

考虑惯性载荷的多材料结构拓扑优化

任毅如^{1†}, 杨林海¹, 米栋², 张立章², 何杰¹, 向剑辉¹

(1. 湖南大学机械与运载工程学院, 湖南长沙 410082;

2. 中国航发湖南动力机械研究所, 湖南株洲 412002)

摘要:基于导重法构建了惯性载荷作用下的多材料结构拓扑优化数学模型,在体积约束下使其结构柔度最小.将多材料拓扑优化问题分解为一系列单材料拓扑优化问题,采用材料属性有理近似模型(Rational Approximation of Material Properties, RAMP)来表达密度与弹性模量间假定的非线性函数关系,利用导重法建立惯性载荷下设计变量的迭代表达式并通过数值算例验证导重法在考虑惯性载荷作用下多材料结构拓扑优化的有效性.算例结果表明:RAMP插值方法相比其他常用插值模型得到的拓扑构型更清晰,灰度单元更少,在算例1的对比中结构柔度最高降低了35.2%.受惯性载荷影响越大的设计区域其分布的材料弹性模量越大,且高模量密度比能够显著提升结构刚度.

关键词:导重法;惯性载荷;拓扑优化;数值模型;多材料结构

中图分类号:TH332;TH314;O343

文献标志码:A

Topology Optimization of Multi-material Structures Considering Inertial Loads

REN Yiru^{1†}, YANG Linhai¹, MI Dong², ZHANG Lizhang², HE Jie¹, XIANG Jianhui¹

(1. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2. AECC Hunan Aviation Powerplant Research Institute, Zhuzhou 412002, China)

Abstract: This paper presents a mathematical model for the topological optimization of multi-material structures under inertial load based on the guide-weight method, which aims to minimize structural compliance while adhering to volume constraints. The topological optimization problem of multi-material structures is decomposed into topological optimization problems of single-material structures. Rational approximation of material properties (RAMP) was used to express the nonlinear relationship between density and elastic modulus. The guide-weight method was employed to develop iterative expressions for design variables under inertial loads. Numerical examples demonstrate the effectiveness of this approach in optimizing multi-material structures under inertial loads. The results show that the RAMP interpolation method produces clearer topology configurations with fewer gray units and reduces structural compliance (up to 35.2% in example 1) compared with other general interpolation models. The greater the influence of inertial load on the design area, the higher the elastic modulus of distributed material. A

* 收稿日期:2022-10-25

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(2022JJ10012), Natural Science Foundation of Hunan Province(2022JJ10012);国家自然科学基金资助项目(52172356), National Natural Science Foundation of China (52172356)

作者简介:任毅如(1983—),男,湖南湘阴人,湖南大学教授,博士

† 通信联系人, E-mail:renyiru@hnu.edu.cn

high ratio of modulus to density can significantly increase the stiffness of a structure.

Key words: guide-weight method; inertial load; topology optimization; numerical models; multi-material structures

拓扑优化指在给定的设计域内不断优化设计变量使得结构在满足设计要求的同时达到材料分布的最优解,其由于具有优化自由度高、材料利用率强的优点,被广泛应用于汽车设计、航空航天、声学等领域^[1-3].

1981年程耿东^[4]对实心弹性薄板的优化研究,被认为是连续体结构拓扑优化的奠基性工作.各算法相继被提出用于解决拓扑优化问题.然而在早期的拓扑优化问题中,研究重点大多侧重于施加外部载荷作用下的优化,惯性载荷作为与设计结构质量直接相关的载荷往往被忽略^[5],以此得出的优化结果应用于实际工程问题是不可靠的.Rozvany等^[6]首先提出了关于自重的优化设计问题.陈树勋和叶尚辉^[7]为解决天线设计问题提出了导重法.Bruyneel等^[8]对固体各向同性材料惩罚模型(Solid Isotropic Material with Penalization, SIMP)进行了修正,来改善惯性载荷作用下结构拓扑优化中低密度区域存在的寄生效应.Huang等^[9]开发一种新的带有插值函数的双向结构渐进优化方法(Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, BESO),在对具有自重的结构进行优化时相比较SIMP插值模型能够获得更好的优化结果.Xu等^[5]指出在使用导重法时,RAMP插值函数相比其他插值方法更适用于惯性载荷作用下结构的拓扑优化.Jain等^[10]研究表明自重对结构的最优拓扑有显著影响,结构的拓扑构型取决于外加载荷和结构自重的双重作用.Kumar^[11]提出了一种基于密度的拓扑优化方法来设计自重载荷下的结构,并利用Heaviside函数得到一种新的质量密度插值策略.

