

## 基于三参数破坏准则的均质边坡稳定性上限分析

赵炼恒<sup>1,2,3</sup>, 赵伟龙<sup>1</sup>, 韦彬<sup>4</sup>, 贾光龙<sup>1</sup>, 胡世红<sup>1†</sup>

[1. 中南大学 土木工程学院, 湖南长沙 410075;

2. 轨道交通工程结构防灾减灾湖南省重点实验室(中南大学), 湖南长沙 410075;

3. 重载铁路工程结构教育部重点实验室(中南大学), 湖南长沙 410075;

4. 深圳市综合交通与市政工程设计研究总院有限公司, 广东深圳 518003]

**摘要:**非线性特征是岩土体材料的固有特性. 研究表明, 在此特征条件下, 基于旋转失稳机制的均质边坡潜在滑动面并非单一对数螺旋线. 本文假定岩土体材料服从三参数非线性强度准则, 在极限分析上限定理的基础上, 构建了均质边坡旋转失稳机制; 通过拟静力方法考虑地震荷载, 基于力学平衡方程结合变分原理获得边坡临界滑动面及其应力分布的微分方程组, 采用 Runge-Kutta 方法进行求解, 并基于虚功率原理结合免疫算法获得边坡最小临界高度. 通过与有限元极限分析法(FELA)的结果进行对比验证了非线性上限变分分析方法的准确性和有效性. 在此基础上, 分析了无量纲强度参数( $T, A, n$ )、水平地震加速度系数( $k_h$ )、边坡倾角( $\beta$ )等因素对边坡稳定系数( $F_n$ )、潜在滑动面及其应力分布的影响规律. 本方法无需假定边坡潜在滑动面, 丰富了边坡稳定性非线性分析理论, 可为边坡的加固设计提供理论支持和有益参考.

**关键词:**三参数非线性破坏准则; 边坡稳定性; 上限变分分析; 稳定系数; 临界滑动面; 免疫算法

中图分类号: TU435

文献标志码: A

## Upper Bound Analysis of Homogeneous Slope Stability Based on Three-parameter Failure Criterion

ZHAO Lianheng<sup>1,2,3</sup>, ZHAO Weilong<sup>1</sup>, WEI Bin<sup>4</sup>, JIA Guanglong<sup>1</sup>, HU Shihong<sup>1†</sup>

[1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. Hunan Provincial Key Laboratory for Disaster Prevention and Mitigation of Rail Transit Engineering Structures (Central South University), Changsha 410075, China;

3. MOE Key Laboratory of Engineering Structures of Heavy Haul Railway (Central South University), Changsha 410075, China;

4. Shenzhen Integrated Transportation Design Research Institute Co. Ltd., Shenzhen 518003, China]

**Abstract:** Nonlinearity is an inherent property of geo-materials. Under this property condition, the potential

\* 收稿日期: 2022-09-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51978666), National Natural Science Foundation of China(51978666); 湖南省杰出青年科学基金资助项目(2021JJ10063), Science Fund for Distinguished Young Scholars of Hunan Province(2021JJ10063); 湖南省交通运输厅科技进步与创新项目(202008, 202115), Science and Technology Progress and Innovation Program of Department of Transportation of Hunan Province(202008, 202115)

作者简介: 赵炼恒(1980—), 男, 湖南益阳人, 中南大学教授, 博士

† 通信联系人, E-mail: 174812153@csu.edu.cn

sliding surface of a homogeneous slope based on the rotational failure mechanism is not a single log-spiral under the nonlinear failure criterion. Therefore, the geo-materials of the slope are assumed to obey the three-parameter nonlinear strength criterion, and the rotational failure mechanism of the homogeneous slope was constructed based on the upper bound theorem of limit analysis. The seismic load was introduced through a pseudo-static method, and the differential equations of the critical sliding surface and its corresponding stress distribution of homogeneous slope were obtained according to the mechanical equilibrium equations and the variational principle. And then the equations were solved by the Runge-Kutta method. According to the virtual power principle, the minimum critical height of the slope was optimized through Immune Algorithm (IA). The accuracy and validity of the nonlinear upper bound variation analysis method were verified by comparing it with the results of finite element limit analysis (FELA). On this basis, the effects of dimensionless strength parameters ( $T$ ,  $A$ ,  $n$ ), the horizontal seismic acceleration coefficient ( $k_x$ ), and slope angle ( $\beta$ ) on the slope stability factor  $F_n$ , potential sliding surface, and its stress distribution were analyzed. There is no need to assume the potential sliding surface of the slope, and this work enriches the nonlinear analysis theory of slope stability and provides theoretical support and useful reference for slope reinforcement design.

**Key words:** three-parameter nonlinear failure criterion; slope stability; upper bound variation analysis; stability factor; critical sliding surface; immune algorithm

边坡稳定性一直以来是岩土工程中的热点话题.目前分析边坡稳定性的方法主要有极限平衡法<sup>[1-2]</sup>、有限元法<sup>[2-3]</sup>和极限分析法<sup>[4-7]</sup>等.由于极限分析法具有清晰的物理意义以及能得到严格的求解范围<sup>[8]</sup>,近年来在边坡稳定性问题上获得了广泛的应用<sup>[4-10]</sup>.贺志军等<sup>[4]</sup>基于极限分析上限定理和蒙特卡罗法,在非线性Mohr-Coulomb破坏准则下进行了边坡可靠度分析.王智德等<sup>[5]</sup>利用极限分析上限法和体积力增量法,考虑含多岩层错动的结构面的块体模型,推导出计算边坡稳定系数的公式,并与离散元模拟结果对比验证其方法的有效性.Tang等<sup>[6]</sup>利用非线性序列二次规划法优化了边坡安全系数的目标函数,并基于极限分析上限定理和强度折减法,考虑堆载、孔隙水压力和水平地震力等因素的影响,绘制了各向同性均质边坡的稳定性图表.在极限分析中,边坡失稳的机制以旋转破坏和平移破坏为主<sup>[11]</sup>,经验表明<sup>[11-12]</sup>,在评价边坡稳定性时旋转破坏比平移破坏产生了更好的界限.对于旋转破坏机制,绝大多数研究<sup>[9,13-14]</sup>均假定边坡的破坏面为对数螺旋线.但已有研究显示<sup>[15]</sup>,服从线性Mohr-Coulomb破坏准则的边坡发生旋转破坏时,其潜在滑动面是对数螺旋线;而在非线性准则下,边坡潜在滑动面并非单一对数螺旋线,当研究中不能真实地体现岩土体的力学特性,就会使结果与真实状况存在一定的差异.此外,经典的极限分析理论大多基于线性Mohr-

Coulomb破坏准则进行研究,然而大量的试验表明岩土体的强度包络线具有显著的非线性特征<sup>[16-17]</sup>.因此,为了较为准确地评价边坡稳定性,许多学者基于非线性破坏准则对边坡稳定性进行了大量研究.Yang等<sup>[18]</sup>利用“外切线技术”将非线性破坏准则转化为线性Mohr-Coulomb破坏准则,获得了非线性破坏准则下的单一抗剪强度指标,进而结合塑性上限定理得到了边坡的稳定性系数.Li等<sup>[19]</sup>基于Hoek-Brown破坏准则和极限分析有限元上、下限技术,采用拟静力法分析了边坡在水平地震荷载作用下的稳定性,通过与极限平衡法的结果进行对比,说明了对于陡立边坡,极限平衡法得到的稳定系数偏小.Zhao等<sup>[20]</sup>基于三种抗剪强度折减策略分别计算非线性破坏准则下均质边坡的安全系数.Zuo等<sup>[21]</sup>为了确定滑坡滑动面的抗剪强度参数,提出了一种基于非线性Mohr-Coulomb破坏准则的可靠性反分析方法,并用工程案例验证了此方法的可行性.可以看出,基于非线性破坏准则的边坡稳定性问题在分析过程中通常会将非线性破坏准则转化为线性Mohr-Coulomb准则来研究<sup>[4,7,10]</sup>,即潜在滑动面上的岩土体采用相同的抗剪强度参数,无法真实地反映出抗剪强度参数随应力状态变化的非线性特征,因此本质上依旧属于线性破坏准则分析.然而对于Baker<sup>[22]</sup>提出的三参数非线性破坏准则的边坡稳定性研究鲜有报道,该三参数非线性破坏准则是一种广义岩土体破坏准

则,常规 Mohr-Coulomb 破坏准则、Griffith 破坏准则以及 Hoek-Brown 破坏准则均为其特例.因此,开展三参数非线性破坏准则的边坡稳定性分析研究对于拓展该破坏准则在岩土工程中的应用以及丰富边坡稳定性分析理论具有重要的研究意义.

