

斜拉桥面内振动的理论建模与特征值分析

王连华^{1†}, 谢学鑫¹, 彭剑², 张晓宇^{1,3}

1. 湖南大学土木工程学院, 湖南长沙 410082;
2. 湖南科技大学土木工程学院, 湖南湘潭 411201;
3. 广西交通设计集团有限公司, 广西南宁 530022)

摘要: 本文建立了斜拉桥的精细化面内动力学模型, 并开展了相应的自振特性分析. 首先利用 Hamilton 变分原理推导了斜拉桥的运动方程, 利用边界条件确定了斜拉桥线性化模型的频率方程. 然后以双塔三跨斜拉桥为例开展数值分析, 通过对比有限元结果验证了数值方法的正确性. 同时引入局部化因子定量说明斜拉桥固有模态的特性. 最后讨论了不同结构参数、索梁相互作用和结构体系对斜拉桥自振特性的影响. 结果表明当系统的固有频率接近纯索频率时, 斜拉桥的固有模态将呈现局部特性. 同时索梁相互作用明显影响低阶非局部模态, 相反可以忽略对高阶固有频率的影响.

关键词: 斜拉桥; 索梁相互作用; Hamilton 变分原理; 固有频率; 局部模态

中图分类号: U441.3 **文献标志码:** A

Theoretical Modeling and Eigenvalue Analysis on In-plane Vibration of Cable-Stayed Bridges

WANG Lianhua^{1†}, XIE Xuexin¹, PENG Jian², ZHANG Xiaoyu^{1,3}

1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;
2. School of Civil Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;
3. Guangxi Communications Design Group Co., Ltd., Nanning 530022, China)

Abstract: In this study, a refined in-plane dynamic model of cable-stayed bridges was constructed, and the corresponding free vibration characteristics were analyzed. Firstly, the in-plane motion equations of the cable-stayed bridge were derived using the Hamilton variational principle, and the characteristic frequency equation of the linearized model was determined based on boundary conditions. A three-span cable-stayed bridge with double towers was chosen for the numerical calculation, and the correctness of the corresponding solution was verified through the finite element method. Then, the modal characteristics of the cable-stayed bridge were quantitatively reflected by introducing localization factors. Finally, the effects of structural parameters, cable-deck interaction, and structural systems on the natural frequencies and modes were discussed. The results show that the natural modes of the system exhibit the local characteristics when the natural frequencies of the cable-stayed bridge are close to the

* 收稿日期:2023-11-23

基金项目:长沙市自然科学基金资助项目(KQ2202133), Natural Science Foundation of Changsha (KQ2202133); 湖南省自然科学基金资助项目(2023JJ30152), Natural Science Foundation of Hunan Province (2023JJ30152)

作者简介:王连华(1975—),男,湖南娄底人,湖南大学教授,博士

† 通信联系人, E-mail: Lhwang@hnu.edu.cn

ones of pure cable. Moreover, the cable-deck interaction may significantly affect the low-order non-local modes. However, the effects on the higher-order frequencies can be ignored.

Key words: cable-stayed bridge; cable-deck interaction; Hamilton's variational principle; natural frequencies; local mode

斜拉桥属于典型的大跨桥梁,在外部激励下会出现大幅振动.因此,研究斜拉桥的建模和动力学特性具有重要的理论意义和工程应用价值.

近年来,国内外学者通过建立有限元模型研究了斜拉桥的动力学和索梁相互作用^[1-8].谭长建等^[9]建立拉索与桥面的耦合振动模型,并研究了索梁耦合振动特性.Tuladhar等^[10]研究了拉索振动对斜拉桥地震反应的影响.此外,也有学者利用动力刚度矩阵法分析斜拉桥的固有频率^[11].总体而言,有限元模型普遍采用杆单元模拟斜拉索,但这种处理忽略了拉索的固有力学特性,也不能从力学层面描述索梁相互作用.