同时在结构设计中,轻量化和性能要求越来越高,多材料混合结构能够在多方面更好地满足设计需求,增材制造技术的发展也使得多材料结构拓扑优化从理论设计变为现实^[12-13].Huang等^[14]采用BESO来解决多相结构拓扑优化问题.Tavakoli等^[15]将多材料拓扑优化问题分解为多个单材料拓扑优化子问题并提供了一个可在MATLAB上运行的通用框架.Zuo等^[16]提出了一种单变量有序SIMP插值方法,用于质量约束和成本约束下的多材料拓扑优化.刘

继凯等^[17]提出了基于Ordered SIMP方法的点阵-实体多材料插值模型.Gao等^[18]使用交替有源相位法与蒙特卡罗模拟相结合来解决多材料的拓扑优化问题.

多材料下的多个优化变量增加了优化求解的复杂性,且在解决惯性载荷作用下结构拓扑优化问题时,由于密度趋于0,质量惩罚与刚度惩罚之比过大,在低密度区域结构的位移和柔度趋近于无界,由此产生寄生效应^[8,19],更是加大了拓扑优化的难度.目前针对惯性载荷下的多材料结构拓扑优化的相关研究还较少.基于上述研究,本文将通过数值算例对比提出基于RAMP插值模型的导重法,并将其应用于考虑惯性载荷作用下多材料结构拓扑优化问题.研究体积约束下柔度最小的多材料结构拓扑优化,提供多材料组合下的优化方案.

1 基于导重法的优化模型

1.1 体积约束下的多材料结构优化模型

进行多材料结构拓扑优化时假设共有 p 相材料, N 个单元结构,将孔洞材料看作一种材料,传统的单材料结构拓扑优化即为二相材料结构拓扑优化.在进行多材料结构拓扑优化时,将所有材料两两组合, p 相材料拓扑优化即被分解为 $p(p+1)/2$ 个二相材料结构拓扑优化,再对每个优化组合运用导重法进行求解.优化时其余组合保持不变.优化过程中,将弹性模量较大的材料称为 a 材料,较小的称为 b 材料.在一个循环中,体积约束下的以柔度最小为目标的的多材料结构拓扑优化数学模型如下.

$$\begin{cases} \text{find } X = [x_1^1 x_2^1 \dots x_N^1 x_1^2 x_2^2 \dots x_N^2 \dots x_1^p x_2^p \dots x_N^p] \\ \min f(X) = C = U^T K U \\ \text{s.t. } g(X) = V^a - V_0^a \leq 0 \\ \sum_n^p x_i^n = 1 \quad i = 1, 2, \dots, N, 1, 2, \dots, P \\ x_j^n \leq x_i^n \leq x_u^n \\ 0 \leq x_j^n \leq x_u^n \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: x 为设计变量; X 为设计域内所有设计变量的总集;目标函数 C 为柔度; U 和 K 分别为位移向量矩

阵及刚度矩阵; $g(X)$ 为该模型的体积约束条件; V^a 和 V_0^a 分别为优化后 a 材料结构体积和初始约束下的 a 材料体积; $\sum_n^p x_i^n = 1$ 保证了设计域内每个单元不出现空隙和重叠^[15]; x_j^a, x_u^a 分别为设计变量的取值上下限. 在优化迭代过程中为防止出现奇异矩阵, 赋予设计变量一个最小值 0.001.