尽管在现有的极限分析有限元方法中已经实现了 Hoek-Brown 破坏准则在岩土工程问题中的应用<sup>[23-25]</sup>,但对于非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则以及三参数破坏准则尚存在难点,主要是由于这两种破坏准则的主应力表达式较为复杂,且在应力空间中屈服面存在不连续点,这给数值计算方法带来了巨大的挑战.因此,本文基于极限分析上限定理,假定均质边坡在极限状态下发生旋转破坏,采用拟静力方法考虑地震荷载作用,基于力学平衡方程建立临界滑动面的泛函表达式,进一步采用变分原理获得了临界滑动面及其应力分布的微分方程组;通过四阶 Runge-Kutta 方法结合变分横截条件、边界条件求解临界滑动面及其上应力;最后根据虚功原理,采用智能免疫算法得到边坡的最小临界高度.通过与极限分析有限元方法进行对比,验证了本文方法在非线形破坏准则条件下进行边坡稳定性评估的有效性与准确性.在此基础上,分析了非线性强度参数、边坡倾角、水平地震加速度系数等对边坡稳定系数和潜在滑动面及其应力分布的影响规律.

### 1 三参数非线性破坏准则

Baker<sup>[22,26]</sup>通过大量试验提出了一种描述岩土体非线性的破坏准则,证明大部分岩土体材料均遵循如下三参数非线性破坏准则(见图1):

$$\tau = P_a A \left( \frac{\sigma}{P_a} + T \right)^n \quad (1)$$

式中: $\tau$ 为切向应力; $\sigma$ 为法向应力; $P_a$ 为大气压强,大小为 100 kPa; $A$ 为比例参数,控制剪切强度大小; $T$ 为转换参数,控制包络线与 $\sigma$ 轴交点位置; $n$ 为无量纲参数,控制包络线曲率.

图1中: $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ 分别为最大和最小主应力,并规定以压应力为正; $\varphi_t$ 为瞬时抗剪强度参数指标.

Baker<sup>[26]</sup>给出了各参数的取值范围: $0 < A < 1$ ,  $0 \leq T < 1$ ,  $1/2 \leq n \leq 1$ ,不同岩土体材料的 $A$ 、 $T$ 、 $n$ 可根据三轴试验确定.当 $n=1.0$ 时,式(1)可简化为线性 Mohr-Coulomb 破坏准则,且有 $A=\tan\varphi$ 、 $T=(c/P_a)/\tan\varphi$ , $c$ 、 $\varphi$ 分别为线性 Mohr-Coulomb 准则的黏聚力和内摩擦角;当 $n=0.5$ 时,式(1)简化为 Griffith 破坏准则,且有 $A=2(\sigma_t/P_a)^{0.5}$ 、 $T=\sigma_t/P_a$ , $\sigma_t$ 表示无侧限抗拉强度;此外

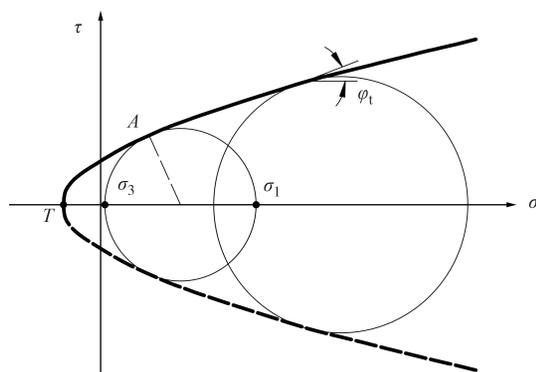


图1 非线性强度包络线

Fig.1 Nonlinear strength envelope

Hoek-Brown 破坏准则也可以写成式(1)的形式.因此,三参数破坏准则是一种广义的岩土体破坏准则.

### 2 上限分析

在极限状态下,假设均质边坡的潜在滑动面 $y(x)$ [极坐标系下为 $r(\theta)$ ]通过坡脚,坡面函数为 $y_1(x)$ , $\alpha$ 和 $\beta$ 为边坡倾角.边坡坡顶破坏点(即滑入点)至坡脚的垂直高度为 $H$ ,水平距离为 $L$ ;坡顶点与坡脚的垂直高度为 $H_1$ ,水平距离为 $L_2$ ;坡顶点与滑入点的距离为 $L_1$ ,建立如图2所示的均质边坡旋转破坏机制.滑动面以上岩土体可视为刚性体,以角速度 $\dot{\Omega}$ 沿滑动面绕点 $O$ 转动,且边坡失稳时瞬时变形忽略不计.假定均质边坡岩土体材料服从三参数非线性破坏准则和相关联流动法则,根据极限分析上限定理,塑性速度矢量 $\delta w$ 与滑动面的夹角为 $\varphi_t$ .

#### 2.1 能耗分析

非线性破坏准则下,滑动面上单位面积的内能

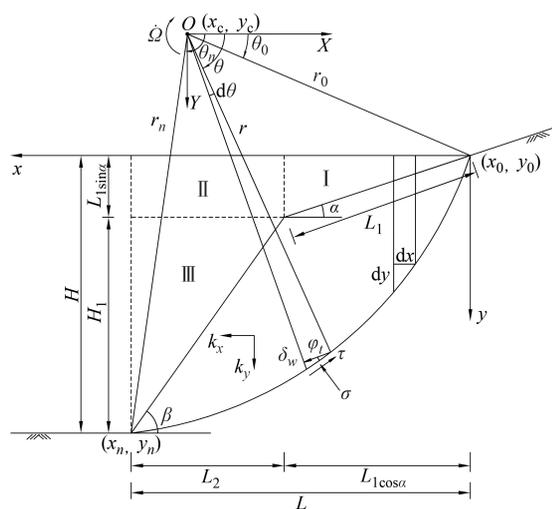


图2 均质边坡旋转破坏机制

Fig.2 Rotational failure mechanism of homogeneous slope

耗散功率为<sup>[8,27]</sup>:

$$P = \delta w \cos \varphi_i (\tau - \sigma \tan \varphi_i) \quad (2)$$

其中:

$$\delta w = r \dot{\Omega} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)并积分可得临界状态下滑动面上总的内能耗散功率

$$\Sigma P = \int_{\theta_0}^{\theta_s} (\tau - \sigma \tan \varphi_i) (\delta w \cos \varphi_i) \frac{rd\theta}{\cos \varphi_i} = \dot{\Omega} \int_{\theta_0}^{\theta_s} r^2 (\tau - \sigma \tan \varphi_i) d\theta \quad (4)$$

式中: $r$ 表示滑动面上一点的旋转半径; $\theta$ 为极径与水平方向的夹角,顺时针为正。

在本文中,外力包含重力和地震力,此处采用水平和垂直地震加速度系数 $k_x$ 、 $k_y$ 表征地震对边坡稳定性的影响,由于都是体积力,因此可一并计算.值得注意的是,当 $k_x=0$ 、 $k_y=1.0$ 时与自然条件下相同,即只有重力作用.基于图2的边坡滑动破坏机制,在体积力作用下,外力功率可计算如下

$$W_e = W - W_I - W_{II} - W_{III} \quad (5)$$

式中: $W_e$ 为滑动体外力功率; $W$ 为坐标轴 $x$ 、 $x=x_n$ 与滑动面所围区域的外力功率; $W_I$ 为区域I的外力功率; $W_{II}$ 为区域II的外力功率; $W_{III}$ 为区域III的外力功率.