此外,部分研究通过经典动力学理论建立斜拉桥的简化理论模型.并在此基础上研究了斜拉桥的自振特性和共振动力学^[12-16].Kang等^[17]利用Hamilton变分原理推导出斜拉浅拱的面内振动方程.苏潇阳等^[18]建立具有弹性转动约束的斜拉桥多索-浅拱动力学模型.Yi等^[19]以双悬臂架设系统为例,利用相邻索梁间的传递系数和匹配条件,得到了相应的频率方程.Cao等^[20]推导出斜拉桥的控制方程.这些研究的理论模型主要基于Hamilton变分原理.显然,传统的变分法中不同自变函数的变分相互独立,从而导致理论模型的力学条件并不能通过变分确定,因此不能确保能量泛函的驻值要求.此外,理论模型

忽略了主塔的影响,同时相应的特征值分析缺乏数学上的一致性.

本文研究了斜拉桥面内振动的理论建模,利用分离变量法分析了斜拉桥的自由振动,并重点关注了固有模态的特性.最后分析了索梁相互作用的影响.本文的主要研究内容包括:1)首次利用Hamilton变分原理推导了考虑主塔振动斜拉桥的精细化面内运动模型;2)从理论的角度揭示了斜拉桥中的纯索模态;3)开展了索梁相互作用的力学描述,并揭示了相互作用对动力特性的影响.

1 连续模型

考虑典型的双塔三跨单索面斜拉桥,如图1所示,图中斜拉索体系由 $4n$ 根锚固在主塔和主梁的斜拉索 c_k 组成,与主梁的夹角为 θ_k ,在主塔和主梁上的锚点分别为 Q_k^p 和 Q_k^d ($k=1, \dots, 4n; j=1, 2$),锚点 Q_k^p 和塔梁连接点 C_1, C_2 将主塔 l_p 划分为 $2n+2$ 节段;锚点 Q_k^d 和塔梁连接点 C_1, C_2 将主梁 l_d 划分为 $4n+4$ 节段.分别以索塔锚点、主梁左支座和主塔自由端为坐标原点^[21],建立不同的固定直角坐标系($O_c^k - x_c^k y_c^k, O_d - x_d y_d, O_p^j - x_p^j y_p^j$).对拉索、主梁和主塔进行运动描述(k 为第 k 根斜拉索, j 为第 j 座主塔, c, d, p 分别代表斜拉索、主梁和主塔).

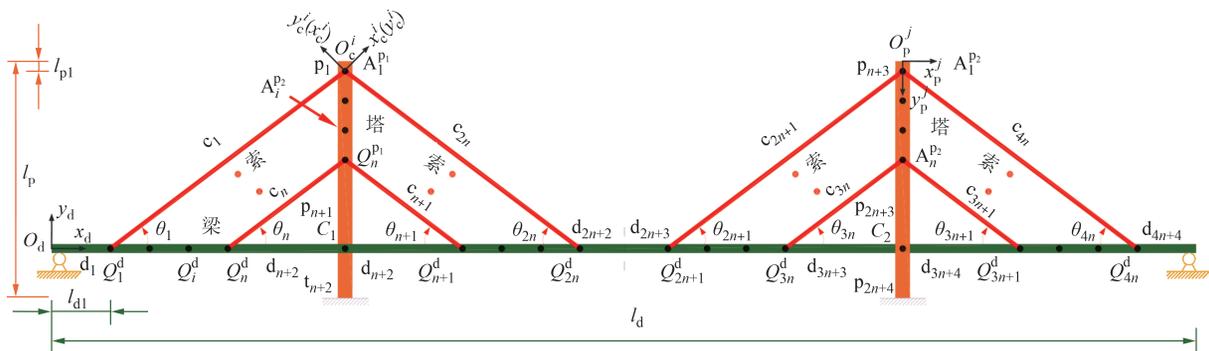


图1 双塔三跨单索面斜拉桥面内模型

Fig.1 In-plane model of a three-span cable-stayed bridge

选取 Lagrangian 应变作为应变度量, (·) 和 (′) 分别表示对时间 t 和横坐标 x 的导数. 拉索应变分量可以表示为: $\varepsilon_{ck}(x_{ck}, t) = u'_{ck} + y'_{ck}v'_{ck} + (u'^2_{ck} + v'^2_{ck})/2$. u_{ck} 和 v_{ck} 分别为斜拉索横向和纵向的位移分量, y_{ck} 、 x_{ck} 为斜拉索的垂度. 此外, 考虑 Euler-Bernoulli 假设, 主梁应变可以写成: $\varepsilon_{11}^d(x_{dk}, t) = \varepsilon_{dk}(x_{dk}, t) + y_{dk}v''_{dk}$, $\varepsilon_{dk}(x_{dk}, t) = u'_{dk} + v'_{dk}/2$. u_{dk} 和 v_{dk} 分别为主梁横向和纵向的位移分量. 主塔应变可以表示为: $\varepsilon_{11}^p(x_{pk}, t) = \varepsilon_{pk}(x_{pk}, t) + y_{pk}v''_{pk}$, $\varepsilon_{pk}(x_{pk}, t) = u'_{pk} + v'_{pk}/2$. u_{pk} 和 v_{pk} 分别为主塔横向和纵向的位移分量.

