

黏弹性基体中 FG-CNTRCs 圆柱壳热振动特性分析

吴栋^{1,2}, 雷勇军^{1,2}, 于宝石^{1,2}, 唐雨^{1,2}, 张大鹏^{1,2†}

(1. 国防科技大学空天科学学院, 湖南长沙 410073;

2. 空天任务智能规划与仿真湖南省重点实验室, 湖南长沙 410073)

摘要:建立了考虑碳纳米管(Carbon Nanotubes, CNTs)尺度效应的宏观功能梯度碳纳米管增强复合材料(Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composites, FG-CNTRCs)圆柱壳自由振动特性的理论模型. 综合考虑 CNTs 的取向和尺度效应, 基于 Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) 方法和非局部理论建立了宏观 CNTRCs 的非局部 EMT 本构模型. 基于 Kirchhoff-Love 圆柱壳假设, 采用 Hamilton 原理推导了热环境中 visco-Pasternak 基体中 FG-CNTRCs 圆柱壳的自由振动控制方程, 利用 Navier 法得到两端简支圆柱壳的固有频率, 并与文献中结果进行对比, 验证了模型和方法的正确性. 分析了非局部参数、CNTs 的体积分数和分布方式、圆柱壳的长厚比、环境温度以及地基参数等对简支 FG-CNTRCs 圆柱壳自由振动特性的影响. 研究发现, 考虑 CNTs 的尺度效应后会降低 FG-CNTRCs 圆柱壳的抗弯刚度, 环境温度对简支 FG-CNTRCs 圆柱壳固有频率虚部的影响随 CNTs 体积分数的增大而增大, 且长厚比和地基的阻尼参数对虚部的影响有耦合作用.

关键词:尺度效应; 碳纳米管; 功能梯度复合材料; 热行为; 黏弹性地基

中图分类号: O343.6 **文献标志码:** A

Analysis on Thermal Vibration Characteristic of FG-CNTRCs Cylindrical Shell Resting on Viscoelastic Foundation

WU Dong^{1,2}, LEI Yongjun^{1,2}, YU Baoshi^{1,2}, TANG Yu^{1,2}, ZHANG Dapeng^{1,2†}

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Hunan Key Laboratory of Intelligent Planning and Simulation for Aerospace Missions, Changsha 410073, China)

Abstract: A theoretical model for the free vibration characteristics of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composites (FG-CNTRCs) thin cylindrical shells considering the scale effect of Carbon Nanotubes (CNTs) was established. First, the nonlocal Eshelby-Mori-Tanaka (EMT) constitutive model of macroscopic CNTRCs was developed based on the EMT method and nonlocal theory by considering the orientation and scale effect of CNTs. Then, based on the Kirchhoff-Love cylindrical shell assumption, the free vibration governing equations for FG-CNTRCs cylindrical shells on the visco-Pasternak foundation in the thermal environment were derived by

* 收稿日期:2022-05-31

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11902348, 11872372); National Natural Science Foundation of China(11902348, 11872372); 湖南省自然科学基金资助项目(2020JJ5650); Natural Science Foundation of Hunan Province(2020JJ5650); 国防科技大学科研计划资助项目(ZK20-27); Science Project of the National University of Defense Technology(ZK20-27)

作者简介:吴栋(1997—),男,安徽阜阳人,国防科技大学博士研究生

† 通信联系人, E-mail: zhangdapeng@nudt.edu.cn

applying the Hamilton principle. The natural frequencies of the simply supported cylindrical shells at both ends were obtained by the Navier method, and the results were compared with those in the literature to verify the correctness of the model and method. Finally, the effects of nonlocal parameters, volume fraction and distribution of CNTs, length-to-thickness ratio of cylindrical shell, ambient temperature, and foundation parameters on the free vibration characteristics of simply-supported FG-CNTRCs cylindrical shell were analyzed. It is found that considering the scale effect of CNTs can reduce the bending stiffness of FG-CNTRCs cylindrical shells. The influence of ambient temperature on the imaginary part of the natural frequency of simply supported FG-X-CNTRCs cylindrical shell increases with the increase of CNTs volume fraction, and the influence of length-thickness ratio and foundation damping parameters on the imaginary part is coupled.

Key words: scale effect; carbon nanotubes; functionally graded composite; thermal behavior; viscoelastic foundation

碳纳米管(Carbon Nanotubes, CNTs)具有卓越的性能,将CNTs作为增强体填充到基体中制成复合材料,可将微纳米尺度下CNTs的优异性能保留到宏观尺度^[1],提高复合材料综合力学性能. CNTs增强复合材料(Carbon Nanotubes Reinforced Composites, CNTRCs)在航空航天、高速列车和隐身结构等领域展现出广阔应用前景^[2]. 开展CNTRCs结构的力学行为研究有助于理解力学特性,指导并促进其在工业中的应用.

开展CNTRCs结构力学行为研究的方法有实验方法、分子仿真方法(分子动力学或分子力学)和理论方法. 其中,实验方法耗时长、成本高,分子仿真方法受限于研究对象的尺寸^[3],因此,采用理论方法研究CNTRCs结构的力学行为显得尤为必要. 而获得CNTRCs的等效材料参数是开展理论研究的基础,目前广泛采用的理论主要有^[4]:扩展的混合法则和Eshelby-Mori-Tanaka(EMT)方法. Shen^[5]在前人研究的基础上,通过匹配CNTRCs弹性模量理论计算结果和分子动力学仿真结果,从而将CNTs效率参数引入经典的混合法则,形成扩展的混合法则. 该方法相对简便,但其局限性是无法考虑CNTs的固有特性,如CNTs的尺度效应. 最初,EMT方法被应用于预估含有宏观尺度夹杂相复合材料的等效力学参数, Odegard等^[6]创新性地将EMT方法运用于纳米复合材料的力学特性分析中,获得了CNTRCs的等效性能参数,并与实验结果进行对比,验证了所提方法的正确性. EMT方法在高CNTs体积分数时仍有较高的精度^[7],且可在理论模型中考虑CNTs的固有特性,

因此国内外学者广泛采用EMT方法得到CNTRCs的等效材料参数,基于连续介质力学理论研究CNTRCs结构的力学行为.

实验发现^[8],微纳米尺度下结构力学特性和宏观尺度下表现出较大差异,产生这种差异的原因是微纳米尺度下结构存在尺度效应. 为了突破经典的连续介质力学理论无法考虑微纳米结构尺度效应的局限性,学者们提出了非局部理论、应变梯度理论和偶应力理论等,其中非局部理论与分子动力学和原子晶格动力学的仿真结果吻合较好^[9-10],在CNTs的力学行为研究中取得了丰硕成果^[11-13]. 当CNTRCs结构达到微纳米尺度时,同样存在尺度效应. 国内外学者们还采用EMT方法获得微/纳米尺度下CNTRCs结构的等效力学性能参数,基于非局部理论研究了微/纳米尺度下CNTRCs结构的力学行为^[14-15].