$$W = \dot{\Omega} \gamma \int_{x_0}^{x_n} \left[ y(x_c - x) k_y + y \left( \frac{y}{2} - y_c \right) k_x \right] dx \quad (6a)$$

$$W_I = \dot{\Omega} \frac{\gamma}{2} L_1^2 \cos \alpha \sin \alpha \left[ k_y \left( r_0 \cos \theta_0 - \frac{2}{3} L_1 \cos \alpha \right) + k_x \left( r_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{3} L_1 \sin \alpha \right) \right] \quad (6b)$$

$$W_{II} = \dot{\Omega} \gamma L_1 L_2 \sin \alpha \left[ k_y \left( r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{2} \right) + k_x \left( r_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{2} L_1 \sin \alpha \right) \right] \quad (6c)$$

$$W_{III} = \frac{1}{2} \dot{\Omega} \gamma L_2 (H - L_1 \sin \alpha) \left[ k_y (r_0 \cos \theta_0 - L_1 \cos \alpha - \frac{2}{3} L_2) + k_x (r_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{3} H_1 + L_1 \sin \alpha) \right] \quad (6d)$$

式中: $\gamma$ 为岩土体材料容重,单位 $\text{kN/m}^3$ .

根据虚功率原理,有

$$\Sigma P = W_e = W - (W_I + W_{II} + W_{III}) \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)中并整理可得

$$W_I + W_{II} + W_{III} - (W - \Sigma P) = A_1 L_1^2 + B_1 L_1 + C_1 = 0 \quad (8)$$

其中:

$$A_1 = \frac{\gamma}{6} (H \cos \alpha - L \sin \alpha) (k_y \cos \alpha - k_x \sin \alpha) \quad (9a)$$

$$B_1 = \frac{\gamma}{6} (H \cos \alpha - L \sin \alpha) \left[ k_y (L - 3r_0 \cos \theta_0) - k_x (H + 3r_0 \sin \theta_0) \right] \quad (9b)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} L H \gamma \left[ k_y \left( r_0 \cos \theta_0 - \frac{2}{3} L \right) + k_x \left( r_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{3} H \right) - (W - \Sigma P) \right] \quad (9c)$$

在极限状态下,滑动体的力学平衡条件和材料屈服条件必须同时满足,且认为当能量平衡和力学平衡条件同时满足时可以获得最小的上限解<sup>[15]</sup>.因此,在地震拟静力荷载和自重作用下,滑动体的力学平衡方程如下

$$Q = \int_{x_0}^{x_n} [(\tau - \sigma y') - k_x \gamma (y - y_1)] dx \quad (10a)$$

$$V = \int_{x_0}^{x_n} [\sigma + \tau y' - k_y \gamma (y - y_1)] dx \quad (10b)$$

$$M = \int_{x_0}^{x_n} \left[ (\tau - \sigma y') y - \frac{1}{2} k_x \gamma (y^2 - y_1^2) + k_y \gamma (y - y_1) x - (\sigma + \tau y') x \right] dx \quad (10c)$$

式中: $Q$ 、 $V$ 分别为滑动体水平和竖直方向的合力; $M$ 为滑动体对坡顶滑入点的矩.

因此,滑动体的总虚功可表示为

$$I = \delta u Q + \delta v V + \delta \Omega M \quad (11)$$

式中: $\delta u$ 、 $\delta v$ 和 $\delta \Omega$ 分别为水平、竖直和转动的虚位移.

将式(10)代入式(11)可得总虚功为:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} \left\{ \delta u [(\tau - \sigma y') - k_x \gamma (y - y_1)] + \delta v [\sigma + \tau y' - k_y \gamma (y - y_1)] + \delta \Omega [(\tau - \sigma y') y - (\sigma + \tau y') x + k_y \gamma (y - y_1) x - k_x \gamma (y^2 - y_1^2)/2] \right\} dx = \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} \left\{ \tau \left[ \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) + y' \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right] + \sigma \left[ \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] - \frac{1}{2} k_x \gamma (y - y_1) \left( 2 \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y + y_1 \right) - k_y \gamma (y - y_1) \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) \right\} dx \quad (12)$$

可简化为:

$$I = \delta \Omega \int_{x_0}^{x_n} F dx \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}
 F = & \sigma \left[ \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - y' \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] + \\
 & \tau \left[ \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) y' + \left( \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y \right) \right] - \\
 & k_y \gamma (y - y_1) \left( \frac{\delta v}{\delta \Omega} - x \right) - \\
 & \frac{1}{2} k_x \gamma (y - y_1) \left( 2 \frac{\delta u}{\delta \Omega} + y + y_1 \right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

总虚功  $I$  表达式(13)是典型积分型泛函.令

$$X = \frac{\Delta v}{\Delta \Omega} - x = x_c - x = r \cos \theta \quad (15a)$$

$$Y = \frac{\Delta u}{\Delta \Omega} + y = -y_c + y = r \sin \theta \quad (15b)$$

可得

$$\begin{aligned}
 F = & \sigma (X - Yy') + \tau (Xy' + Y) - \\
 & k_y \gamma (Y + y_c - y_1) X - \\
 & \frac{1}{2} k_x \gamma (Y + y_c - y_1) (Y + y_1 - y_c) \quad (16)
 \end{aligned}$$

当  $I$  的一阶变分为零时,边坡处于临界状态.此

时,泛函  $I$  满足如下欧拉方程:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \tau'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0 \quad (17b)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (17c)$$

式中:  $G$  表示临界状态下边坡潜在滑动面上正应力和切应力满足的相关关系,在本文中即为三参数破坏准则.

$$G(\sigma, \tau) = \tau - f(\sigma) = \tau - P_a A \left( \frac{\sigma}{P_a} + T \right)^n = 0 \quad (18)$$

对于 Baker 提出的三参数非线性屈服准则,有:

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma} = -\frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} = -\tan \varphi_t = -nA \left( \frac{\sigma}{P_a} + T \right)^{n-1} \quad (19)$$

将式(16)(18)代入式(17a)(17b)有:

$$X - Yy' + \lambda \tan \varphi_t = 0 \quad (20a)$$

$$-(Y + Xy') + \lambda = 0 \quad (20b)$$

因此,有:

$$\frac{(-X + Yy')}{(Y + Xy')} = \tan \varphi_t \quad (21)$$

根据图2以及式(15)可得:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{(r' \sin \theta + r \cos \theta)}{(r \sin \theta - r' \cos \theta)} \quad (22)$$

于是将式(15)(22)代入式(21)可得:

$$\frac{dr}{d\theta} = r \tan \varphi_t = r n A \left( \frac{\sigma}{P_a} + T \right)^{n-1} \quad (23)$$

由式(23)可知,线性准则下,即  $\varphi_t$  为常量时,均质边坡潜在滑移面为对数螺旋线;反之,在非线性准则下,边坡潜在滑移面并非单一对数螺旋线.