1.1 变分公式

总体而言, 斜拉桥的面内运动方程和平衡条件可以通过 Hamilton 变分原理得到:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (1)$$

式中: T 和 U 分别为斜拉桥的动能和势能; δW 为非保守力所做虚功之和.

$$T = \sum_{k=1}^{Nu_c} \int_0^{l_{ck}} \frac{1}{2} m_{ck} (\dot{u}_{ck}^2 + \dot{v}_{ck}^2) dx_{ck} + \sum_{i=d,t} \sum_{k=1}^{Nu_i} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} m_{ik} (\dot{u}_{ik}^2 + \dot{v}_{ik}^2) dx_{ik} \quad (2)$$

$$U = \sum_{i=c,d,p} \left(\sum_{k=1}^{Nu_i} U_{ik}^0 + \sum_{k=1}^{Nu_i} \int_{l_{ik}} [N_{ik} \varepsilon_{ik}(x_{ck}, t) + \frac{1}{2} E_{ik} A_{ik} \varepsilon_{ik}^2(x_{ik}, t)] dx_{ik} \right) + \sum_{i=d,p} \sum_{k=1}^{Nu_i} \int_{l_{ik}} E_i I_i v_i''^2 dx_{ik} \quad (3)$$

$$\delta W = \sum_{k=1}^{4Nu_c} \int_{l_{ck}} \{ m_{ck} g \sin \theta \delta u_{ck} + m_{ck} g \cos \theta \delta v_{ck} \} dx_{ck} + \sum_{i=c,d,p} \sum_{k=1}^{Nu_i} \int_{l_{ik}} [(p_u^i - c_u^i \dot{u}_i) \delta u_i + (p_v^i - c_v^i \dot{v}_i) \delta v_i] dx_i \quad (4)$$

式中: Nu_i 表示节段数目; m_i 为单位长度质量; l_i 为长度; U_i^0 为初始应变能; E_i 为弹性模量; A_i 为横截面面积; N_i 为初始轴力, $N_i = \int_{A_i} E_i \varepsilon_i^0 dA_i$, ε_i^0 为初始应变; $I_i = \int_{A_i} y_i^2 dA_i$, 为截面惯性矩; $\delta u(v)_i$ 为虚位移; c_u^i 和 c_v^i 为黏滞阻尼系数; p_u^i 和 p_v^i 为外荷载; θ_k 为斜拉索的倾角; g 为重力加速度.

1.2 运动方程

将式(2)~式(4)代入式(1), 经过常规的变分运算得到斜拉桥的运动方程为:

斜拉索:

$$\begin{cases} m_{ck} \ddot{u}_{ck} + c_u^{ck} \dot{u}_{ck} - [(N_{ck} + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck})]' = p_u^{ck}(x_{ck}, t) + m_{ck} g \cos \theta_k, \\ m_{ck} \ddot{v}_{ck} + c_v^{ck} \dot{v}_{ck} - [(N_{ck} + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(y'_{ck} + v'_{ck})]' = p_v^{ck}(x_{ck}, t) + m_{ck} g \sin \theta_k, \\ 0 < x_{ck} < l_{ck}, k = 1, \dots, 4n \end{cases} \quad (5)$$

主梁:

$$\begin{cases} m_d \ddot{u}_d + c_u^d \dot{u}_d - (N_{dk} + E_d A_d \varepsilon_d)' = p_u^d(x_d, t), \\ m_d \ddot{v}_d + c_v^d \dot{v}_d - E_d I_{dy} v_d'''' - [(N_{dk} + E_d A_d \varepsilon_d) v_d']' = p_v^d(x_d, t), \\ x_{d(k-1)}^+ < x_d < x_{dk}^-, k = 1, \dots, 4n + 4 \end{cases} \quad (6)$$