1.2 不同插值模型下的迭代公式

对于多材料结构拓扑优化, 其弹性模量插值公式为:

$$E_i = E_b + f(x_i^a) \times (E_a - E_b) \quad (2)$$

式中: E_a 和 E_b 为材料 a, b 的弹性模量; $f(x_i^a)$ 为插值函数模型.

常见的插值函数模型有 RAMP、SIMP、EAMP. 用式(3)表达, 其中 q_R, q_S, q_E 分别为不同插值模型的惩罚因子.

$$f(x_i^a) = \begin{cases} S(x_i) = (x_i^a)^{q_S} & , \text{SIMP} \\ R(x_i) = \frac{x_i^a}{1 + q_R(1 - x_i^a)} & , \text{RAMP} \\ E(x_i) = \frac{e^{q_E \times x_i^a} - 1}{e^{q_E} - 1} & , \text{EAMP} \end{cases} \quad (3)$$

将柔度对设计变量进行求导, 获取关于柔度的灵敏度[式(4)], 其中 \mathbf{k}_i 和 \mathbf{u}_i 分别为单元刚度矩阵和单元位移向量矩阵.

$$\frac{\partial C}{\partial x_i^a} = 2 \frac{\partial F_i}{\partial x_i^a} \mathbf{u}_i^T - (E_a - E_b) f'(x_i^a) \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \quad (4)$$

$$(x_i^a)^{(t+1)} = \begin{cases} x_j, x_i^a \geq x_j \\ m_0 \left[\frac{x_i^a \left[2 \frac{\partial F_i}{\partial x_i^a} \mathbf{u}_i^T - (E_a - E_b) f'(x_i^a) \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \right]}{\lambda v_i} \right]^{(k)} + (1 - m_0)(x_i^a)^t, & x_j < x_i^a < x_u \\ x_u, x_i^a \leq x_u \end{cases} \quad (10)$$

2 数值算例分析

2.1 不同插值函数对优化进程的影响

为了比较 SIMP、RAMP、EAMP 插值方法对导重法处理惯性载荷作用下多材料结构拓扑优化问题的影响, 分别采用这三种插值方法对经典简支梁模型进行优化, 体积约束设置为 0.3, 使结构的目标函数即柔度最小. 惩罚因子选取合适大小. 同时为方便对优化结果的可制造性进行定量分析, 引入灰度因子 M_i , 由式(11)可以看出, M_i 数值越大, 代表优化结果

当 F_i 为固定载荷时, $\partial F_i / \partial x_i^a = 0$, 见式(5); 当 F_i 为惯性载荷时, 其大小随着每次迭代优化 x_i^a 改变而变化时, 式(4)不变, 根据四节点矩形单元的形函数可得到每个单元的等效节点载荷[式(6)].

$$\frac{\partial C}{\partial x_i^a} = -f'(x_i^a) \times \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i \quad (5)$$

$$F_i = \begin{cases} \frac{1}{4} G_i \mathbf{P}_0, & \text{自重载荷} \\ \frac{1}{4} m_i w_i^2 r_i \mathbf{P}_1, & \text{离心载荷} \end{cases} \quad (6)$$

其中, G_i 和 m_i 为单元重量和单元质量, w_i 为结构旋转的角速度, r_i 为各单元至旋转轴的距离, $\mathbf{P}_0 = [0 \ -10 \ -10 \ -10 \ -1]$, $\mathbf{P}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$ 分别为自重和离心作用下的方向矢量.

根据库恩塔克条件由式(1)可推导出:

$$x_i^a = \frac{G_i^a}{\lambda H_i^a} \quad (7)$$

其中, G_i^a 为 a 材料的单元导重, H_i^a 为 a 材料的单元容重.

$$G_i^a = x_i^a \frac{\partial C}{\partial x_i^a} \quad (8)$$

$$H_i^a = \frac{\partial V_i^a}{x_i^a} = v_i^a \quad (9)$$

为确保设计变量迭代的收敛性, 引入步长因子 m_0 ^[20], 本文取 $m_0 = 0.5$. 为减少计算量采取二分法来求解 λ . 将上式代入即可得到 x_i^a 的迭代式. 当相邻迭代步中误差小于 0.001 时, 优化结束.