20世纪末,学者们就已经通过实验证实了增强体的尺度下降同样会对复合材料的性能产生影响^[16-17],但目前CNTs的尺度效应对CNTRCs结构力学行为的影响方面的研究有所欠缺,因此,有必要考虑CNTs尺度效应建立CNTRCs结构的力学特性研究的理论模型. 可设计性是复合材料相对传统材料的显著优势之一,研究不同CNTs体积分数及其沿特定方向不同分布方式有益于理解CNTRCs结构的特点,为设计合适CNTRCs结构形式奠定理论基础. 此外,实际工程中CNTRCs结构工作在复杂环境中,如置于减振的黏弹性基体以及环境温度剧烈变化中. 综上所述,研究复杂环境中FG-CNTRCs结构的力学行为亟须考虑CNTs的尺度效应时,为其设计和

应用提供理论依据.

基于以上考虑,本文以黏弹性基体中的 FG-CNTRCs 薄圆柱壳为研究对象.首先,基于 EMT 方法并考虑 CNTs 的尺度效应和取向,建立 CNTRCs 的非局部 EMT 本构模型.在此基础上,采用 Hamilton 原理推导 visco-Pasternak 黏弹性基体中 FG-CNTRCs Kirchhoff-Love 圆柱壳的热自由振动控制方程,求得两端简支边界条件下固有频率的半解析解,并与文献对比验证其正确性.最后,分析非局部参数、CNTs 体积分数及分布方式、圆柱壳几何尺寸、环境温度和地基参数等对 FG-CNTRCs 圆柱壳热自由振动特性的影响.

1 热振动问题建模

1.1 CNTRCs 的非局部 EMT 本构模型

考虑基体中 CNTs 的取向,可由概率密度函数 $p(t_1, t_2)$ 表征,满足^[18]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p(t_1, t_2) \sin t_1 dt_1 dt_2 = 1 \quad (1)$$

式中: (t_1, t_2) 为欧拉角.当 CNTs 在 CNTRCs 中完全随机取向时,有 $p(t_1, t_2) = (2\pi)^{-1}$.

采用非局部理论考虑 CNTs 的尺度效应,其表达式为:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right] \sigma_{\text{nonlocal}} = \sigma_{\text{local}} \quad (2)$$

式中: e_0 为 CNTs 的材料常数非局部参数,可通过实验或分子动力学仿真方法确定^[19]; a 为 CNTs 的内部特征尺寸; ∇^2 为拉普拉斯算子; σ_{nonlocal} 和 σ_{local} 分别为非局部应力和经典连续介质力学理论涉及的局部应力.

经典的 EMT 方法忽略了 CNTs 的尺度效应,此时,代表性体积单元 (Representative Volume Element, RVE) 中 CNT 的应变 $\varepsilon_{\text{CNT}}(t_1, t_2)$ 、局部应力 $\sigma_{\text{CNT}}^{\text{local}}(t_1, t_2)$ 与基体的应力 σ_{matrix} 之间的关系为:

$$\varepsilon_{\text{CNT}}(t_1, t_2) = \mathbf{A}_{\text{EMT}}(t_1, t_2) \mathbf{C}_m^{-1} \sigma_{\text{matrix}} \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{CNT}}^{\text{local}}(t_1, t_2) = \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{\text{EMT}}(t_1, t_2) \mathbf{C}_m^{-1} \sigma_{\text{matrix}} \quad (4)$$

式中: \mathbf{C}_m 和 \mathbf{C}_r 分别表示基体和 CNTs 的刚度矩阵; \mathbf{A}_{EMT} 为四阶矩阵^[20].

基于式(2)和式(4)可得,考虑 CNTs 尺度效应后 RVE 中 CNT 的非局部应力 $\sigma_{\text{CNT}}^{\text{nonlocal}}(t_1, t_2)$ 和基体应力 σ_{matrix} 之间的关系为:

$$\sigma_{\text{CNT}}^{\text{nonlocal}}(t_1, t_2) = \mathbf{C}_r \mathbf{A}_{\text{EMT}}(t_1, t_2) \mathbf{C}_m^{-1} \sigma_{\text{matrix}} \quad (5)$$

CNTRCs 中 CNTs 的平均应变 $\bar{\varepsilon}_{\text{CNT}}$ 、平均应力 $\bar{\sigma}_{\text{CNT}}^{\text{nonlocal}}$ 用基体的平均应变 $\varepsilon_{\text{matrix}}$ 、平均应力 σ_{matrix} 表示为:

$$\bar{\varepsilon}_{\text{CNT}} = \bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}} \varepsilon_{\text{matrix}} \quad (6)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right] \bar{\sigma}_{\text{CNT}}^{\text{nonlocal}} = \bar{\mathbf{C}}_r \bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}} \mathbf{C}_m^{-1} \sigma_{\text{matrix}} \quad (7)$$

式中:

$$\bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p(t_1, t_2) \mathbf{A}_{\text{EMT}}(t_1, t_2) \sin t_1 dt_1 dt_2 \quad (8)$$

假设基体为各向同性线弹性材料且与 CNTs 之间完美黏结,有

$$\sigma = f_m \sigma_{\text{matrix}} + f_r \bar{\sigma}_{\text{CNT}}^{\text{nonlocal}} \quad (9)$$

$$\varepsilon = f_m \varepsilon_{\text{matrix}} + f_r \bar{\varepsilon}_{\text{CNT}} \quad (10)$$

式中: f_m 和 f_r 分别表示基体和 CNTs 的体积分数,且 $f_m + f_r = 1$.

将式(6)和式(7)代入式(9)和式(10)可得:

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right] \sigma = \mathbf{C} \varepsilon - (e_0 a)^2 \mathbf{C}_{\text{nonlocal}} \nabla^2 \varepsilon \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{C} = (f_m \mathbf{C}_m + f_r \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}}) (f_m \mathbf{I}_u + f_r \bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}})^{-1} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_{\text{nonlocal}} = f_m \mathbf{C}_m (f_m \mathbf{I}_u + f_r \bar{\mathbf{A}}_{\text{EMT}})^{-1} \quad (13)$$

式中: \mathbf{I}_u 表示单位矩阵.

对于式(11),令非局部参数 $e_0 a$ 为零即可退化为经典的 EMT 方法,其刚度矩阵的 Voigt 记法为:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} n & l & l & 0 & 0 & 0 \\ l & k+m & k-m & 0 & 0 & 0 \\ l & k-m & k+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: k, l, m, n, p 表示 Hill 弹性模量.

当 CNTs 在基体中完全随机取向时, CNTRCs 可视为各向同性材料,其弹性模量和泊松比的表达式参见文献[18].

值得注意的是,本节中构建的非局部 EMT 模型不仅适用于 CNTRCs 的力学特性分析,同样适用于研究一般纳米增强复合材料的力学行为.

