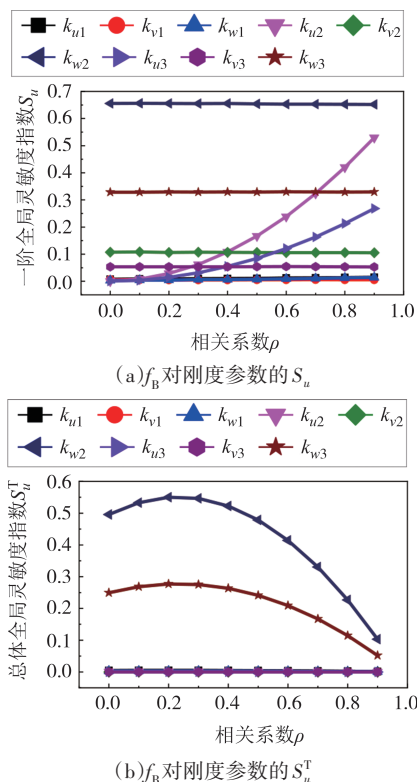


图 4 不同相关情形下 f_B 对刚度参数的全局灵敏度

Fig.4 The global sensitivities of f_B to stiffness parameters under different correlated cases

从图 4~图 7 可以发现, 考虑不同的参数相关性后, 各悬置刚度参数对系统固有频率与解耦率的影响发生了不同程度的变化. 综合分析可得如下结论:

1) 固有频率方面: 对于系统响应 f_B , 随着相关系数增大, 刚度参数 k_{u2} 、 k_{u3} 的一阶全局灵敏度指数逐渐增大, k_{w2} 、 k_{w3} 的总体全局灵敏度指数先略微增大后逐渐减小, 其余刚度参数的灵敏度没有明显变化. 对于系统响应 f_P , 随着相关系数增大, 刚度参数 k_{u1} 、 k_{w1} 的一阶全局灵敏度指数逐渐增大, k_{u1} 、 k_{u2} 、 k_{u3} 、 k_{w3} 的总体全局灵敏度指数逐渐减小, k_{w1} 的总体全局灵敏度指数则呈现出先略微增大后逐渐减小的趋势, 其余刚度参数的灵敏度没有明显变化. 总体上, 对于系统固

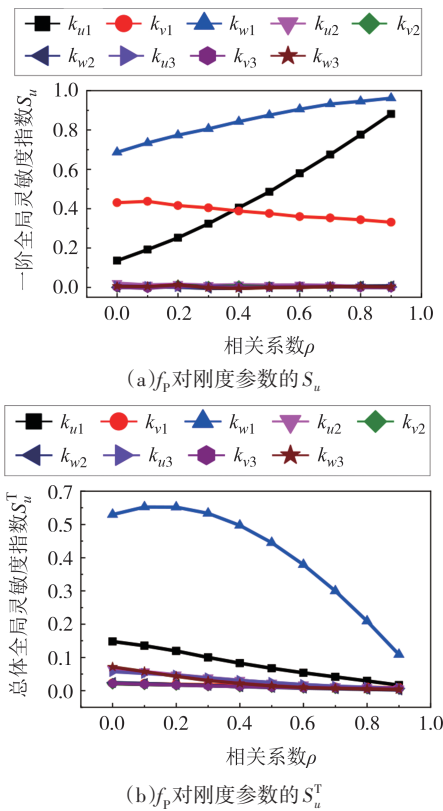


图5 不同相关情形下 f_p 对刚度参数的全局灵敏度

Fig.5 The global sensitivities of f_p to stiffness parameters under different correlated cases

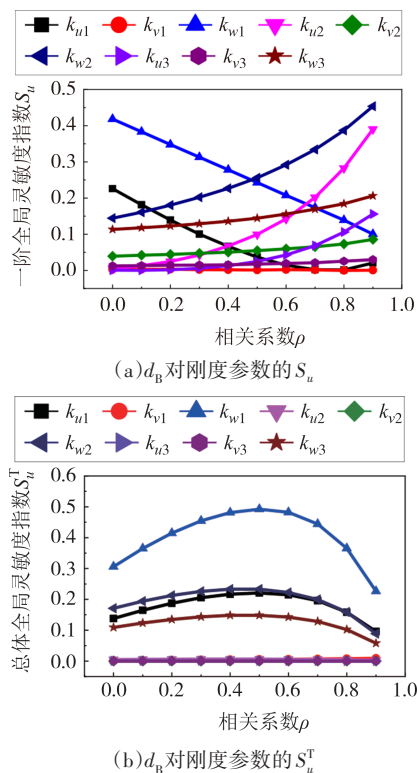


图6 不同相关情形下 d_b 对刚度参数的全局灵敏度

Fig.6 The global sensitivities of d_b to stiffness parameters under different correlated cases