中间密度单元越多, 优化结构的可制造性也就越差.

$$M_i = \frac{4 \times x_i \times (1 - x_i)}{N} \quad (11)$$

图 1 为简支梁(算例 1)模型图, 其两端固定, 长 120 m, 高 30 m, 离散后的单元数目为 3 600, 泊松比 ν 统一设置为 0.3. 只受到自身的重力影响. 在优化对比中设置了二相材料(即单材料)结构以及三相材料结构, 其弹性模量及体积占比见表 1. 密度统一设置为 1 kg/m^3 .

划分为黑色、红色. 由图 2 可以看出, 使用不同的插值函数对于不同相数材料结构的优化结果都是

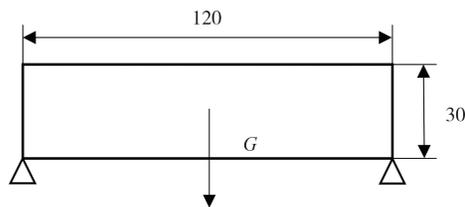


图1 算例1模型图(单位:m)

Fig.1 Model diagram of example 1(unit:m)

大致相同的,优化结果呈现经典的“拱桥”形状,在三相材料优化结构中,弹性模量大的材料集中在主拱圈处.其次使用SIMP插值方法在惯性载荷作用下的材料结构优化中无法得到清晰的拓扑图形,存在明显的灰度单元,且在得到初始稳定拓扑形状后其目标函数随着迭代而缓慢升高.使用RAMP和EAMP插值方法能够得到清晰的拓扑图,目标函数相对更低,其原因在于在低密度区域,RAMP和EAMP插值方法中的 $x_i^a/f(x_i^a)$ 是有界且维持在一个小范围内,而SIMP插值方法的 $x_i^a/f(x_i^a)$ 在低密度区近于无界,因此不可能实现一个较好的0~1分布优化^[5].

从表2可以看出,使用RAMP插值方法获得的最终拓扑图其目标函数和灰度因子明显小于EAMP和SIMP插值方法,利用RAMP插值函数对结构进行拓扑优化后在二相材料下得到的目标函数相比EAMP插值函数减少8.2%,对比SIMP插值函数减少了35.2%,三相材料下相比EAMP插值函数减少16.1%,对比SIMP插值函数减少了33.1%,且需要的迭代步数与其他方法比较接近.显然在运用导重法解决惯性载荷下结构的拓扑优化问题时,RAMP插值方法明显优于EAMP和SIMP插值方法.

表1 多材料下算例1的参数设置

Tab.1 Multi-material parameters setting for example 1

相数	弹性模量/ 10^6 GPa	体积占比
2	[1 10^{-9}]	[0.3 0.7]
3	[10.95 10^{-9}]	[0.15 0.15 0.7]

表2 不同插值模型下的优化结果

Tab.2 Optimization results of different interpolation models

	模型	迭代步数	目标函数/ $(N \cdot m)$	M_i	惩罚因子
二相	EAMP	46	17 111	0.141	5
	SIMP	29	24 250	0.347	3
	RAMP	22	15 714	0.118	8
三相	EAMP	107	22 702	0.114	5
	SIMP	85	28 473	0.252	3
	RAMP	131	19 049	0.096	8