同理,将式(16)(18)代入式(17c)中可得:

$$\frac{d\sigma}{dx} Y - \frac{d\tau}{dx} X + 2\tau - k_y \gamma X - k_x \gamma Y = 0 \quad (24)$$

同时

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{d\sigma}{dx} \tan \varphi_t \quad (25a)$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{1}{(r \sin \theta - r' \cos \theta)} \quad (25b)$$

于是

$$\frac{d\sigma}{d\theta} + 2\tau - \gamma r (k_y \cos \theta + k_x \sin \theta) = 0 \quad (26a)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\theta} + 2P_a A \left( \frac{\sigma}{P_a} + T \right)^n - \\
 \gamma r (k_y \cos \theta + k_x \sin \theta) = 0 \quad (26b)
 \end{aligned}$$

通过变分原理的欧拉方程,得到了滑动面及其正应力分布的一阶微分方程组,求解该常微分方程组,还需要边界条件.由变分极值原理可知,当极值曲线的端点不固定时,泛函取极值的必要条件为满足变分横截条件<sup>[28]</sup>.由于坡顶破坏点在坡顶表面上移动,因此,泛函取极值的变分横截条件为:

$$\left[ F - (y' - y_1') F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0 \quad (27)$$

$$\left[ \begin{aligned}
 & \sigma (X - Yy') + \tau (Xy' + Y) \\
 & - k_y \gamma (Y + y_c - y_1) X \\
 & - \frac{1}{2} k_x \gamma (Y + y_c - y_1) (Y + y_1 - y_c) \\
 & - (y' - y_1') (-\sigma Y + \tau X)
 \end{aligned} \right]_{x=x_1} = 0 \quad (28)$$

需要注意的是,在滑动面端点处,有:

$$(y - y_1)_{x=x_1} = 0 \quad (29)$$

故含有  $k_x$  和  $k_y$  的两项消失,再结合式(15)和(22)可得:

$$\left[ \sigma (\cos \theta - \sin \theta y_1') + \tau (\sin \theta + \cos \theta y_1') \right]_{x=x_1} = 0 \quad (30)$$

由于滑动体的瞬时变形忽略不计,可采用变形前的尺寸进行分析.因此,根据图2的几何关系,有以下等式成立:

$$H = r_n \sin \theta_n - r_0 \sin \theta_0 \quad (31a)$$

$$L = r_0 \cos \theta_0 - r_n \cos \theta_n \quad (31b)$$

$$\beta' = \arctan \frac{H_1}{L_2} \quad (31c)$$

其中:

$$H_1 = H - L_1 \sin \alpha \quad (32a)$$

$$L_2 = L - L_1 \cos \alpha \quad (32b)$$

### 2.2 求解步骤

根据2.1节能耗分析,可以获得边坡给定参数条件下的临界高度,求解流程如图3所示.详细计算步骤如下:

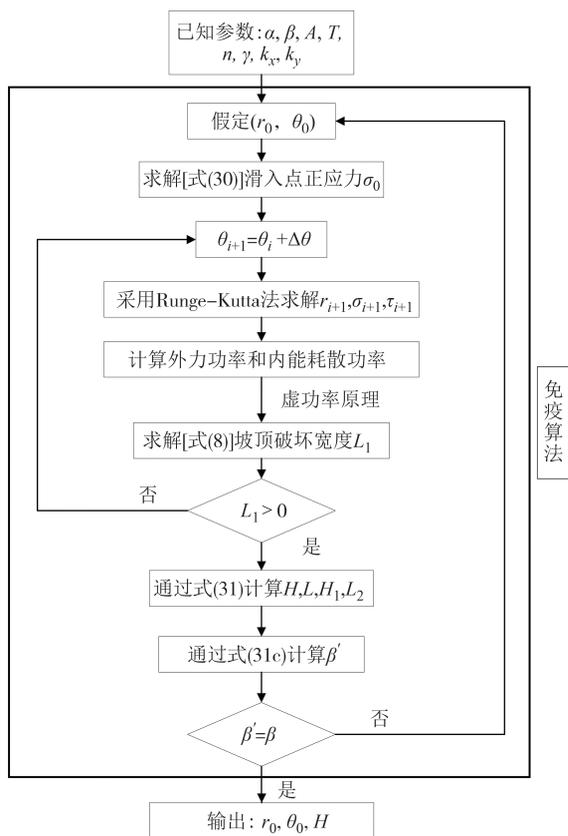


图3 边坡临界高度求解流程图

Fig.3 Flow chart for solving critical height of slope

1) 已知边坡坡顶倾角及坡面倾角、岩土体强度参数和地震系数;

2) 假定一组输入参数  $(r_0, \theta_0)$ , 根据变分横截条件[(式(30)]求解坡顶破坏点处的正应力  $\sigma_0$ ;

3) 选择迭代步长  $\Delta\theta$ , 使得  $\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta$ , 根据 Runge-Kutta 法在区间  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$  上求解式(23)和式(26), 得到滑动面上点  $(i+1)$  的坐标  $(r_{i+1}, \theta_{i+1})$  和应力值  $\sigma_{i+1}, \tau_{i+1}$ ;

4) 计算点  $(i+1)$  处累计的内能耗散功率和外力功率, 再根据虚功率平衡原理, 求解式(8)得到坡顶破坏长度  $L_1$ ;

5) 若  $L_1$  大于零, 则根据式(31)计算相应的边坡

坡度和高度, 反之则返回第3步;

6) 判断计算边坡坡度是否和已知边坡坡度相等, 若不相等, 则返回第2步;

7) 输出  $(r_0, \theta_0, H)$ , 得到均质边坡临界高度最优上限解及其对应的潜在滑动面.

其中, 通过第2步~第6步可以得到已知坡度下边坡的临界高度, 进而利用二维免疫算法得到最优上限解. 需要说明的是, 由于本文构建的边坡潜在滑动面通过坡脚, 因此上述推导公式只适用于坡脚破坏机制, 对于坡面及坡脚以下这两类破坏机制, 该程序尚不能获得其临界高度.

### 2.3 免疫算法

免疫算法是一种受生物免疫系统的启示而形成的智能搜索算法. 此算法适用于求解连续函数的极值问题, 对于非连续函数的极值问题, 也具有很强的全局搜索能力. 基本原理是将优化问题中待优化的问题、可行解、可行解质量与免疫系统中抗原、抗体、免疫细胞与抗原的亲密度一一对应. 因此可以将生物免疫应答中的进化过程转换成数学上的寻优过程, 免疫算法采用群体搜索策略, 通过迭代计算, 最终以较大的概率得到问题的最优解. 主要步骤如下.

1) 假定免疫个体维数为  $D_1$ , 免疫个体数目为  $N$ , 则初始种群的位置表示为:

$$X_j(0) | x_{ij}^{\min} \leq x_{ij}(0) \leq x_{ij}^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, D_1; j = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

式中:  $x_{ij}^{\min}, x_{ij}^{\max}$  分别为第  $i$  个分量的最小值和最大值.

$$x_{ij}(0) = x_{ij}^{\min} + \text{rand}(0, 1)(x_{ij}^{\max} - x_{ij}^{\min}) \quad (34)$$

式中:  $\text{rand}(0, 1)$  表示在  $[0, 1]$  上服从均匀分布的随机数;  $x_{ij}(0)$  表示初代种群中第  $j$  个粒子的第  $i$  个分量的位置.

2) 计算个体的亲和度、抗体浓度以及激励度, 并按激励度大小进行排序.

$$J = pU - qK \quad (35)$$

式中:  $J$  表示激励度;  $U$  为该个体的亲和度值, 即函数值;  $K$  为抗体浓度;  $p, q$  称为激励度系数.

3) 取激励度前  $N/2$  个个体进行免疫操作(克隆、变异和克隆抑制), 免疫后的种群重新计算激励度.

4) 随机生成  $N/2$  个个体的新种群, 计算个体的亲和度、抗体浓度以及激励度; 免疫种群与随机种群合并, 按激励度大小排序, 进行免疫迭代.

5) 反复执行步骤2)~4), 直至达到最大免疫迭代次数或所要求的收敛精度结束.

### 3 对比分析

#### 3.1 参数转换

为了验证本文非线性上限变分分析结果的准确性和有效性,将本文方法与极限分析有限元方法(OPTUM G2 2021)计算结果进行对比.对比分析中采用非线性 Hoek-Brown 准则,由于 OPTUM G2 中的 Hoek-Brown 破坏准则是由地质参数  $D$ 、 $\sigma_{ci}$ 、GSI 和  $m_i$  表示,因此在对比验证之前应进行参数的转换.Hu 等<sup>[29]</sup>提出了一种将 Hoek-Brown 参数与非线性 Mohr-Coulomb 破坏准则强度参数的转换计算方法.由于非线性 Mohr-Coulomb 准则与本文的三参数破坏准则表达形式一致,故也可采用此方法得到 Hoek-Brown 准则参数与三参数破坏准则参数之间的转换关系,详细步骤如下.