主塔:

$$\begin{cases} m_p \ddot{u}_p + c_u^{p_j} \dot{u}_p - (N_{pk}^j + E_p^j A_p^j \varepsilon_p^j)' = p_u^{p_j}(x_p, t) \\ m_p \ddot{v}_p + c_v^{p_j} \dot{v}_p - E_p^j I_{py} v_p'''' - [(N_{pk}^j + E_p^j A_p^j \varepsilon_p^j) v_p']' = p_v^{p_j}(x_p, t), \\ x_{p(k-1)}^+ < x_p < x_{pk}^-, k = 1, \dots, 2n + 2, j = 1, 2 \end{cases} \quad (7)$$

上述运动方程假设轴向位移梯度远小于 1, 且忽略初始应变. 另外, 边界条件可以写成:

$$\begin{cases} v_d(0, t) = v_d(l_d, t) = 0 \\ v_d''(0, t) = v_d''(l_d, t) = 0 \\ v_{p_j}''(0, t) = v_{p_j}''(l_{p_j}, t) = 0 \\ u_{p_j}(l_{p_j}, t) = v_{p_j}(l_{p_j}, t) = v_{p_j}'(l_{p_j}, t) = 0, j = 1, 2 \end{cases} \quad (8)$$

此外, 变分运算中包括分部积分项, 为了使驻值条件成立, 应满足以下条件:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{4n} [(T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck})]' \Big|_{x_{ck}=0}^{x_{ck}=l_{ck}} - \\ & \sum_{k=1}^{4n+3} [E_d I_{dy} u_d'''' + (N_{dk} + E_d A_d \varepsilon_{dk})(x'_d + u'_d)] \delta u_d \Big|_{x_d=x_{dk}^-}^{x_d=x_{dk}^+} - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n [E_p^j I_{py} u_p'''' + (N_{pk}^j + E_p^j A_p^j \varepsilon_p^j)(x'_{p_j} + u'_{p_j})] \delta u_{p_j} \Big|_{x_{p_j}=x_{pk}^-}^{x_{p_j}=x_{pk}^+} - \\ & \sum_{k=1}^{4n+3} E_d I_{dy} u_d'' \delta u_d' \Big|_{x_d=x_{dk}^-}^{x_d=x_{dk}^+} - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n E_p^j I_{py} u_p'' \delta u_p' \Big|_{x_{p_j}=x_{pk}^-}^{x_{p_j}=x_{pk}^+} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)描述了斜拉桥模型的力学条件. 为了确定这些力学条件, 首先考虑主梁和主塔在斜拉索锚点和塔梁连接处的位移场连续性. 在无斜拉索锚固节段处, 主梁和主塔位移场的连续性可以表示为:

$$\delta u_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = \delta u_d \Big|_{x_d = x_{dk}^-}, \delta u'_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = \delta u'_d \Big|_{x_d = x_{dk}^-} \quad (10)$$

在锚固节段处,位移场的连续性可以表示为:

$$\delta u_{ck} \Big|_{x_{ck} = 0} = R_k^{cd} \delta v_d \Big|_{x_d = x_{dk}}, \delta u_{ck} \Big|_{x_{ck} = l_{ck}} = R_k^{cp} \delta v_p \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} \quad (11)$$

其中 R_k^{cd} 和 R_k^{cp} 为转换矩阵分量.

根据式(9)~式(11),利用位移变分的任意性,可以得到主梁锚点 Q_k^d 处的力学条件和几何条件为:

$$\begin{cases} (N_{dk} + E_d A_d \varepsilon_d)(1 + u'_d) \Big|_{x_d = x_{dk}^+} + \\ \cos \theta_k (N_{ck} + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} - \\ \sin \theta_k (N_{ck} + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(y'_{ck} + v'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} = 0 \\ [E_d I_{dy} v_d'' + (N_{dk} + E_d A_d \varepsilon_d) v'_d] \Big|_{x_d = x_{dk}^+} - \\ \sin \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} - \\ \cos \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(y'_{ck} + v'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} = 0 \\ E_d I_{dy} v_d'' \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+} &= \mathbf{R}(\theta_k) u_{ck}^k \Big|_{x_{ck} = 0}, u_d \Big|_{x_d = x_{dk}^-} = u_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+}, \\ u'_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+} &= u'_d \Big|_{x_d = x_{dk}^-}, k = 1, \dots, 4n \end{aligned} \quad (13)$$