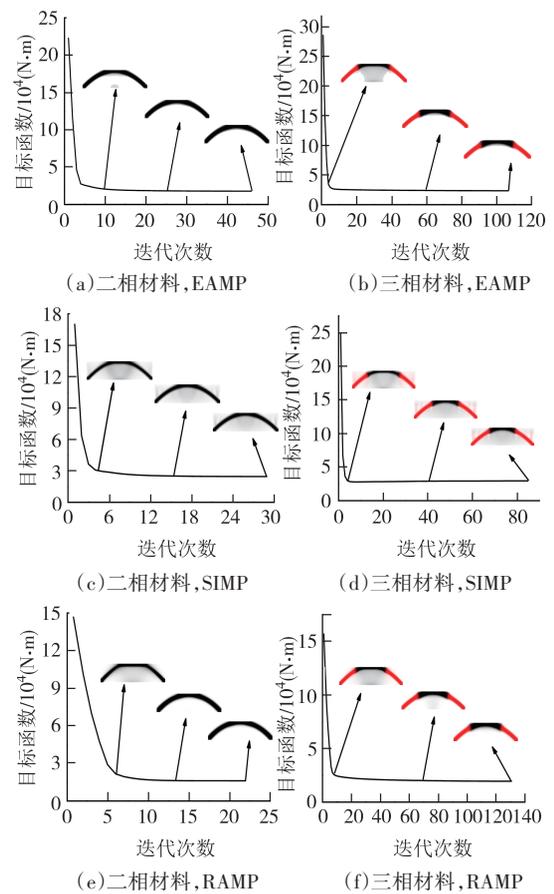


图2 不同插值模型的优化进程图

Fig.2 Optimization process diagram of different interpolation models

2.2 多载荷作用下的数值算例

上节已验证了基于RAMP插值函数的导重法在处理惯性载荷下多材料结构拓扑优化的优越性,本节将其应用于同时包含集中力与惯性载荷的多载荷拓扑优化问题,且其结构优化将包含更多相数的材料.

2.2.1 自重与集中力载荷作用

悬臂梁(算例2)模型图如图3所示,长80 m,宽40 m,共计3 200个单元,其受自身重力影响,同时为防止优化过程中悬臂梁末端低密度区域造成优化结果不收敛,在其末端的中点处施加一个质量点,大小为自身重力的25%.

结构的多材料参数如表3所示,密度统一设置为 1 kg/m^3 .厚度设置为1 m,重力加速度为 9.8 N/kg .根据式(7)可以推导出算例2所受重力的表达式.在体积约束设置为原材料的30%的情况下使得整体结构的柔度最小.

不同材料依据其弹性模量由大到小分别用黑色、红色、蓝色、绿色表示,即 $E_{\text{黑}} > E_{\text{红}} > E_{\text{蓝}} > E_{\text{绿}}$.如

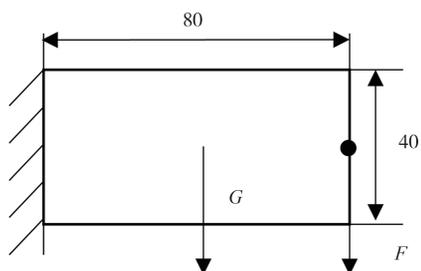


图 3 算例 2 模型图(单位:m)

Fig.3 Model diagram of example 2(unit:m)

表 3 多材料下算例 2 的参数设置

Tab.3 Multi-material parameters setting of example 2

相数	弹性模量/ 10^6 GPa	体积占比
2	[1 10^{-9}]	[0.3 0.7]
3	[1 0.9 10^{-9}]	[0.15 0.15 0.7]
4	[1 0.9 0.8 10^{-9}]	[0.1 0.1 0.1 0.7]
5	[1 0.9 0.8 0.7 10^{-9}]	[$\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ 0.7]

图 4 所示,基于 RAMP 插值函数下的导重法应用于受自重和集中力作用下的结构拓扑优化,拓展到 5 相材料所得到的优化图依旧清晰可见,且优化结构保持一致,呈现桁架结构,其拓扑构型在力的传递方面表现合理.其中弹性模量最大的材料分布在固定端及结构顶端,除去固定端,距离固定端越远,其材料的弹性模量越大.这是由于距离固定端越远,所受自重影响越大,所在设计区域分布材料弹性模量越大.由图 5 可以看出,目标函数随着迭代次数的增长而下降,且在迭代初期就趋于最终解.随着材料相数的增加,最终优化结果的目标函数依次升高.这是因为加入了弹性模量较小的材料,导致其整体刚度降低,符合预期结果.