Hoek 等<sup>[30]</sup>提出了一种方法实现两种形式的 Hoek-Brown 破坏准则之间的参数转换.Hoek-Brown 破坏准则的主应力形式为:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} (m_b \sigma_3 / \sigma_{ci} + s)^a \quad (36)$$

式中: $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 分别为最大和最小主应力; $a$ 、 $m_b$ 和 $s$ 是与 $D$ 、 $\sigma_{ci}$ 、GSI 和  $m_i$  相关的无量纲参数, $D$ 为扰动因子, $\sigma_{ci}$ 为单轴抗压强度,GSI为地质强度参数, $m_i$ 为材料常数<sup>[31]</sup>.

此外,以切向应力和法向应力表示的 Hoek-Brown 破坏准则为:

$$\tau = A_2 \sigma_{ci} \left( \frac{\sigma + \sigma_{tm}}{\sigma_{ci}} \right)^{B_2} \quad (37)$$

式中: $\tau$ 和 $\sigma$ 分别为切向和法向应力; $A_2$ 和 $B_2$ 为反映材料特性的无量纲参数; $\sigma_{tm}$ 为单轴抗拉强度.

当给定参数 $D$ 、 $\sigma_{ci}$ 、GSI 和  $m_i$  时,可以通过线性回归分析得到参数 $A_2$ 、 $B_2$ 和 $\sigma_{tm}$ <sup>[30]</sup>.另外,对比式(1)和式(37)可知,切应力形式的 Hoek-Brown 破坏准则与三参数破坏准则表达式一致,故可以获得参数( $A_2$ 、 $B_2$ 、 $\sigma_{ci}$ 和 $\sigma_{tm}$ )和( $n$ 、 $T$ 和 $A$ )之间的转换关系,具体关系如下:

$$n = B_2, T = \frac{\sigma_{tm}}{P_a}, A = A_2 \left( \frac{\sigma_{ci}}{P_a} \right)^{1-B_2} \quad (38)$$

#### 3.2 算例验证

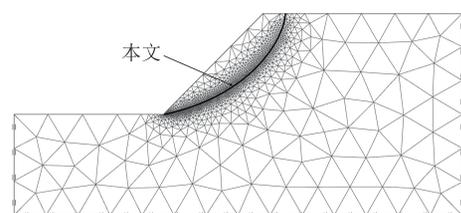
算例边坡的形状尺寸和材料参数均取自孙超伟等<sup>[32]</sup>的研究,具体参数为: $H=10$  m,  $\alpha=0^\circ$ ,  $\beta=45^\circ$ ,  $\gamma=25$  kN/m<sup>3</sup>,  $k_x=0$ ,  $k_y=1.0$ , 弹性模量  $E=5\ 000$  MPa, 泊松

比 $\mu=0.3$ ,  $\sigma_{ci}=25$  MPa,  $m_i=2$ , GSI=5,  $D=0$ .

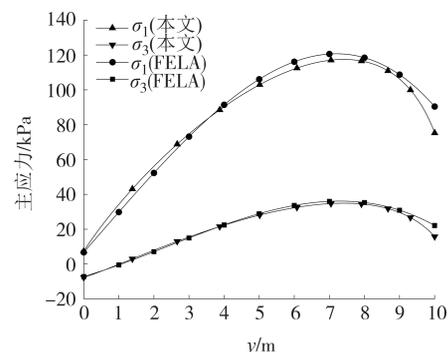
采用 OPTUM G2 建立边坡模型,土体材料服从 Hoek-Brown 破坏准则和相关联流动法则,模型设置标准边界条件,即左右边界设置法向约束、底部边界设置固定约束.结合强度折减和网格自适应技术,采用三节点三角形单元,单元数量为 3 000 个.

由 OPTUM G2 的有限元极限分析法(FELA)强度折减分析,可以获得均质边坡的安全系数、剪切耗散带以及滑动带上的主应力分布,一般情况下可认为该剪切耗散带即为边坡的潜在滑动面.此外,通过本文方法亦可获得边坡的安全系数、临界状态下的潜在滑动面及其正应力和切应力分布,由式(39)可将该正应力和切应力转化为主应力,从而与极限分析上限有限元滑动带上的主应力结果进行对比,以此来验证本文方法的准确性和有效性,如图 4 所示.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \tau \tan \varphi_1 + \tau / \cos \varphi_1, \\ \sigma_3 &= \sigma - (\tau / \cos \varphi_1 - \tau \tan \varphi_1) \end{aligned} \quad (39)$$



(a) 潜在滑动面对比



(b) 滑动面上主应力分布对比

图4 对比分析结果

Fig.4 Comparative analysis results

图 4(a)为计算滑动面与极限分析上限有限元剪切耗散带的对比.可以看出,两者形状基本吻合.本文方法计算的安全系数  $F_s=1.073$ , OPTUM G2 计算的安全系数  $F_s=1.125$ , 相对误差为 4.6%.由于切应力形式的 Hoek-Brown 准则与三参数破坏准则之间的参数转换遵循一一对等原则,因此相对误差的主要来源在于两种形式的 Hoek-Brown 破坏准则的参数转换.

图4(b)为两种方法计算所得滑动面上 $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 的对比.不难看出,两者都是先增大后减小的变化趋势;两者出现极大值的位置基本一致,并且出现最大主应力的位置不在坡脚处.因此,以上对比可以证明本研究的准确性和有效性,能够为边坡的加固设计提供理论支持和合理参考.

### 4 参数分析

#### 4.1 稳定系数分析

根据前述计算方法,求解了给定边坡的临界高度.为了方便研究,采用了Baker<sup>[33]</sup>定义的稳定系数

$F_n$ ,计算公式如式(40):

$$F_n = \frac{F_s}{A} \left( \frac{\gamma H}{P_a} \right)^{1-n} \quad (40)$$

式中: $F_s$ 为边坡安全系数,本文求解边坡临界高度,即 $F_s=1$ .

为探究岩土体非线性强度参数、地震荷载、边坡倾角等因素对边坡稳定性的影响规律,采用上述极限分析上限定理,计算边坡的临界高度,再由式(40)计算边坡的稳定系数,以 $F_n$ 为纵坐标绘制如图5所示的影响规律曲线.各图例中非线性强度参数( $T$ 、 $A$ 、 $n$ )、边坡倾角( $\beta$ )及水平地震加速度系数( $k_x$ )的取值如表1所示,此外 $k_y=1.0$ , $\gamma=25 \text{ kN/m}^3$ , $\alpha=0^\circ$ .