式中: T_{ck}^0 为斜拉索的初始索力; $\mathbf{u} = \{u, v\}^T$; $\mathbf{R}(\theta_k)$ 为坐标转换矩阵. 同时主塔锚点 Q_k^p 处的力学条件和几何条件为:

$$\begin{cases} (N_{pk}^j + E_p^j A_p^j \varepsilon_p^j)(1 + u'_{pj}) \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} + \\ \sum_{k, n+k} \sin \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} - \\ \sum_{k, n+k} \cos \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(y'_{ck} + v'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} = 0 \\ [E_p^j I_{py} v_{pj}'' + (N_{pk}^j + E_p^j A_p^j \varepsilon_p^j) v'_{pj}] \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} - \\ \sum_{k, n+k} \sin \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(x'_{ck} + u'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} - \\ \sum_{k, n+k} \cos \theta_k (T_{ck}^0 + E_{ck} A_{ck} \varepsilon_{ck})(y'_{ck} + v'_{ck}) \Big|_{x_{ck} = 0} = 0 \\ E_p^j I_{py} v_{pj}'' \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} &= \mathbf{R}(\frac{\pi}{2} - \theta_k) u_{ck}^k \Big|_{x_{ck} = l_{ck}}, u_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^-} = u_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+}, \\ u'_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} &= u'_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^-}, k = 1, \dots, n, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{u}_{pj} = \{u_{pj}, v_{pj}\}^T$. 在斜拉桥跨中主梁力学条件和几何条件为:

$$\begin{cases} (N_{d(2n+2)} + E_d A_d \varepsilon_{d(2n+2)})(1 + u'_d) \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = 0, \\ [E_d I_{dy} v_d'' + (N_{d(2n+2)} + \\ E_d A_d \varepsilon_{d(2n+2)}) v'_d] \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = 0, \\ E_d I_{dy} v_d'' \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^-} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

$$u_d \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = u_d \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^-}, u'_d \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = u'_d \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^-} \quad (17)$$

此外,在塔梁连接点 C_j 处的力学条件和几何条件取决于斜拉桥的结构体系.

1.3 减缩模型

斜拉索的初始构形可以利用抛物线进行描述: $y_{ck}(x_{ck}) = 4b_{ck} x_{ck} (l_{ck} - x_{ck}) / l_{ck}^2$. 此时 $T_{ck}^0 \approx H_k$, 其中 $H_k = m_{ck} A_{ck} g l_{ck}^2 \cos \theta_k / (8b_{ck})$ 为初始索力的轴向分量, b_{ck} 为斜拉索的垂度. 对于一维结构而言,结构的纵向频率远大于横向频率. 因此可以利用拟静态假设实现运动的减缩. 在此基础上引入无量纲量: $\hat{x}_i = \frac{x_i}{l_i}$, $\hat{v}_i =$

$$\frac{v_i}{l_i}, \hat{w}_i = \frac{w_i}{l_i}, \hat{t} = \frac{t}{l_{c1}} \cdot \sqrt{\frac{H_{c1}}{m_{c1}}} \quad (i = c, d, p),$$

代入可以得到斜拉桥的无量纲面内运动方程:

$$\begin{cases} \rho_{ck}^2 \ddot{v}_{ck} + c_v^{ck} \dot{v}_{ck} - v_{ck}'' - \\ \alpha_k \left(y_{ck}'' + \frac{1}{l_{ck}} v_{ck}'' \right) e_{ck}(t) = p_v^{ck}, \\ \ddot{v}_d + c_v^d \dot{v}_d - P_d v_d'' + \beta_d v_d'''' - \Xi_d e_{dk}(t) = p_v^d, \\ \ddot{v}_{pj} + c_v^{pj} \dot{v}_{pj} - P_{pj} v_{pj}'' + \beta_{pj} v_{pj}'''' - \Xi_{pj} e_{pk}^j(t) = p_v^{pj} \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{式中: } \hat{c}_z^i = \frac{c_z^i l_{c1}}{m_i} \sqrt{\frac{m_{c1}}{H_{c1}}}, \hat{p}_z^i = \frac{p_z^i l_{c1}^2}{m_i l_i} \frac{m_{c1}}{H_{c1}}, P_i = \frac{N_i l_{c1}^2}{m_i l_i} \frac{m_{c1}}{H_{c1}} \alpha_k =$$