2.2.2 离心力与集中力载荷作用

受离心力悬臂梁(算例 3)模型图如图 6 所示,长

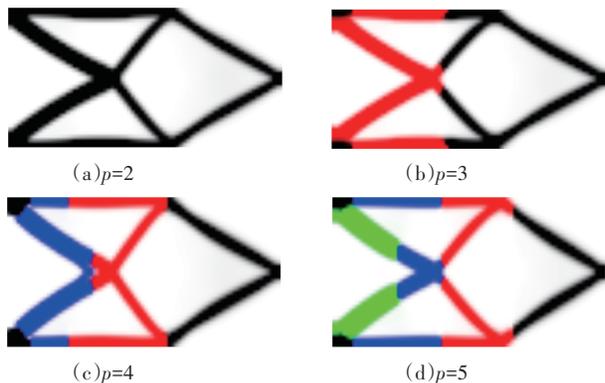


图 4 多材料下算例 2 的优化结果图

Fig.4 Multi-material optimization plots of example 2

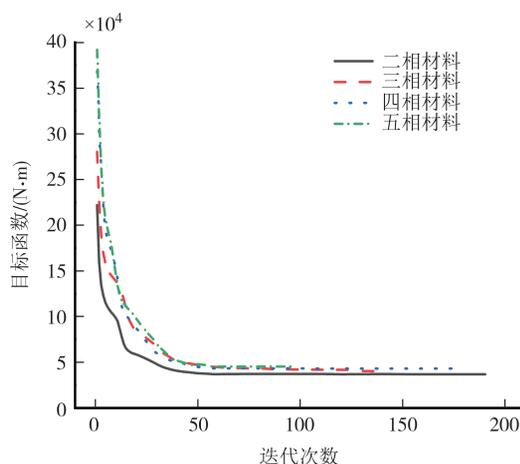


图 5 算例 2 的目标函数迭代曲线

Fig.5 Objective function iteration curve of example 2

80 m,宽 40 m,共计 3 200 个单元,绕着固定端以恒定角速度旋转, ω 为旋转角速度取 2 rad/s, m_i 为单元质量, r_i 为各单元到旋转轴的直线距离, F 为质量点,施加在结构末端的中点区域,为总重力的 1.2 倍.各材料参数如表 4 所示,体积约束设置为 30%,使得整体结构的柔度最小.

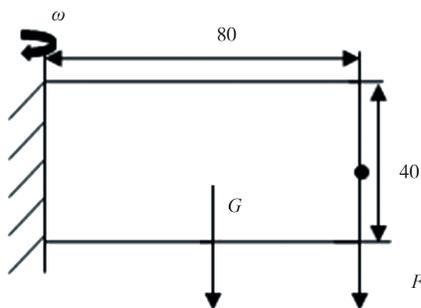


图 6 算例 3 模型图(单位:m)

Fig.6 Model diagram of example 3(unit:m)

表 4 多材料下算例 3 的参数设置

Tab.4 Multi-material parameters setting of example 3

相数	弹性模量/ 10^6 GPa	体积占比
2	[1 10^{-9}]	[0.3 0.7]
3	[10.97 10^{-9}]	[0.15 0.15 0.7]
4	[10.97 0.94 10^{-9}]	[0.1 0.1 0.1 0.7]
5	[10.97 0.94 0.91 10^{-9}]	[$\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ $\frac{3}{40}$ 0.7]

算例 3 的优化结果图和目标函数迭代曲线分别如图 7、图 8 所示.可以看出结构在离心力和集中力作用下优化构型呈三角形,由固定端上下两侧连接至末端中点区域.结论与上节类似,结构绕固定端旋转时,距离固定端越远,所受离心力影响越大,其所在设计域分布的材料弹性模量越大.目标函数随着材料相数的增加依次升高.