1.2 FG-CNTRCs 薄圆柱壳的振动控制方程

图 1 为 visco-Pasternak 基体中 FG-CNTRCs 薄圆柱壳正视图.以圆柱壳中性面边界上一点建立圆柱坐标系 (x, θ, z) , 其中 θ 轴和 z 轴方向分别表示圆柱壳的周向和径向;圆柱壳的长度、平均半径和厚度分

别为 L 、 R 和 h ;黏弹性地基采用 visco-Pasternak 地基模型模拟,其 Winkler 弹性模量、剪切模量和阻尼参数分别为 k_w 、 k_s 和 c_d 。

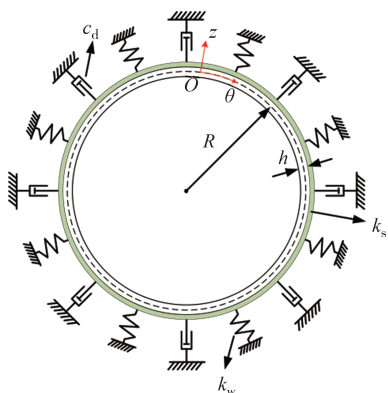


图 1 visco-Pasternak 基体中 FG-CNTRCs 薄圆柱壳正视图
Fig.1 Front view of thin cylindrical shell of FG-CNTRCs resting on visco-Pasternak foundation

图 2 为 CNTs 沿圆柱壳厚度方向梯度分布方式,图中圆点在空间竖向分布代表 CNTs 沿圆柱壳厚度截面分布量的相对大小,其定量表达式为:

$$f_r(z) = \begin{cases} f_r^* & \text{(UD)} \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right) f_r^* & \text{(FG-V)} \\ 2\left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) f_r^* & \text{(FG-O)} \\ \frac{4|z|}{h} f_r^* & \text{(FG-X)} \end{cases} \quad (15)$$

式中:UD 表示 CNTs 沿圆柱壳厚度截面均匀分布;FG-V、FG-O 和 FG-X 分别表示 CNTs 沿圆柱壳厚度截面分别为 V 型、O 型和 X 型(见图 2)。显然,不同 CNTs 分布方式下圆柱壳中 CNTs 的总体积相同。

FG-CNTRCs 圆柱壳等效材料属性(泊松比和密

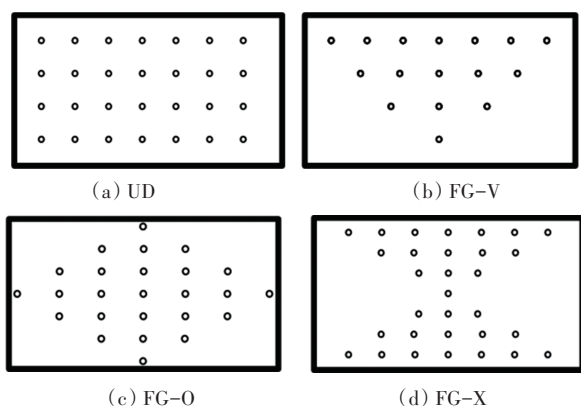


图 2 CNTs 沿圆柱壳厚度方向梯度分布方式

Fig.2 Gradient distribution of CNTs along the thickness direction of the cylindrical shell

度等)的表达式为:

$$p(z) = f_r(z) p_r + f_m(z) p_m \quad (16)$$

基于 Kirchhoff-Love 薄圆柱壳理论,FG-CNTRCs 圆柱壳的位移场为:

$$u(x, \theta, z, t) = u_0(x, \theta, t) - z \frac{\partial w_0(x, \theta, t)}{\partial x} \quad (17)$$

$$v(x, \theta, z, t) = v_0(x, \theta, t) - \frac{z}{R} \frac{\partial w_0(x, \theta, t)}{\partial \theta} \quad (18)$$

$$w(x, \theta, z, t) = w_0(x, \theta, t) \quad (19)$$

式中: (u, v, w) 分别表示 FG-CNTRCs 圆柱壳上任一点的位移沿 (x, θ, z) 轴的分量; (u_0, v_0, w_0) 分别为圆柱壳中性面上一点位移沿 (x, θ, z) 轴的分量; t 为时间。

根据式(17)、式(18)和式(19),FG-CNTRCs 的应变场为:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{w_0}{R} + \frac{\partial v_0}{R \partial \theta} - \frac{z}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right) \quad (21)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u_0}{R \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{z}{R} \left(\frac{2 \partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (22)$$

将式(20)、式(21)和式(22)代入式(11),进一步考虑热环境的影响,可得:

$$\begin{aligned} [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{xx} = & c_{11}(z) [\varepsilon_{xx} - \alpha_{11}(z) \Delta T] + \\ & c_{12}(z) [\varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_{22}(z) \Delta T] - (e_0 a)^2 c_{n11}(z) \nabla^2 \varepsilon_{xx} - \\ & (e_0 a)^2 c_{n12}(z) \nabla^2 \varepsilon_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{\theta\theta} = & c_{12}(z) [\varepsilon_{xx} - \alpha_{11}(z) \Delta T] + \\ & c_{22}(z) [\varepsilon_{\theta\theta} - \alpha_{22}(z) \Delta T] - (e_0 a)^2 c_{n12}(z) \nabla^2 \varepsilon_{xx} - \\ & (e_0 a)^2 c_{n22}(z) \nabla^2 \varepsilon_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} [1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \tau_{x\theta} = & c_{66}(z) \gamma_{x\theta} - \\ & (e_0 a)^2 c_{n66}(z) \nabla^2 \gamma_{x\theta} \end{aligned} \quad (25)$$

式中: ΔT 为相对室温(300 K)的温度变化; $(\alpha_{11}, \alpha_{22})$ 分别为 CNTRCs 沿 (x, θ) 轴的热膨胀系数. 其表达式为^[21]:

$$\alpha_{11} = f_r \alpha_{11}^{\text{CNT}} + f_m \alpha_m \quad (26)$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{\text{CNT}}) f_r \alpha_{22}^{\text{CNT}} + (1 + \nu_m) f_m \alpha_m - \nu_{12} \alpha_{11} \quad (27)$$

式中: α_{11}^{CNT} 、 α_{22}^{CNT} 和 α_m 为 CNTs 和基体的热膨胀系数; ν_{12}^{CNT} 和 ν_m 为 CNTs 和基体的泊松比; ν_{12} 为 CNTRCs 的

泊松比. 由于泊松比受环境温度变化和空间位置的影响较小^[21], 有:

$$\nu_{12} = f_r \nu_{12}^{\text{CNT}} + f_m \nu_m \quad (28)$$

通过 Hamilton 原理获得系统的自由振动控制方程, 其表达式为:

$$\int_0^T (\delta U - \delta K - \delta W) dt = 0 \quad (29)$$

式中: $\delta \cdot$ 表示对变量进行变分运算.