$$\frac{E_{ck} A_{ck} m_{c1} l_{c1}^2}{H_{ck} m_{ck} l_{ck}^2}, \rho_{ck}^2 = \frac{m_{ck} H_{c1} l_{ck}^2}{m_{c1} H_{ck} l_{c1}^2}, \Xi_i = \frac{E_i A_i m_{c1} l_{c1}^2}{H_{c1} m_i l_i^2}, P_i =$$

$$\frac{H_{ck}}{H_{c1}} \frac{m_{c1} l_{c1}^2}{m_i l_i^2} (\cos \theta_k + \sin \theta_k), \beta_i = \frac{E_i I_{iy} m_{c1} l_{c1}^2}{H_{c1} l_i^2 m_i l_i^2}, i = c, d, p,$$

$$e_{dk}(t) = \int_{x_{d(k-1)}^-}^{x_{d(k-1)}^+} \frac{1}{2} (v_d'^2 + w_d'^2) dx_d, e_{pk}^j(t) = \int_{x_{p(k-1)}^-}^{x_{p(k-1)}^+} \frac{1}{2} [(v_{pj}')^2 +$$

$$(w_{pj}')^2] dx_{pj}, e_{ck}(t) = v_d(x_{dk}, t) v_d \sin \theta_k - v_{pj}(x_{pk}^j, t) v_{pj} \cos \theta_k +$$

$$\int_0^{l_{ck}} \left[y'_{ck} v'_{ck} + \frac{1}{2} [(v'_{ck})^2 + (w'_{ck})^2] \right] dx_{ck}, z = v, w$$

此外,无量纲形式的边界条件可以表示为:

$$\begin{aligned} v_d(0, t) = v_d''(0, t) = v_d(l_d, t) = v_d''(l_d, t) = 0, \\ v_{p_j}(l_{p_j}, t) = v_{p_j}'(l_{p_j}, t) = v_{p_j}''(0, t) = v_{p_j}'''(0, t) = 0 \end{aligned}$$

对于斜拉索与主梁锚固点处的无量纲的力学和几何条件,可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} & [\alpha_k \eta_{dk} K_{dk} v_d''' + (N_{dk} + \alpha_k \kappa_{dk} e_{dk}(t)) v_d'] \Big|_{x_d = x_{dk}^+} - \\ & \alpha_k e_{ck}(t) \sin \theta_k \Big|_{x_{ck} = 0} + \cos \theta_k [H_{ck} v_{ck}' + \\ & \alpha_k e_{ck}(t) (y_{ck}' + v_{ck}')] \Big|_{x_{ck} = 0} = 0, \\ & \alpha_k \eta_{dk} K_{dk} v_d'' \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_d(x_{dk}^+, t) = v_d(x_{dk}^-, t) = v_{ck}(0, t) \cos \theta_k / \nu_d \\ v_d'(x_{dk}^+, t) = v_d'(x_{dk}^-, t) \end{aligned} \right. \quad (20)$$

对于斜拉索与主塔锚固点处的无量纲的力学和几何条件,可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} & [\alpha_k \eta_{pk}^j K_{pk}^j v_{p_j}''' + (N_{p_j} + \alpha_k \kappa_{pk}^j e_{pk}^j(t)) v_{p_j}'] \Big|_{x_{p_j} = x_{pk}^+} - \\ & \sum_{k, n \neq k} \alpha_k e_{ck}(t) \sin \theta_k \Big|_{x_{ck} = 0} - \sum_{k, n \neq k} \cos \theta_k [H_{ck} v_{ck}' + \\ & \alpha_k e_{ck}(t) (y_{ck}' + v_{ck}')] \Big|_{x_{ck} = 0} = 0, \\ & \alpha_k \eta_{pk}^j K_{pk}^j v_{p_j}'' \Big|_{x_{p_j} = x_{pk}^+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_{p_j}(x_{pk}^+, t) = v_{p_j}(x_{pk}^-, t) = v_{ck}(1, t) \sin \theta_k / \nu_{p_j} \\ v_{p_j}'(x_{pk}^+, t) = v_{p_j}'(x_{pk}^-, t) \end{aligned} \right. \quad (22)$$