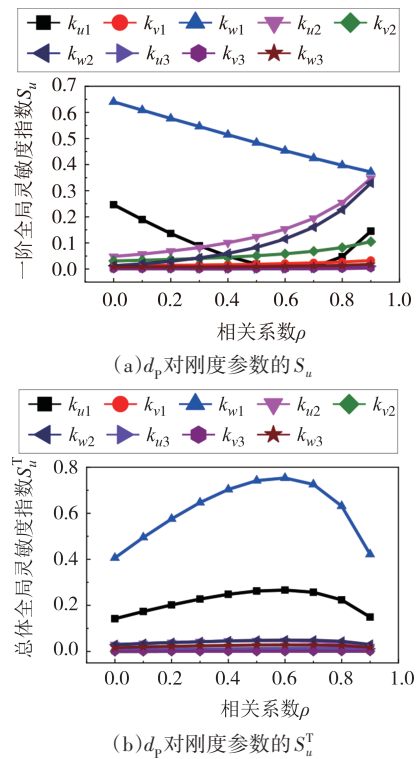


图7 不同相关情形下 d_p 对刚度参数的全局灵敏度

Fig.7 The global sensitivities of d_p to stiffness parameters under different correlated cases

有频率响应 f_b 和 f_p , 各刚度参数呈现出一阶全局灵敏度逐渐增大或基本不变, 以及总体全局灵敏度逐渐减小、先增大后减小或基本不变的规律。

2) 解耦率方面: 对于系统响应 d_b , 随着相关系数增大, 刚度参数 k_{u2} 、 k_{v2} 、 k_{w2} 、 k_{u3} 、 k_{v3} 、 k_{w3} 的一阶全局灵敏度逐渐增大, k_{u1} 的一阶全局灵敏度指数逐渐减小, k_{u1} 的一阶全局灵敏度则先减小后增大; 而 k_{u1} 、 k_{v1} 、 k_{w2} 、 k_{w3} 的总体全局灵敏度指数呈现先增大后减小的趋势。对于系统响应 d_p , 随着相关系数增大, k_{u2} 、 k_{v2} 、 k_{w2} 的一阶全局灵敏度指数逐渐增大, k_{u1} 的一阶全局灵敏度指数逐渐减小, k_{u1} 的一阶全局灵敏度指数则先减小后增大; 而 k_{u1} 、 k_{v1} 的总体全局灵敏度指数呈现出先增大后减小的趋势。总体上, 对于系统解耦率响应 d_b 和 d_p , 各刚度参数呈现出总体全局灵敏度指数先增大后减小或基本不变的规律, 而其一阶全局灵敏度变化相对复杂, 没有特定规律。

综上所述, 对于本文所研究的电动汽车 PMS, 将其刚度参数处理为概率变量并考虑不同相关性后, 系统固有特性对各刚度参数的全局灵敏度会出现不同趋势和不同程度的变化, 精确量化实际情形中概率变量的相关性, 可以得到更加合理的分析结果。此外, 系统响应为解耦率的情形下, 参数相关性变化对

刚度参数的全局灵敏度指数的影响规律更加复杂,在进行优化设计时应重点关注.

5 结论

1)对于所研究的电动汽车PMS,本文方法能有效求解系统刚度参数存在不确定性和相关性时的参数全局灵敏度指数,进而可分析刚度参数的不确定性或相关性对系统固有特性的影响规律.

2)随着刚度参数相关性变化,各参数的全局灵敏度会出现不同趋势和不同程度的变化,精确量化实际情形中参数的相关性可以得到更加合理的分析结果.系统响应为解耦率的情形下,相关性变化对刚度参数的全局灵敏度指数的影响规律更加复杂,在进行优化设计时应重点关注.