FG-CNTRCs 圆柱壳的虚应变能的表达式为:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) dV = \\ & \int_{\Theta} (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta}^0 + N_{x\theta} \delta \varepsilon_{x\theta}^0 + \\ & M_{xx} \delta \kappa_{xx} + M_{\theta\theta} \delta \kappa_{\theta\theta} + M_{x\theta} \delta \kappa_{x\theta}) d\Theta \end{aligned} \quad (30)$$

式中: Θ 表示 FG-CNTRCs 圆柱壳的中性面区域, 且

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} dz \quad (31)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz \quad (32)$$

FG-CNTRCs 圆柱壳的虚动能 δK 的表达式为:

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_V \rho(z) (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) dV = \\ & \int_{\Theta} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \delta u_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \delta v_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial \delta w_0}{\partial t} \right) \right] d\Theta \end{aligned} \quad (33)$$

式中:

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz \quad (34)$$

外力对 FG-CNTRCs 做的虚功 δW 的表达式为:

$$\delta W = \int_{\Theta} \left[-N_Q \delta w_0 + N_{Tx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_{T\theta} \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} \frac{\partial \delta w_0}{R \partial \theta} \right] d\Theta \quad (35)$$

式中: N_Q 为 visco-Pasternak 地基对 FG-CNTRCs 圆柱壳的作用力, $(N_{Tx}, N_{T\theta})$ 为由环境温度变化 ΔT 产生的外载荷沿 (x, θ) 轴的分量, 其表达式分别为:

$$N_Q = k_v w_0 - k_s \nabla^2 w_0 + c_d \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (36)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{Tx} \\ N_{T\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} c_{11}(z) \alpha_{11}(z) \\ c_{22}(z) \alpha_{22}(z) \end{Bmatrix} \Delta T dz \quad (37)$$

将式(30)、式(33)和式(35)代入式(29), 可得系统的自由振动控制方程为:

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \quad (38)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial M_{\theta\theta}}{R^2 \partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial x} + \frac{\partial N_{\theta\theta}}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \\ & \frac{N_{\theta\theta}}{R} - N_Q - N_{Tx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \\ & \frac{N_{T\theta}}{R^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (40)$$

同时, 根据 δu_0 、 δv_0 和 δw_0 在时域和空间域内的任意性可得系统的边界条件为:

$$u_0 = 0 \text{ 或 } \frac{N_{x\theta}}{R} n_\theta + N_{xx} n_x = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} w_0 = 0 \text{ 或 } \\ \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} - N_{Tx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) n_x + \end{aligned} \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial M_{\theta\theta}}{R^2 \partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial x} - \frac{N_{T\theta}}{R^2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) n_\theta = 0$$

$$\begin{aligned} v_0 = 0 \text{ 或 } \\ \left(\frac{M_{\theta\theta}}{R^2} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} \right) n_\theta + \left(N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} \right) n_x = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_{\theta\theta} n_x + M_{x\theta} n_\theta = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_{x\theta} n_\theta + M_{xx} n_x = 0 \quad (45)$$

式中: (n_x, n_θ) 分别表示单位向量沿 (x, θ) 轴的方向余弦. 设 FG-CNTRCs 圆柱壳的初始速度和初始位移均为零, 即

$$\frac{\partial u_0(x, \theta, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_0(x, \theta, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w_0(x, \theta, 0)}{\partial t} = 0 \quad (46)$$

$$u_0(x, \theta, 0) = v_0(x, \theta, 0) = w_0(x, \theta, 0) = 0 \quad (47)$$

自由振动控制方程[式(38)、式(39)和式(40)]、边界条件[式(41)~式(45)]和初始条件[式(46)、式(47)]共同构成了 visco-Pasternak 基体中 FG-CNTRCs 圆柱壳热自由振动问题的定解条件.

2 方程求解

本文利用 Navier 法求解简支(Simply-Supported, S-S)FG-CNTRCs 圆柱壳的自由振动固有频率, 对于其他边界条件下结构的自由振动固有频率, 可通过 Galerkin 法^[22]、Rayleigh-Ritz 法^[23]等方法进行求解.

S-S 边界条件可表示为:

$$v = w = N_{xx} = M_{xx} = 0 \quad (48)$$

为了便于求解和分析, 引入以下无量纲参数:

$$\begin{aligned}
(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= \left(\frac{u_0}{L}, \frac{v_0}{R}, \frac{w_0}{h} \right), \alpha = \frac{e_0 a}{L} \\
(\eta, \xi, \lambda) &= \left(\frac{h}{L}, \frac{h}{R}, \frac{L}{R} \right), \bar{k}_w = \frac{k_w h}{E_m}, \bar{x} = \frac{x}{L} \\
\bar{k}_s &= \frac{k_s}{E_m L}, \bar{c}_d = \frac{c_d h}{L \sqrt{E_m \rho_m}}, \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \\
(\bar{N}_{Tx}, \bar{N}_{T\theta}) &= \left(\frac{N_{Tx}}{E_m h}, \frac{N_{T\theta}}{E_m h} \right), \bar{I}_0 = \frac{I_0}{\rho_m h} \\
(\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}) &= \left(\frac{A_{ij}}{E_m h}, \frac{B_{ij}}{E_m h^2}, \frac{D_{ij}}{E_m h^3} \right) \\
(\bar{A}_{nij}, \bar{B}_{nij}, \bar{D}_{nij}) &= \left(\frac{A_{nij}}{E_m h}, \frac{B_{nij}}{E_m h^2}, \frac{D_{nij}}{E_m h^3} \right)
\end{aligned} \quad (49)$$

式中:

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (50)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{nij} \\ B_{nij} \\ D_{nij} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{nij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad (51)$$

基于Navier法,FG-CNTRCs圆柱壳的位移场可表示为:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\bar{x}, \theta, \tau) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} U_{mn} \cos(k_m \bar{x}) \cos(n\theta) e^{i\Omega_{mn} \tau} \\
\bar{v}(\bar{x}, \theta, \tau) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} V_{mn} \sin(k_m \bar{x}) \sin(n\theta) e^{i\Omega_{mn} \tau} \\
\bar{w}(\bar{x}, \theta, \tau) &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} W_{mn} \sin(k_m \bar{x}) \cos(n\theta) e^{i\Omega_{mn} \tau}
\end{aligned} \quad (52)$$

式中:\$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn})\$分别为振幅沿\$(x, \theta, z)\$轴的分量;\$n\$为周向波数;\$k_m=m\pi\$为轴向波数;\$\Omega_{mn}\$为FG-CNTRCs圆柱壳的无量纲固有圆频率,与有量纲固有圆频率\$\omega_{mn}\$之间的转换关系为:

$$\Omega_{mn} = \omega_n L \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (53)$$

将式(49)和式(52)代入式(38)、式(39)和式(40),可将系统的自由振动控制方程改写为:

$$\left[\mathbf{K}_{3 \times 3} - \Omega_{mn}^2 \mathbf{M}_{3 \times 3} + \Omega_{mn} \mathbf{C}_{3 \times 3} \right] \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (54)$$

式中:\$\mathbf{K}_{3 \times 3}\$、\$\mathbf{M}_{3 \times 3}\$和\$\mathbf{C}_{3 \times 3}\$可借助数学软件推导,为保证行文简洁,此处不列出具体的表达式.