式中: $K_{ik} = E_{ik} I_{ik} / (E_{ck} A_{ck}^2)$, $\eta_{ik} = A_{ck} / l_{ik}^2$, $\kappa_{ik} = E_{ik} A_{ik} / E_{ck} A_{ck}$ ($i=d, p$). 斜拉桥跨中主梁的无量纲的力学和几何条件可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} & [\alpha_k \eta_{dk} K_{dk} v_d''' + \\ & (N_{d(2n+2)} + \alpha_k \kappa_{dk} e_{dk} A_{d(2n+2)}) v_d'] \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = 0, \\ & \alpha_k \eta_{dk} K_{dk} v_d'' \Big|_{x_d = x_{d(2n+2)}^+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_d(x_{d(2n+2)}^+, t) = v_d(x_{d(2n+2)}^-, t) \\ v_d'(x_{d(2n+2)}^+, t) = v_d'(x_{d(2n+2)}^-, t) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

对于漂浮体系斜拉桥而言,其塔梁连接点处的无量纲的力学条件和几何条件可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} & [\alpha_h \eta_{dh} K_{dh} v_d''' + (N_{dh} + \alpha_h \kappa_{dh} e_{dh}(t)) v_d'] \Big|_{x_d = x_{dh}^+} = 0 \\ & [\alpha_h \eta_{p(n+1)}^j K_{p(n+1)}^j v_{p_j}''' + (N_{p(n+1)}^j + \\ & \alpha_h \kappa_{p(n+1)}^j e_{p(n+1)}^j(t)) v_{p_j}'] \Big|_{x_{p_j} = x_{p(n+1)}^+} = 0, \\ & \alpha_h \eta_{dh} K_{dh} v_d'' \Big|_{x_d = x_{dh}^+} = 0, \alpha_h \eta_{p(n+1)}^j K_{p(n+1)}^j v_{p_j}'' \Big|_{x_{p_j} = x_{p(n+1)}^+} = 0 \\ & j = 1, 2, h = (2j - 1)(n + 1) \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_d(x_{dh}^+, t) = v_d(x_{dh}^-, t), v_d'(x_{dh}^+, t) = v_d'(x_{dh}^-, t) \\ v_{p_j}(x_{p(n+1)}^+, t) = v_{p_j}(x_{p(n+1)}^-, t) \\ v_{p_j}'(x_{p(n+1)}^+, t) = v_{p_j}'(x_{p(n+1)}^-, t) \end{aligned} \right. \quad (26)$$

2 特征值分析

忽略非线性项、阻尼项和外荷载项,可以得到斜拉桥线性无阻尼自由振动的系统方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{ck}^2 \ddot{v}_{ck} - v_{ck}'' - \alpha_k \gamma_{ck}'' e_{ck}(t) &= 0 \\ \ddot{v}_{dk} - P_{dk} v_{dk}'' + \beta_{dk} v_{dk}'''' &= 0 \\ \ddot{v}_{pk} - P_{pk} v_{pk}'' + \beta_{pk} v_{pk}'''' &= 0 \end{aligned} \right. \quad (27)$$

接下来,利用分离变量法开展特征值分析.

2.1 频率方程

对于面内自由振动而言,其通解可以表示为:

$$\vec{v}_r = \{ \phi_{ck}(x_{ck}), \phi_{dk}(x_d), \phi_{pk}(x_p) \}^T e^{\xi \omega_r t}, \text{ 其中, } \omega_r \text{ 为}$$

第 r 阶面内固有频率, ϕ_{ck} , ϕ_{dk} 和 ϕ_{pk} 为振型函数, $\xi = \sqrt{-1}$. 将通解代入运动方程,可以得到:

$$\left\{ \begin{aligned} & \phi_{ck}'' + (\rho_{ck} \omega_r)^2 \phi_{ck} - 8\alpha_k f_k [\phi_{dk} \sin \theta_k \sigma_{dk} + \\ & \phi_{pk} \cos \theta_k \sigma_{pk} + 4f_k \int_0^1 (1 - 2x_{ck}) \phi_{ck}' dx_{ck}] = 0 \\ & \beta_{dk} \phi_{dk}'''' - P_{dk} \phi_{dk}'' - (\omega_r)^2 \phi_{dk} = 0 \\ & \beta_{pk} \phi_{pk}'''' - P_{pk} \phi_{pk}'' - (\omega_r)^2 \phi_{pk} = 0 \end{aligned} \right. \quad (28)$$