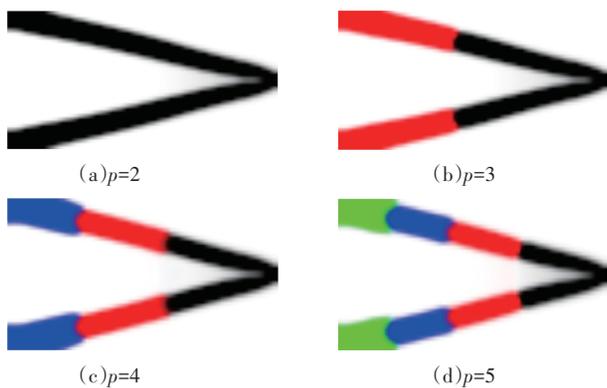


图7 多材料下算例3的优化结果图

Fig.7 Multi-material optimization plots of example 3

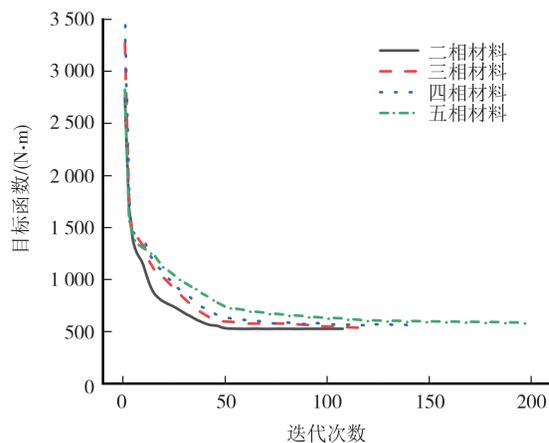


图8 算例3的目标函数迭代曲线

Fig.8 Objective function iteration curve of example 3

3 多材料组合下的优化策略

在上节中已经证明了导重法在处理惯性载荷下多材料拓扑优化问题的可靠性,本节将在体积约束的前提下,通过自重情况下简支梁(算例1)的拓扑优化,论证多材料结构优化下,如何选取不同参数的材料使得目标函数即柔度较低.选取以下3种材料,其材料参数如表5所示,为更直观研究参数对于目标函数影响,将所选材料参数进行归一化,使得其数值的绝对值转变为相对值关系,所选取材料的弹性模量和密度最大值被映射为“1”^[21].进行归一化处理后如表6所示,在优化图中显示的颜色分别为黑色、红色、蓝色,其中 E_i, ρ_i 分别为材料的归一化弹性模量及密度.图9为在体积约束为0.3的条件下,对3种材料排列组合进行优化的结果.从图9可以看出,通过改变材料组合并不改变优化结构形状,分布规律与上节结论相同,弹性模量最大的材料分布在固定端及

结构顶端.在单独使用B材料进行拓扑优化时所得结构的柔度最大,单独使用C材料时柔度最小即此时刚度最大,最满足设计需求.这是由于C材料的归一化模量密度比(E_i/ρ_i)最大^[21].

表5 各材料参数

Tab.5 Materials parameters

材料	弹性模量/GPa	密度/($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	泊松比
A	173×10^6	7.3	0.3
B	120×10^6	7.3	0.3
C	70×10^6	2.7	0.3

表6 不同材料的归一化参数

Tab.6 Normalized parameters for different materials

材料	E_i	ρ_i	E_i/ρ_i	颜色
A	1	1	1	黑
B	0.69	1	0.69	红
C	0.4	0.3	1.33	蓝



图9 多材料组合下的优化结果

Fig.9 Optimization results of multi-material combination

4 结论

本文主要研究单一体积约束条件下柔度最小的考虑惯性载荷作用的多材料结构拓扑优化问题,通过不同数值算例的对比,确立了基于RAMP插值函数的导重法,能够有效减少优化结果的灰度单元,有助于获得清晰的拓扑构型,降低结构的整体柔度.并有下列结论:所受惯性载荷的影响越大,所在设计区域分布材料弹性模量越大;选取不同材料用于多材料结构拓扑优化设计,材料的模量密度比越大,结构的整体柔度越小,刚度越大,对于实际工程应用有着一定的指导作用.