对于式(54),FG-CNTRCs的位移场\$\{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}\}^T\$存在非零解的条件为:

$$\det[\mathbf{K}_{3 \times 3} - \Omega_{mn}^2 \mathbf{M}_{3 \times 3} + \Omega_{mn} \mathbf{C}_{3 \times 3}] = 0 \quad (55)$$

通过求解式(55),可得visco-Pasternak基体中FG-CNTRCs薄圆柱壳自由振动的无量纲固有频率.

3 结果与讨论

本节首先将模型退化并与文献中报道的结果进行对比,验证所建模型和求解方法的正确性,然后分析非局部参数、CNTs分布方式与体积分数、环境温度和地基参数等因素对FG-CNTRCs圆柱壳自由振动无量纲固有频率的影响规律.

如无特别说明,取\$k_w=100\$ MN/m³, \$k_s=10\$ MN/m, \$c_d=1 \times 10^3\$ N·s/m²[24],且忽略温度对地基材料参数的影响;此外,FG-CNTRCs圆柱壳的长度\$L\$、平均半径\$R\$和厚度\$h\$分别为1 m、1 m和0.025 m, \$f_r^*=5\%\$. 基体材料选用聚甲基丙烯酸甲酯(Polymethyl Methacrylate, PMMA),其泊松比\$\nu_m=0.34\$,密度\$\rho_m=1\ 150\$ kg/m³,考虑环境温度对其弹性模量\$E_m\$和热膨胀系数\$\alpha_m\$的影响,有[25]

$$E_m = (3.52 - 0.0034T) \text{ GPa} \quad (56)$$

$$\alpha_m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} \quad (57)$$

式中:\$T=T_0+\Delta T\$, \$T_0=300\$ K. 根据式(56)和式(57)可知室温下PMMA的弹性模量\$E_m=2.5\$ GPa,热膨胀系数\$\alpha_m=4.5 \times 10^{-5}\$ K⁻¹. 选取单壁碳纳米管(Single-walled Carbon Nanotubes, SWCNTs)作为增强相,泊松比\$\nu_{12}^{\text{CNT}}=0.175\$,密度\$\rho_{\text{CNT}}=1\ 400\$ kg/m³,温度相关材料参数为[26]:

$$P(T) = P_0(1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (58)$$

式中:\$P_0\$、\$P_1\$、\$P_2\$和\$P_3\$为常数,对于不同的材料参数,其具体数值如表1所示.

此外,合适的非局部参数可确保分析结果的合理性,可通过将理论结果与实验、分子动力学或多尺度方法分析结果进行匹配确定非局部参数的值[19]. 现有结果表明,非局部参数与载荷工况和结构形状等因素相关[27]. 目前,国内外学者多采用参数分析的方式研究非局部参数对结构力学行为的影响,如无特别说明,本文取非局部参数\$\alpha=0.1\$.

3.1 正确性验证

Loy等[28]利用广义微分求积法得到了不同边界条件下均匀Kirchhoff-Love圆柱壳的自由振动特性. 当忽略CNTs、visco-Pasternak地基和热环境的影响(\$f_r^*=\alpha=k_w=k_s=c_d=\Delta T=0\$)时,本文所建模型可退化为均

表1 SWCNTs的热机械性能参数

Tab.1 Thermo-mechanical properties of SWCNTs

材料参数	P_0	P_1	P_2	P_3
E_{11}^{CNT}/TPa	6.399 80	$6.778\ 99 \times 10^{-4}$	$1.160\ 97 \times 10^{-6}$	$6.966\ 36 \times 10^{-10}$
E_{22}^{CNT}/TPa	8.021 55	$6.757\ 27 \times 10^{-4}$	$1.156\ 26 \times 10^{-6}$	$6.934\ 45 \times 10^{-10}$
G_{12}^{CNT}/TPa	1.047 55	$2.469\ 69 \times 10^{-3}$	$4.948\ 31 \times 10^{-6}$	$3.182\ 24 \times 10^{-9}$
$\alpha_{11}^{CNT}/10^{-6}\text{K}^{-1}$	1.125 15	$2.036\ 78 \times 10^{-2}$	$2.565\ 88 \times 10^{-5}$	$1.009\ 87 \times 10^{-8}$
$\alpha_{22}^{CNT}/10^{-6}\text{K}^{-1}$	5.437 15	$1.810\ 92 \times 10^{-4}$	$5.333\ 68 \times 10^{-8}$	$2.299\ 00 \times 10^{-12}$

匀 Kirchhoff-Love 圆柱壳模型. 表 2 为 S-S 边界条件下均匀 Kirchhoff-Love 圆柱壳无量纲固有频率的对比结果, 其中 $L/R=20, h/R=0.01, \nu=0.3$, 无量纲固有频率的表达式为:

$$\Omega = \omega R \sqrt{\frac{(1 - \nu^2)\rho}{E}} \quad (59)$$

由表 2 可以看出, 不同周向波数 n 下, 本文得到的两端简支均匀圆柱壳无量纲固有频率与文献[28]中所列结果均吻合较好.

表2 S-S 边界条件下均匀 Kirchhoff-Love 圆柱壳无量纲固有频率的对比结果

Tab.2 Comparison of dimensionless natural frequencies of uniform Kirchhoff-Love cylindrical shells under S-S boundary conditions

(m, n)	本文解	Loy 等 ^[28]	相对误差/%
(1, 1)	0.016 1	0.016 1	0
(1, 3)	0.022 1	0.022 1	0
(1, 5)	0.068 0	0.068 0	0
(1, 7)	0.137 2	0.137 2	0
(1, 9)	0.229 6	0.229 6	0

Loy 等^[29]基于 Rayleigh-Ritz 法得到了 S-S 边界条件下 FG Kirchhoff-Love 圆柱壳的振动特性, 并进行了参数影响分析. 当忽略纳米夹杂的尺度效应、visco-Pasternak 地基和热应变的影响 ($\alpha=k_w=k_s=c_d=\Delta T=0$) 时, 本文所建模型可退化为 FG Kirchhoff-Love 圆柱壳模型. 圆柱壳的半径 $R=1\text{ m}$, $\lambda=20, \xi=0.002$, 材料参数设置与文献[29]一致.

表 3 为 S-S 边界条件下 FG Kirchhoff-Love 圆柱壳无量纲固有频率的对比结果. 由表 3 可知, 本文求解的简支功能梯度圆柱壳固有频率具有较高的精度; S-S 边界条件下 FG 圆柱壳的基频出现在 $(m, n)=(1, 3)$ 处. 后续主要分析不同参数对 FG-CNTRCs 圆柱壳基频的影响规律.