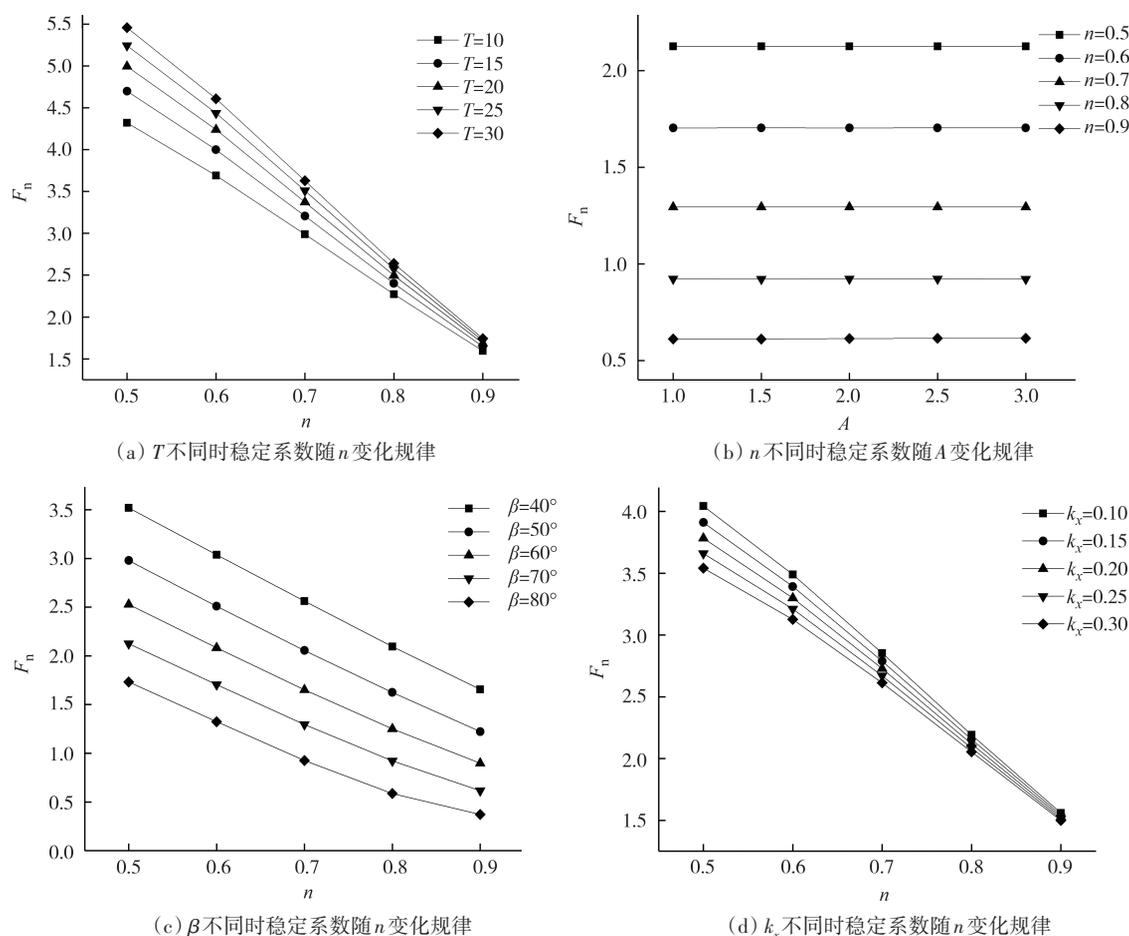


图5 不同参数对边坡稳定系数影响规律分析

Fig.5 The influence of different parameters on slope stability coefficient

图5(a)研究了无量纲参数 $T$ 从10~30变化以及 $n$ 从0.5~0.9变化的条件下对稳定系数 $F_n$ 的影响.计算结果表明:当无量纲参数 $T$ 相同时,随着 $n$ 的增大,边坡稳定系数逐渐减小,当 $n \geq 0.6$ 时,减小的趋势出现加快,且当 $T$ 越大时,减小的趋势越显著;当 $n$ 相同

时,随着无量纲参数 $T$ 的增大,边坡稳定系数逐渐增大,且当 $n$ 越大时,增大的幅值越小.

图5(b)研究了无量纲参数 $A$ 从1.0~3.0变化以及 $n$ 从0.5~0.9变化的条件下对稳定系数 $F_n$ 的影响.计算结果表明:当无量纲参数 $A$ 相同时,稳定系数随

表1 不同图例下各参数取值  
Tab.1 Values of parameters in different legends

图例	$n$	$T$	$A$	$\beta/(^\circ)$	$k_x$
a	0.5~0.9	10~30	1.0	70	0
b	0.5~0.9	0	1.0~3.0	70	0
c	0.5~0.9	0	1.0	40~80	0
d	0.5~0.9	10	1.0	70	0.10~0.30

$n$  的增大呈减小的趋势,且这种趋势越来越缓慢;当  $n$  相同时,无量纲参数  $A$  对稳定系数几乎没有影响.

图 5(c)研究了边坡倾角  $\beta$  从  $40^\circ \sim 80^\circ$  变化以及  $n$  从 0.5~0.9 变化的条件下对稳定系数  $F_n$  的影响.计算结果表明:当边坡倾角  $\beta$  相同时,随着  $n$  的增大,边坡稳定系数逐渐减小,当  $n \geq 0.8$  时,减小的趋势出现明显地减缓,且当  $\beta$  越大时,减缓趋势越显著;当  $n$  相同时,稳定系数随边坡倾角  $\beta$  的增大而减小,且减小的趋势越来越缓慢.

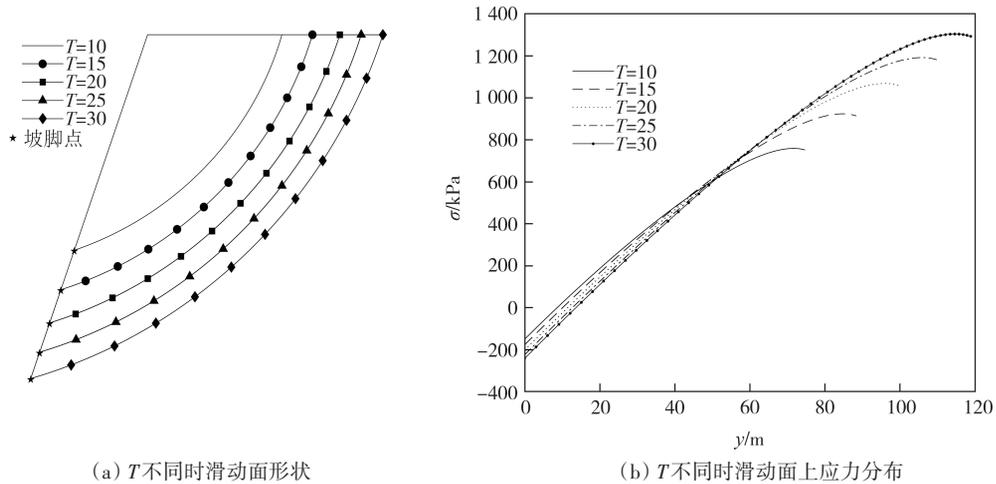
图 5(d)研究了地震系数  $k_x$  从 0.10~0.30 变化以及  $n$  从 0.5~0.9 变化的条件下对稳定系数  $F_n$  的影响.计算结果表明:当地震系数  $k_x$  相同时,稳定系数随  $n$

的增大而减小,当  $n \geq 0.6$  时,减小的趋势出现明显地加快,且当  $k_x$  越小时,减小的趋势越显著;当  $n$  相同时,随着  $k_x$  的增大,边坡稳定系数逐渐减小,且当  $n$  越大时,减小的幅值越小.

#### 4.2 滑动面及其应力分析

计算边坡稳定系数是为了给边坡稳定性评估提供量化指标,但是当边坡稳定性不足时,则需要对其采取加固防护措施,而加固措施的选择取决于最危险滑动面位置.因此,确定边坡潜在滑动面位置显得尤为重要.本节研究了非线性强度参数、边坡倾角、地震系数等因素对潜在滑动面及其应力分布的影响规律.

由图 6(a)可知,  $L_1$  (坡顶点距坡顶破坏点的距离)随着无量纲参数  $T$  的增大而增大,  $H$  (坡顶破坏点至坡脚的垂直高度)随着  $T$  的增大同样增大;由图 6(b)可知,坡顶破坏点 ( $y=0$  m 处)的正应力随着  $T$  的增大而减小,滑动面上的最大正应力随着  $T$  的增大而增大,且出现最大正应力的位置不在坡脚处.