参考文献

- [1] 崔中,文桂林,赵子衡,等. 基于区间数的高速磨床主轴系统的不确定性优化研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2010,37(8):29-34.
CUI Z, WEN G L, ZHAO Z H, et al. The uncertain structural optimization based on interval number program for the spindle system of high speed grinder [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2010, 37(8):29-34. (in Chinese)
- [2] 黄晓婷,李沛航,吕辉. 含模糊不确定性的汽车盘式制动器稳定性研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2021, 35(8): 48-55.
HUANG X T, LI P H, LÜ H. Research on the stability of automotive disc brakes with fuzzy uncertainty [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2021, 35(8):48-55. (in Chinese)
- [3] 吴杰,上官文斌. 基于6 σ 的动力总成悬置系统鲁棒优化设计[J]. 振动与冲击,2008,27(8):64-67.
WU J, SHANGGUAN W B. Robust optimization design of powertrain mounting systems based on six sigma [J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(8):64-67. (in Chinese)
- [4] 陈剑,刘策,杨志远,等. 基于6Sigma方法的发动机悬置系统稳健优化设计[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2017,40(11):1469-1473.
CHEN J, LIU C, YANG Z Y, et al. Robust optimization design of engine mounting system based on Six Sigma method [J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2017, 40(11):1469-1473. (in Chinese)
- [5] 谢展,于德介,李蓉. 汽车发动机悬置系统的多目标稳健优化设计[J]. 汽车工程,2013,35(10):893-897.
XIE Z, YU D J, LI R. Multi-objective robust optimization design of vehicle engine mount systems [J]. Automotive Engineering, 2013, 35(10):893-897. (in Chinese)
- [6] XIN F L, QIAN L J, DU H P, et al. Multi-objective robust optimization design for powertrain mount system of electric vehicles [J]. Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control, 2017, 36(3):243-260.
- [7] 刘达斌,蒋胜强,毛江,等. 动力总成悬置系统优化中悬置刚度灵敏度分析[J]. 中国机械工程,2014,25(22):3109-3113.
LIU D B, JIANG S Q, MAO J, et al. Sensitivity analysis of mounting stiffness in power-train mounting system [J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(22):3109-3113. (in Chinese)
- [8] 张武,陈剑,夏海. 基于灵敏度分析的发动机悬置系统稳健优化设计[J]. 汽车工程,2009,31(8):728-732.
ZHANG W, CHEN J, XIA H. Robust optimal design of an engine mounting system based on sensitivity analysis [J]. Automotive Engineering, 2009, 31(8):728-732. (in Chinese)
- [9] ŞENDUR P, TUNÇ B. Design sensitivity and optimization of powertrain mount system design parameters for rigid body modes and kinetic energy distributions [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2020, 42(9):486.
- [10] 贾爱芹,陈建军,徐亚兰. 基于摄动法的不确定性汽车悬架振动控制特征值的凸模型分析[J]. 中南大学学报(自然科学版),2012,43(4):1320-1324.
JIA A Q, CHEN J J, XU Y L. Convex model analysis of vibration control eigenvalues of vehicle suspension system based on perturbation method [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2012, 43(4):1320-1324. (in Chinese)
- [11] 蔡伯豪. 考虑参数不确定性的动力总成悬置系统分析与优化[D]. 广州:华南理工大学,2020:12-15.
CAI B H. Analysis and optimization of powertrain mounting system considering uncertainty [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2020:12-15. (in Chinese)
- [12] KUCHERENKO S. Estimation of global sensitivity indices for models with dependent variables [J]. Computer Physics Communications, 2012, 183(4):937-946.
- [13] 肖思男,吕震宙,王薇. 不确定性结构全局灵敏度分析方法概述[J]. 中国科学:物理学 力学 天文学,2018,48(1):8-25.
XIAO S N, LÜ Z Z, WANG W. A review of global sensitivity analysis for uncertainty structure [J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2018, 48(1):8-25. (in Chinese)
- [14] 张农,王少华,张邦基,等. 液压互联悬架参数全局灵敏度分析与多目标优化[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2020,47(10):1-9.
ZHANG N, WANG S H, ZHANG B J, et al. Global sensitivity analysis and multi-objective optimization of hydraulically interconnected suspension parameters [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2020, 47(10):1-9. (in Chinese)
- [15] MOHAMMED N A. Comparing halton and sobol sequences in integral evaluation [J]. Zanco Journal of Pure and Applied Sciences, 2019, 31(1):32-39.
- [16] LÜ H, YANG K, HUANG X T, et al. Uncertainty and correlation propagation analysis of powertrain mounting systems based on multi-ellipsoid convex model [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 173:109058.
- [17] SHANGGUAN W B, LIU X A, LÜ Z P, et al. Design method of automotive powertrain mounting system based on vibration and noise limitations of vehicle level [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 76:677-695.