3.2 参数影响分析

表 4 为不同地基参数和非局部参数下 CNTRCs 圆柱壳的无量纲固有频率. 由表 4 可以看出,

表3 S-S 边界条件下 FG Kirchhoff-Love 圆柱壳无量纲固有频率的对比结果

Tab.3 Comparison of dimensionless natural frequencies of FG Kirchhoff-Love cylindrical shells under S-S boundary conditions

N	(m, n)	本文解	Loy 等 ^[29]	相对误差/%
1	(1, 1)	13.211 0	13.211 0	0
	(1, 2)	4.480 1	4.480 0	+0.002
	(1, 3)	4.157 0	4.156 9	+0.002
	(1, 4)	7.038 4	7.038 4	0
	(1, 5)	11.24 1	11.241 0	0
2	(1, 1)	13.10 4	13.103 0	+0.008
	(1, 3)	4.123 6	4.123 5	+0.002
	(1, 5)	11.15 1	11.151 0	0
5	(1, 1)	12.99 8	12.998 0	0
	(1, 3)	4.089 2	4.089 1	+0.002
	(1, 5)	11.061 0	11.061 0	0

CNTRCs 圆柱壳的无量纲固有频率分为实部和虚部, 分别表示系统的阻尼因子和有阻尼固有频率, 其中系统稳定的充要条件为固有频率实部为负^[30], 且虚部反映了结构的抗弯刚度^[31], 因此, 本文主要分析各参数对无量纲固有频率虚部的影响规律. 非局部参数 α 对无量纲固有频率实部的影响较小, 而虚部随非局部参数 α 的增大而减小. 当非局部参数和地基弹性参数相同时, 不同 CNTs 分布类型对应的 S-S CNTRCs 圆柱壳无量纲固有频率虚部数值按大小排序为: $\text{FG-O} < \text{FG-V} < \text{UD} < \text{FG-X}$, 这是由于圆柱壳的内、外径区域是承受正应力的主要区域, 而在正应力较大的区域分布更多的 CNTs, 有利于充分发挥 CNTs 对复合材料抗弯性能的增强作用. 因此, FG-X-CNTRCs 圆柱壳的无量纲固有频率虚部最大, 同时表明了 CNTs 在 FG-X 分布方式下的抗弯刚度最大. 此外, 非局部参数对无量纲固有频率虚部的影响幅度随结构抗弯刚度的增大而增大, 不同 CNTs 分布类型对应的无量纲固有频率虚部减小幅度按大小排序为 ($k_w=k_s=0$): $\text{FG-O} (23.34\%) < \text{FG-V} (23.35\%) < \text{UD} (23.36\%) < \text{FG-X} (23.41\%)$.

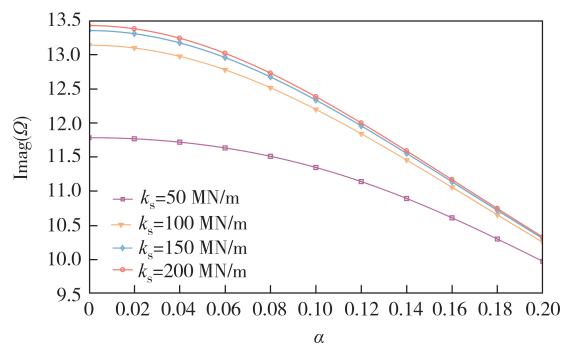
表 4 不同地基参数和非局部参数下 CNTRCs 圆柱壳的无量纲固有频率

Tab. 4 Dimensionless natural frequencies of CNTRCs cylindrical shell with different foundation parameters and nonlocal parameter

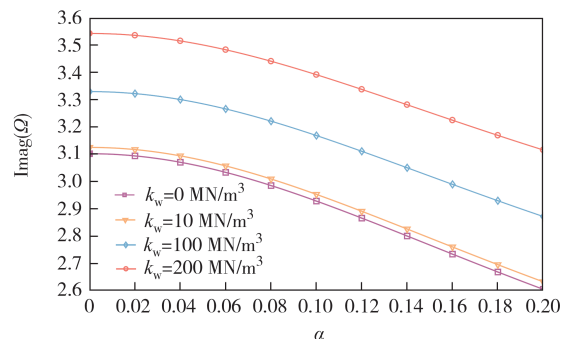
$(k_w, k_s)/$ (MN/m ³ , MN/m)	α	CNTs 分布类型			
		UD	FG-X	FG-V	FG-O
(0, 0)	0	-0.010 8+2.560 2i	-0.010 8+2.617 9i	-0.010 8+2.551 5i	-0.010 8+2.539 1i
	0.1	-0.010 8+2.357 2i	-0.010 8+2.409 9i	-0.010 8+2.349 2i	-0.010 8+2.338 0i
	0.2	-0.010 8+1.962 2i	-0.010 8+2.005 1i	-0.010 8+1.955 6i	-0.010 8+1.946 5i
(100, 0)	0	-0.010 8+2.832 5i	-0.010 8+2.884 7i	-0.010 8+2.823 6i	-0.010 8+2.813 5i
	0.1	-0.010 8+2.650 4i	-0.010 8+2.697 4i	-0.010 8+2.642 2i	-0.010 8+2.633 4i
	0.2	-0.010 8+2.306 0i	-0.010 8+2.342 6i	-0.010 8+2.299 2i	-0.010 8+2.292 8i
(0, 10)	0	-0.010 8+3.053 5i	-0.010 8+3.102 0i	-0.010 8+3.044 4i	-0.010 8+3.036 0i
	0.1	-0.010 8+2.885 4i	-0.010 8+2.928 5i	-0.010 8+2.877 0i	-0.010 8+2.869 8i
	0.2	-0.010 8+2.572 4i	-0.010 8+2.605 2i	-0.010 8+2.565 4i	-0.010 8+2.560 7i
(100, 10)	0	-0.010 8+3.284 7i	-0.010 8+3.329 8i	-0.010 8+3.275 4i	-0.010 8+3.268 5i
	0.1	-0.010 8+3.128 9i	-0.010 8+3.168 7i	-0.010 7+3.120 3i	-0.010 8+3.114 6i
	0.2	-0.010 8+2.842 6i	-0.010 8+2.872 2i	-0.010 7+2.835 2i	-0.010 8+2.832 0i

图 3 为非局部参数和 visco-Pasternak 地基的弹性参数对 S-S 边界条件下 FG-X-CNTRCs 圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响. 由图 3 可知, 无量纲固有频率虚部的减小速度随着非局部参数 α 的增大而增大. 由于 visco-Pasternak 地基的弹性参数 (k_w, k_s) 增加结构的刚度, 因此表 4 和图 3 中无量纲固有频率随地基的 Winkler 弹性模量和剪切模量的增大而增大. 增大 visco-Pasternak 地基的弹性参数会降低非局部参数 α 对 CNTRCs 圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响幅度, 当 visco-Pasternak 地基的弹性参数 (k_w, k_s) 分别取 (0, 0), (100, 0) 和 (100, 10) 时, FG-X-CNTRCs 圆柱壳无量纲固有频率的下降幅度分别为: 23.41%、18.79% 和 13.74%. 此外, 当 visco-Pasternak 地基的剪切模量 k_s 达到一定值时, 继续增大其数值对无量纲固有频率虚部的影响幅度较小, 此时非局部参数对无量纲固有频率虚部影响幅度的变化也较小.