参考文献

- [1] ZHANG X P, WANG D F, KONG D W, et al. The anti-fatigue lightweight design of heavy tractor frame based on a modified decision method [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(10):280.
- [2] 张伟,侯文彬,胡平. 基于拓扑优化的电动汽车白车身优化设计[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2014, 41(10):42-48.
ZHANG W, HOU W B, HU P. The body in white optimization of an electric vehicle using topology optimization [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2014, 41(10):42-48. (in Chinese)
- [3] KIM K H, YOON G H. Acoustic topology optimization using moving morphable components in neural network-based design [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(2):47.
- [4] 程耿东. 实心弹性薄板的最优设计[J]. *大连工学院学报*, 1981, 21(2):1-11.
CHENG G D. Optimum design of thin, solid, elastic plates [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1981, 21(2):1-11. (in Chinese)
- [5] XU H Y, GUAN L W, CHEN X, et al. Guide-Weight method for topology optimization of continuum structures including body forces [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, 75:38-49.
- [6] ROZVANY G I N, WANG C M. Optimal layout theory: allowance for selfweight [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1984, 110(1):66-83.
- [7] 陈树勋,叶尚辉. 天线结构优化设计的准则法[J]. *固体力学学报*, 1984, 5(4):482-498.
CHEN S X, YE S H. Criterion method for the optimal design of antenna structure [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1984, 5(4):482-498. (in Chinese)
- [8] BRUYNEEL M, DUYSINX P. Note on topology optimization of continuum structures including self-weight [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 29(4):245-256.
- [9] HUANG X, XIE Y M. Evolutionary topology optimization of continuum structures including design-dependent self-weight loads [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, 47(8):942-948.
- [10] JAIN N, SAXENA R. Effect of self-weight on topological optimization of static loading structures [J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2018, 57(2):527-535.
- [11] KUMAR P. Topology optimization of stiff structures under self-weight for given volume using a smooth Heaviside function [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(4):128.
- [12] 陈潇凯,李超,白影春,等. 汽车多材料控制臂拓扑优化方法[J]. *汽车工程*, 2021, 43(7):1088-1095.
CHEN X K, LI C, BAI Y C, et al. Multi-material topology optimization of automotive control arm [J]. *Automotive Engineering*, 2021, 43(7):1088-1095. (in Chinese)
- [13] 闫浩,吴晓明. 基于 ordered-EAMP 模型的多材料传热结构拓扑优化[J]. *航空动力学报*, 2021, 36(5):1007-1021.
YAN H, WU X M. Multi-material topology optimization for heat transfer structure based on ordered-EAMP model [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(5):1007-1021. (in Chinese)
- [14] HUANG X, XIE Y M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials [J]. *Computational Mechanics*, 2009, 43(3):393-401.
- [15] TAVAKOLI R, MOHSENI S M. Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49(4):621-642.
- [16] ZUO W J, SAITOU K. Multi-material topology optimization using ordered SIMP interpolation [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2017, 55(2):477-491.
- [17] 刘继凯,张乘虎,袁志玲,等. 基于 Ordered SIMP 插值模型的点阵-实体复合结构拓扑优化设计方法[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2022, 49(2):13-19.
LIU J K, ZHANG C H, YUAN Z L, et al. Topology optimization method for lattice-solid structure design based on ordered SIMP interpolation [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2022, 49(2):13-19. (in Chinese)
- [18] GAO X J, CHEN W H, LI Y X, et al. Robust topology optimization of multi-material structures under load uncertainty using the alternating active-phase method [J]. *Composite Structures*, 2021, 270:114065.
- [19] ZHANG S S, LI H M, HUANG Y C. An improved multi-objective topology optimization model based on SIMP method for continuum structures including self-weight [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(1):211-230.
- [20] YI P, ZHU Z, GONG J X. An approximate sequential optimization and reliability assessment method for reliability-based design optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, 54(6):1367-1378.
- [21] HUANG X D, LI W B. A new multi-material topology optimization algorithm and selection of candidate materials [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, 386:114114.