(a)  $T$  不同时滑动面形状

(b)  $T$  不同时滑动面上应力分布

图6 不同  $T$  时滑动面及其应力分布

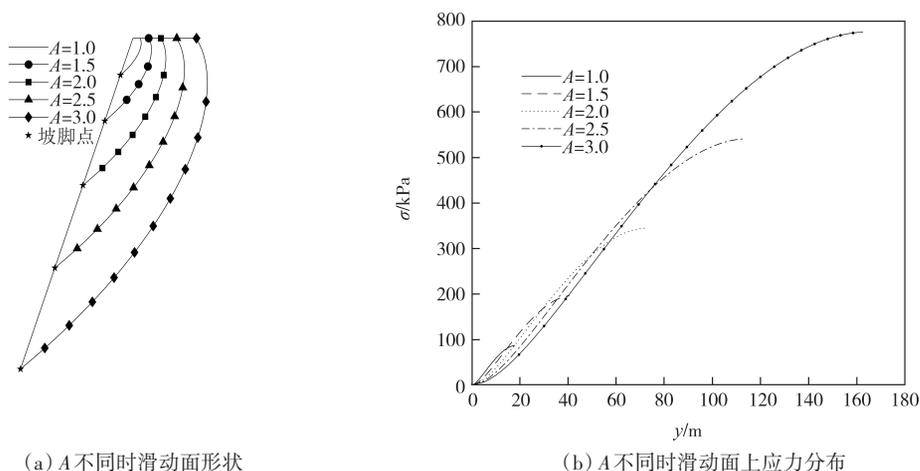
Fig.6 Sliding surface and its stress distribution with different  $T$

由图 7(a)可知,随着无量纲参数  $A$  的增大,  $L_1$  逐渐增大,并且  $H$  随着  $A$  的增大同样增大;由图 7(b)可知,坡顶破坏点的正应力为 0,这是由于当  $T=0$  时最小正应力为 0,不存在负值,且根据边界条件式(30)计算也可以得到此结果,同时由图可知滑动面上的最大正应力随着  $A$  的增大而增大,且坡脚处出现正应力最大值.

由图 8(a)可知,随着边坡倾角  $\beta$  的增大,  $L_1$  逐渐

减小,并且  $H$  随着  $\beta$  的增大同样减小;由图 8(b)可知,滑动面上的最大正应力随着  $\beta$  的增大而减小,当  $\beta \leq 60^\circ$  时,出现最大正应力的位置不在坡脚处.

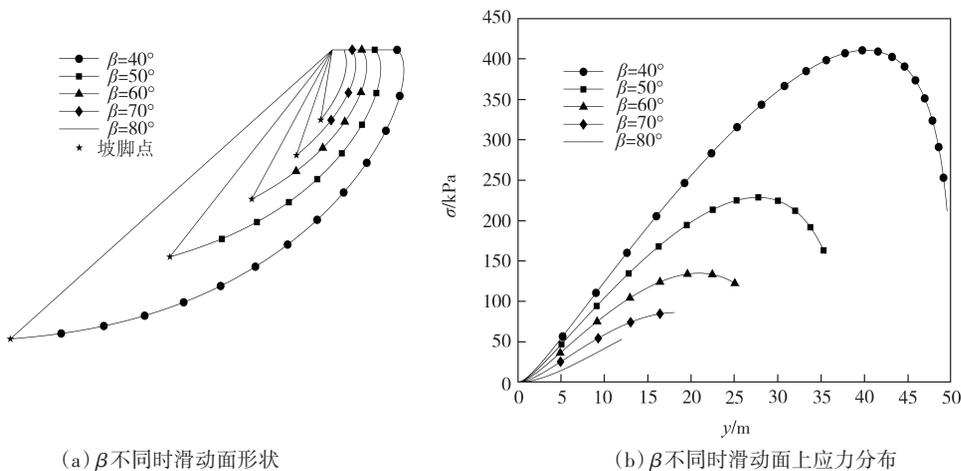
由图 9(a)可知,  $L_1$  随着地震系数  $k_x$  的增大而增大,但是  $H$  随着  $k_x$  的增大而减小;由图 9(b)可知,坡顶破坏点的正应力随着  $k_x$  的增大而减小,并且滑动面上的最大正应力随着  $k_x$  的增大同样减小,出现最大正应力的位置不在坡脚处.



(a) A 不同时滑动面形状 (b) A 不同时滑动面上应力分布

图 7 不同 A 时滑动面及其应力分布

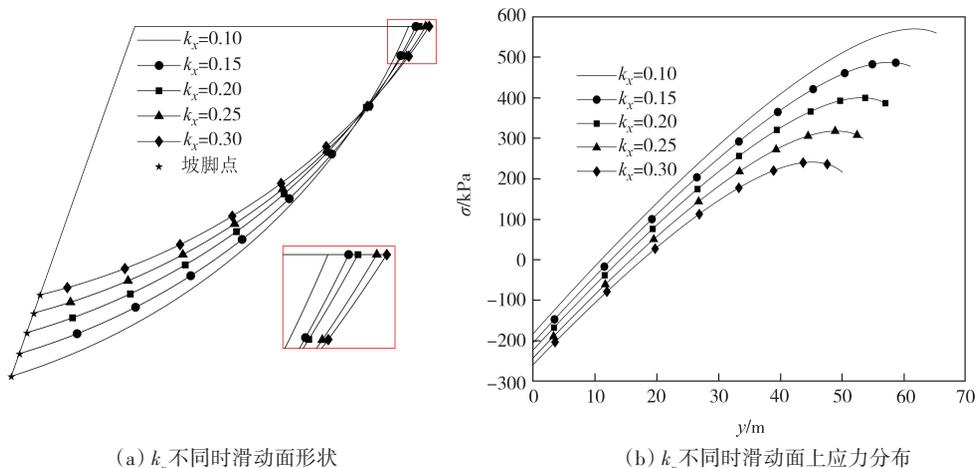
Fig.7 Sliding surfaces and its stress distribution with different A



(a)  $\beta$  不同时滑动面形状 (b)  $\beta$  不同时滑动面上应力分布

图 8 不同  $\beta$  时滑动面及其应力分布

Fig.8 Sliding surface and its stress distribution with different  $\beta$



(a)  $k_x$  不同时滑动面形状 (b)  $k_x$  不同时滑动面上应力分布

图 9 不同  $k_x$  时滑动面及其应力分布

Fig.9 Sliding surface and its stress distribution with different  $k_x$

### 5 结论

基于三参数非线性破坏准则和极限分析上限定

理, 建立均质边坡旋转失稳机制, 考虑地震荷载的作用, 根据力学平衡方程结合变分原理推导了边坡潜在滑动面及其应力分布函数的微分方程组, 采用 Runge-Kutta 方法进行求解, 并根据虚功率原理结合

免疫算法求解了边坡的最小临界高度.本文无需假定边坡潜在滑动面形式,且避免采用“外切线技术”引入瞬时抗剪强度指标,保证了滑动面上抗剪强度参数与应力的非线性关系,可真实反映岩土体材料的非线性特征,并且适用于任何形式的非线性破坏准则,相较于目前嵌入非线性破坏准则尚不完善的极限分析有限元方法,本文方法在处理非线性破坏准则方面具有一定的优越性.该方法进一步分析了非线性强度参数、地震荷载、边坡倾角等因素对边坡稳定性的影响规律,主要结论如下:

1)非线性强度参数 $n$ 和边坡倾角 $\beta$ 对边坡稳定系数的影响显著,无量纲参数 $T$ 和地震系数 $k_x$ 随着 $n$ 的增大对稳定系数的影响越来越小,而无量纲参数 $A$ 对稳定系数几乎没有影响.

2) $L_1$ 随着无量纲参数 $T$ 、 $A$ 和地震系数 $k_x$ 的增大而增大,随着边坡倾角 $\beta$ 的增大而减小; $H$ 随着 $T$ 、 $A$ 的增大而增大,随着 $\beta$ 、 $k_x$ 的增大而减小.

3)潜在滑动面上最大正应力随着无量纲参数 $T$ 、 $A$ 增大而增大,随着边坡倾角 $\beta$ 和地震系数 $k_x$ 增大而减小,与各参数影响边坡临界高度 $H$ 的结果相似,并且当 $T=0$ 时,坡顶破坏点( $y=0$  m处)正应力为0.