表 5 为不同 CNTs 体积分数和环境温度下 CNTRCs 圆柱壳的无量纲固有频率. 由表 5 可知, CNTs 的体积分数对圆柱壳刚度影响显著, 室温 (300 K) 下 FG-X-CNTRCs 圆柱壳基体中填充 CNTs 的体积分数 f_r^* 为 10.0% 时, 相对于纯 PMMA 基体的无量纲固有频率虚部增加了 108.2%, 相对于填充 CNTs 的体积分数 f_r^* 为 5.0% 的虚部增加了 53.92%. 此外, 室温下当 CNTRCs 圆柱壳中 CNTs 的体积分数 f_r^* 由 2.5% 增至 10.0%, 不同 CNTs 分布类型下无量纲固有频率增大的幅度按大小排序为: UD (51.36%) < FG-O



(a) 不同地基剪切模量



(b) 不同地基 Winkler 弹性模量

图 3 非局部参数对 FG-X-CNTRCs 圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响

Fig.3 Effect of nonlocal parameter on the imaginary parts of the dimensionless natural frequencies of FG-X-CNTRCs cylindrical shell

(52.09%) < FG-V (52.48%) < FG-X (53.92%), 表明增加 CNTRCs 圆柱壳中 CNTs 的含量时, UD-CNTRCs 圆柱壳的刚度提升幅度小于 FG-CNTRCs 圆柱壳, 而 3 种 CNTs 梯度分布对应的 FG-CNTRCs 圆柱壳的刚度提升幅度与结构自身的刚度呈正相关.

表5 不同CNTs体积分数和环境温度下CNTRCs圆柱壳的无量纲固有频率
 Tab.5 Dimensionless natural frequencies of CNTRCs cylindrical shell with various values of CNTs volume fraction and ambient temperature

T/K	$f_r^*/\%$	CNTs分布类型			
		UD	FG-X	FG-V	FG-O
	0	-0.008 6+2.056 7i			
300	2.5	-0.010 8+2.760 0i	-0.010 8+2.781 5i	-0.010 8+2.748 8i	-0.010 8+2.746 5i
	5.0	-0.010 8+3.284 7i	-0.010 8+3.329 8i	-0.010 8+3.275 4i	-0.010 8+3.268 5i
	7.5	-0.010 8+3.750 1i	-0.010 7+3.822 3i	-0.010 8+3.749 4i	-0.010 8+3.738 7i
	10.0	-0.010 7+4.177 6i	-0.010 7+4.281 2i	-0.010 7+4.191 4i	-0.010 7+4.177 2i
400	2.5	-0.011 7+2.758 1i	-0.011 7+2.783 6i	-0.011 7+2.745 6i	-0.011 7+2.741 9i
	5.0	-0.011 6+3.195 6i	-0.011 6+3.250 1i	-0.011 6+3.185 4i	-0.011 6+3.175 3i
	7.5	-0.011 6+3.598 1i	-0.011 5+3.686 4i	-0.011 6+3.598 5i	-0.011 6+3.582 9i
	10.0	-0.011 5+3.978 1i	-0.011 5+4.105 4i	-0.011 5+3.996 4i	-0.011 5+3.975 9i
500	2.5	-0.012 7+2.723 6i	-0.012 7+2.754 9i	-0.012 7+2.709 2i	-0.012 7+2.703 1i
	5.0	-0.012 7+3.006 6i	-0.012 6+3.076 2i	-0.012 7+2.994 5i	-0.012 7+2.978 7i
	7.5	-0.012 6+3.290 4i	-0.012 6+3.405 4i	-0.012 6+3.291 6i	-0.012 6+3.267 1i
	10.0	-0.012 6+3.577 1i	-0.012 5+3.744 8i	-0.012 6+3.601 4i	-0.012 6+3.569 4i

图4为环境温度对FG-X-CNTRCs圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响。由于增加环境温度导致CNTRCs圆柱壳结构刚度下降,因此图4和表5中无量纲固有频率虚部随环境温度的增大而减小,且减小速度逐渐加快。由图4可以看出,环境温度对S-S FG-X-CNTRCs圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响幅度随CNTs体积分数的增大而增大。根据线性理论,FG-CNTRCs圆柱壳的无量纲固有频率虚部最终会降至零^[32],由图4可以推断出,无量纲固有频率虚部为零所对应的最小环境温度随CNTs体积分数的增大而减小。

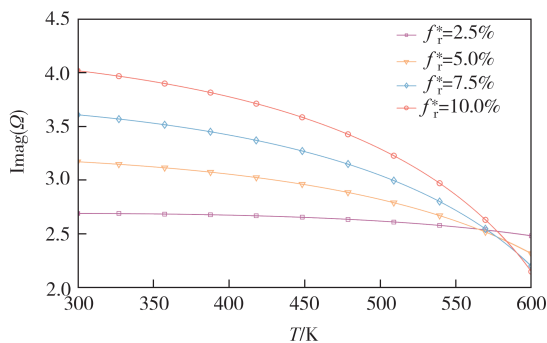


图4 环境温度对FG-X-CNTRCs圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响

Fig.4 Effect of ambient temperatures on the imaginary parts of the dimensionless natural frequencies of FG-X-CNTRCs cylindrical shell

图5为长厚比(η^{-1})对FG-X-CNTRCs圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响,其中 $c_d^0=1 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 。由图5可以看出,visco-Pasternak地基的阻尼系数和长

厚比对无量纲固有频率虚部的影响有耦合作用,当地基的阻尼系数较小时,无量纲固有频率虚部随长厚比的增大先增后减;增大地基的阻尼系数后,无量纲固有频率虚部随长厚比的增大而减小,最终减至零,减小的速度逐渐增加,无量纲固有频率虚部减为零说明该长厚比和阻尼系数组合所构成的系统处于过阻尼状态。此外,增加visco-Pasternak地基的阻尼系数会降低系统无量纲固有频率虚部为零对应的最小长厚比。

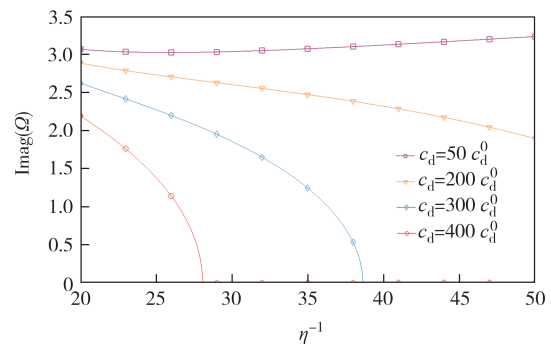


图5 长厚比(η^{-1})对FG-X-CNTRCs圆柱壳无量纲固有频率虚部的影响

Fig.5 Effect of length-thickness ratio (η^{-1}) on the imaginary parts of the dimensionless natural frequencies of FG-X-CNTRCs cylindrical shell

4 结论

本文基于EMT方法并考虑CNTs的尺度效应和

取向建立 CNTRCs 力学特性分析的非局部 EMT 本构模型. 在此基础上建立 visco-Pasternak 基体中 FG-CNTRCs Kirchhoff-Love 圆柱壳的热自由振动控制方程, 并得到两端简支边界条件下结构的固有频率. 主要结论如下:

1) 考虑 CNTs 的尺度效应会降低 FG-CNTRCs 圆柱壳的抗弯刚度, 非局部参数对无量纲固有频率虚部的影响幅度随结构刚度的增大而增大.

2) 增加 CNTs 的含量时, UD-CNTRCs 圆柱壳刚度提升幅度小于 3 种 FG-CNTRCs 圆柱壳, 且环境温度对无量纲固有频率虚部的影响随 CNTs 体积分数的增大而增大.

3) 长厚比和 visco-Pasternak 地基的阻尼系数对无量纲固有频率虚部的影响有耦合作用.

参考文献

- [1] 赫晓东, 王荣国, 彭庆宇, 等. 航空航天用纳米碳复合材料研究进展[J]. 宇航学报, 2020, 41(6): 707-718.
HE X D, WANG R G, PENG Q Y, et al. Research progress on nano-carbon composites used in aerospace [J]. Journal of Astronautics, 2020, 41(6): 707-718. (in Chinese)
- [2] 曹敏, 邓雨希, 徐康, 等. 新型碳基磁性复合吸波材料的研究进展[J]. 复合材料学报, 2020, 37(12): 3004-3016.
CAO M, DENG Y X, XU K, et al. Research progress of new carbon based magnetic composite electromagnetic waveabsorbing materials [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2020, 37(12): 3004-3016. (in Chinese)
- [3] CHOWDHURY R, ADHIKARI S, WANG C Y, et al. A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes [J]. Computational Materials Science, 2010, 48(4): 730-735.
- [4] SOBHANIARAGH B, NEJATI M, MANSUR W J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs [J]. Composites Part B: Engineering, 2017, 124: 120-133.
- [5] SHEN H S. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments [J]. Composite Structures, 2009, 91(1): 9-19.
- [6] ODEGARD G M, GATES T S, WISE K E, et al. Constitutive modeling of nanotube-reinforced polymer composites [J]. Composites Science and Technology, 2003, 63(11): 1671-1687.
- [7] CHERAGHBAK A, LOGHMAN A. Magnetic field effects on the elastic behavior of polymeric piezoelectric cylinder reinforced with CNTs [J]. Journal of Applied and Computational Mechanics, 2016, 2(4): 222-229.
- [8] DOERNER M F, NIX W D. A method for interpreting the data from depth-sensing indentation instruments [J]. Journal of Materials Research, 1986, 1(4): 601-609.
- [9] CHEN Y P, LEE J D, ESKANDARIAN A. Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(8): 2085-2097.
- [10] PHUNG-VAN P, FERREIRA A J M, NGUYEN-XUAN H, et al. An isogeometric approach for size-dependent geometrically nonlinear transient analysis of functionally graded nanoplates [J]. Composites Part B: Engineering, 2017, 118: 125-134.
- [11] LEI Y J, ZHANG D P, SHEN Z B. Transverse vibration of tapered single-walled carbon nanotubes embedded in viscoelastic medium [J]. Brazilian Journal of Physics, 2017, 47(6): 657-671.
- [12] LI X F, TANG G J, SHEN Z B, et al. Resonance frequency and mass identification of zeptogram-scale nanosensor based on the nonlocal beam theory [J]. Ultrasonics, 2015, 55: 75-84.
- [13] ZHANG D P, LEI Y, SHEN Z B. Free transverse vibration of double-walled carbon nanotubes embedded in viscoelastic medium [J]. Acta Mechanica, 2016, 227(12): 3657-3670.
- [14] DAGHIGH H, DAGHIGH V, MILANI A, et al. Nonlocal bending and buckling of agglomerated CNT-reinforced composite nanoplates [J]. Composites Part B: Engineering, 2020, 183: 107716.
- [15] AMIR S, VOSSOUGH A R, VOSSOUGH H. Nonlinear magneto-nonlocal vibration analysis of coupled piezoelectric micro-plates reinforced with agglomerated CNTs [J]. Mechanics of Advanced Composite Structures, 2020, 7(1): 109-119.
- [16] YANG J, CADY C, HU M S, et al. Effects of damage on the flow strength and ductility of a ductile Al alloy reinforced with SiC particulates [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1990, 38(12): 2613-2619.
- [17] LLOYD D J. Particle reinforced aluminium and magnesium matrix composites [J]. International Materials Reviews, 1994, 39(1): 1-23.
- [18] SHI D L, FENG X Q, HUANG Y Y, et al. The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2004, 126(3): 250-257.
- [19] ABBAS R M, DOROUDGAR J T, LÜ C F, et al. A review of size-dependent continuum mechanics models for micro- and nano-structures [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 170: 108562.
- [20] MURA T. Micromechanics of defects in solids [J]. Journal of Applied Mechanics, 1983, 50(2): 72-149.
- [21] WANG Z X, SHEN H S. Nonlinear vibration of nanotube-

- reinforced composite plates in thermal environments [J]. *Computational Materials Science*, 2011, 50(8): 2319–2330.
- [22] WANG Y Q, LIU Y F. Free vibration and buckling of polymeric shells reinforced with 3D graphene foams[J]. *Results in Physics*, 2019, 14: 102510.
- [23] TARAGHI OSGUEI A, AHMADIAN M T, ASGHARI M, et al. Free vibration analysis of cylindrical panels with spiral cross section[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, 133: 376–386.
- [24] SAFARPOUR M, GHABUSSI A, EBRAHIMI F, et al. Frequency characteristics of FG–GPLRC viscoelastic thick annular plate with the aid of GDQM [J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, 150: 106683.
- [25] SHEN H S, ZHANG C L. Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube–reinforced composite plates[J]. *Materials & Design*, 2010, 31(7): 3403–3411.
- [26] SOURESHJANI A H, TALEBITOOTI R, TALEBITOOTI M. Thermal effects on the free vibration of joined FG–CNTRC conical–conical shells[J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, 156: 106960.
- [27] THAI H T, VO T P, NGUYEN T K, et al. A review of continuum mechanics models for size–dependent analysis of beams and plates [J]. *Composite Structures*, 2017, 177: 196–219.
- [28] LOY C T, LAM K Y, SHU C. Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature [J]. *Shock and Vibration*, 1997, 4(3): 193–198.
- [29] LOY C T, LAM K Y, REDDY J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, 41(3): 309–324.
- [30] KIANI A, SHEIKHKHOSHOKAR M, JAMALPOOR A, et al. Free vibration problem of embedded magneto–electro–thermo–elastic nanoplate made of functionally graded materials via nonlocal third–order shear deformation theory[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, 29(5): 741–763.
- [31] HOSSEINI M, JAMALPOOR A, FATH A. Surface effect on the biaxial buckling and free vibration of FGM nanoplate embedded in visco–Pasternak standard linear solid–type of foundation [J]. *Meccanica*, 2017, 52(6): 1381–1396.
- [32] KIANI F, HEKMATIFAR M, TOGHRAIE D. Analysis of forced and free vibrations of composite porous core sandwich cylindrical shells and FG–CNTs reinforced face sheets resting on visco–Pasternak foundation under uniform thermal field[J]. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2020, 42(10): 504.