## 参考文献

- [1] 孙朝斌,陈从新,郑允,等. 岩质反倾边坡复合倾倒破坏分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2020,47(1):130-138.  
SUN C Y, CHEN C X, ZHENG Y, et al. Analysis of anti-dip rock slopes against composite toppling failure [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2020, 47 (1): 130-138. (in Chinese)
- [2] 曾亚武,田伟明. 边坡稳定性分析的有限元法与极限平衡法的结合[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(S2): 5355-5359.  
ZENG Y W, TIAN W M. Slope stability analysis by combining FEM with limit equilibrium method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24 (S2): 5355-5359. (in Chinese)
- [3] 张国栋,刘学,金星,等. 基于有限单元法的岩土边坡动力稳定分析及评价方法研究进展[J]. 工程力学, 2008, 25(S2): 44-52.  
ZHANG G D, LIU X, JIN X, et al. Research advances on the seismic stability analysis and evaluation of rock-soil slopes based on finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(S2): 44-52. (in Chinese)
- [4] 贺志军,曹吉,赵炼恒,等. 非线性Mohr-Coulomb破坏准则下边坡可靠度上限[J]. 土木建筑与环境工程, 2016, 38(6): 1-9.  
HE Z J, CAO J, ZHAO L H, et al. Upper bound reliability analysis of slope with nonlinear Mohr-Coulomb failure criterion [J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2016, 38 (6): 1-9. (in Chinese)
- [5] 王智德,夏元友,夏国邦,等. 顺层岩质边坡稳定性极限分析上限法[J]. 岩土力学,2015,36(2):576-583.  
WANG Z D, XIA Y Y, XIA G B, et al. Upper bound limit analysis method for stability analysis of bedding rock slopes [J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(2): 576-583. (in Chinese)
- [6] TANG G P, ZHAO L H, LI L, et al. Stability charts of slopes under typical conditions developed by upper bound limit analysis [J]. Computers and Geotechnics, 2015(65): 233-240.
- [7] 张迎宾,李亮,赵炼恒,等. 基于非线性破坏准则的边坡稳定性极限分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3312-3318.  
ZHANG Y B, LI L, ZHAO L H, et al. Limit analysis of slope stability based on nonlinear failure criterion [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(11): 3312-3318. (in Chinese)
- [8] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity [M]. Amsterdam: Elsevier ASCE, 1975.
- [9] 方薇,杨果林,刘晓红,等. 非均质边坡稳定性极限分析上限法[J]. 中国铁道科学,2010,31(6):14-20.  
FANG W, YANG G L, LIU X H, et al. The upper-bound limit analysis of the inhomogeneous slope stability [J]. China Railway Science, 2010, 31(6): 14-20. (in Chinese)
- [10] 李新坡,张正波,吴永,等. 非线性破坏准则的竖直边坡稳定性分析[J]. 工程科学与技术, 2009, 41(S1): 80-83.  
LI X P, ZHANG Z B, WU Y, et al. Vertical slopes stability analysis with nonlinear failure criterion [J]. Advanced Engineering Sciences, 2009, 41(S1): 80-83. (in Chinese)
- [11] 王路路,潘秋景,杨小礼. 纯黏土坡三维动态上限分析[J]. 铁道科学与工程学报,2013,10(2):87-89.  
WANG L L, PAN Q J, YANG X L. Dynamic upper bound limit analysis for cohesive three-dimensional soil slopes [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2013, 10 (2): 87-89. (in Chinese)
- [12] MICHALOWSKI R L. Slope stability analysis: a kinematical approach [J]. Geotechnique, 1995, 45(2): 283-293.
- [13] 唐高朋,赵炼恒,李亮,等. 基于MATLAB的边坡稳定性极限分析程序开发[J]. 岩土力学,2013,34(7):2091-2098.  
TANG G P, ZHAO L H, LI L, et al. Program development for slope stability using MATLAB software and upper bound limit analysis [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34 (7): 2091-2098. (in Chinese)
- [14] 赵炼恒,罗强,李亮,等. 地下水位变化对边坡稳定性影响的上限分析[J]. 公路交通科技,2010,27(7):1-7.  
ZHAO L H, LUO Q, LI L, et al. Analysis of upper bound of slope stability considering ground water level fluctuations [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2010, 27(7): 1-7. (in Chinese)
- [15] ZHANG X J, CHEN W F. Stability analysis of slopes with general nonlinear failure criterion [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(1): 33-50.
- [16] HOEK E. Strength of jointed rock masses [J]. Geotechnique,

- 1983,33(3):187-223.
- [17] JIANG J C, BAKER R, YAMAGAMI T. The effect of strength envelope nonlinearity on slope stability computations [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(2): 308-325.
- [18] YANG X L, YIN J H. Slope stability analysis with nonlinear failure criterion[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(3): 267-273.
- [19] LI A J, LYAMIN A V, MERIFIELD R S. Seismic rock slope stability charts based on limit analysis methods [J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(1/2): 135-148.
- [20] ZHAO L H, YANG F, ZHANG Y B, et al. Effects of shear strength reduction strategies on safety factor of homogeneous slope based on a general nonlinear failure criterion [J]. Computers and Geotechnics, 2015, 63: 215-228.
- [21] ZUO S, ZHAO L H, DENG D P, et al. Reliability back analysis of landslide shear strength parameters based on a general nonlinear failure criterion [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2020, 126: 104189.
- [22] BAKER R. Inter-relations between experimental and computational aspects of slope stability analysis [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2003, 27(5): 379-401.
- [23] 张锐. 基于非线性规划的有限元极限分析方法及其工程应用 [D]. 长沙:湖南大学,2015.  
ZHANG R. Finite element limit analysis method based on nonlinear programming and its engineering application [D]. Changsha:Hunan University,2015. (in Chinese)
- [24] ZHANG R, CHEN G H, ZOU J F, et al. Study on roof collapse of deep circular cavities in jointed rock masses using adaptive finite element limit analysis [J]. Computers and Geotechnics, 2019, 111:42-55.
- [25] HUANG S, HU S H, ZHAO L H, et al. Stability analysis of deep rectangular tunnels using adaptive finite element limit analysis with hoek-brown failure criterion [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2021, 46(11): 10931-10941.
- [26] BAKER R. Nonlinear mohr envelopes based on triaxial data [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(5):498-506.
- [27] 吴世明, 张显杰, 陈龙珠. 土坡稳定的非线性极限分析 [J]. 岩土工程学报, 1987(6): 27-38.  
WU S M, ZHANG X J, CHEN L Z. Limit analysis of slope stability with non-linear failure criterion [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1987(6): 27-38. (in Chinese)
- [28] 老大中. 变分法基础 [M]. 北京:国防工业出版社,2004.  
LAO D Z. Basis of variational method [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2004. (in Chinese)
- [29] HU S H, ZHAO L H, TAN Y G, et al. Variation analysis of uplift bearing characteristics of strip anchor plate in nonhomogeneous materials [J]. International Journal of Geomechanics, 2021, 21(4):04021037.
- [30] HOEK E, BROWN E T. Practical estimates of rock mass strength [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1997, 34(8): 1165-1186.
- [31] CHEN Y F, LIN H. Consistency analysis of Hoek - Brown and equivalent Mohr-Coulomb parameters in calculating slope safety factor [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2019, 78(6): 4349-4361.
- [32] 孙超伟, 柴军瑞, 许增光, 等. 基于Hoek-Brown强度折减法的边坡稳定性图表法研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(4):838-851.  
SUN C W, CHAI J R, XU Z G, et al. Study on slope stability chart method based on Hoek-Brown strength reduction method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(4):838-851. (in Chinese)
- [33] BAKER R. A relation between safety factors with respect to strength and height of slopes [J]. Computers and Geotechnics, 2006, 33(4/5): 275-277.