其中 ϕ_{ck} , ϕ_{dk} 和 ϕ_{pk} 可以表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_{ck}(x_{ck}) &= A_{ck} \cos \rho_{ck} \omega_r x_{ck} + B_{ck} \sin \rho_{ck} \omega_r x_{ck} + \\ & \gamma_{k0} \gamma_{k1} A_{ck} + \gamma_{k0} \gamma_{k2} B_{ck}, \quad 0 < x_{ck} < l_{ck}; \\ \phi_{dk}(x_d) &= A_{dk} \cos \alpha_{dk} (x_d - x_{d(k-1)}) + \\ & B_{dk} \sin \alpha_{dk} (x_d - x_{d(k-1)}) + C_{dk} \cos h\beta_{dk} (x_d - x_{d(k-1)}) + \\ & D_{dk} \sinh \beta_{dk} (x_d - x_{d(k-1)}), \quad x_{d(k-1)}^+ < x_d < x_{dk}^-; \\ \phi_{pk}(x_p) &= A_{pk} \cos \alpha_{pk} (x_p - x_{p(k-1)}) + \\ & B_{pk} \sin \alpha_{pk} (x_p - x_{p(k-1)}) + C_{pk} \cos h\beta_{pk} (x_p - x_{p(k-1)}) + \\ & D_{pk} \sinh \beta_{pk} (x_p - x_{p(k-1)}), \quad x_{p(k-1)}^+ < x_p < x_{pk}^- \end{aligned} \right. \quad (29)$$

其中,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{dk} \\ \beta_{dk} \end{pmatrix} = \left[\frac{\sqrt{P_{dk}^2 + 4\beta_{dk}(\omega_r)^2}}{2\beta_{dk}} \mp \frac{P_{dk}}{2\beta_{dk}} \right]^{\frac{1}{2}}, \zeta_k = \rho_{ck} \omega_r,$$

$$\gamma_{k0} = 8\alpha_k f_k / (\zeta_k^3 \cot \theta_k - 8\alpha_k f_k \zeta_k \csc \theta_k^2),$$

$$\gamma_{k1} = \zeta_k \cos \zeta_k (1 - 4f_k \cot \theta_k) + \cot \theta_k (-4f_k \zeta_k + \zeta_k \cot \theta_k + 8f_k \sin \zeta_k),$$

$$\gamma_{k2} = \zeta_k \sin \zeta_k - 4f_k \cot \theta_k (-2 + 2\cos \zeta_k + \zeta_k \sin \zeta_k).$$

基于上述通解,通过开展特征值分析可以得到斜拉桥的特征频率方程: $\det(\mathbf{F}(\omega)) = 0$. 通过求解该方程可以确定斜拉桥的固有频率.

2.2 求解方法

如果选取 $\phi_{dk} = \phi_{pk} = 0, \phi_{ck} = \sin 2\rho_{ck} n\pi x_{ck}$, 此时这些函数明显满足所有条件. 因此,斜拉桥的特征频率方程理论上可以表示为:

$$\det(\mathbf{F}(\omega)) = \prod_{k=1}^{4n} \sin\left(\frac{\zeta_k}{2}\right) \cdot \det(\mathbf{F}'_k(\omega)) = 0 \quad (30)$$

式中: $\det(\mathbf{F}'_k(\omega))$ 表示非纯索模态满足的系数行列式. 显然,特征频率方程包括两类特征解. 对于第一类特征值,满足 $\sin(\zeta_k/2) = 0$, 此时固有频率 $\omega = 2n\pi$. 这些频率与主梁和主塔的结构参数无关,完全由拉索确定. 显然此时的模态并无任何耦合特性. 另外,第二类特征值完全由 $\det(\mathbf{F}'_k(\omega)) = 0$ 确定. 这类特征值包括不同结构单元振动的不同贡献,因此这些模态呈现不同程度的耦合特性. 对于这类特征值,表1给出了相应的求解方法.

3 数值验证

3.1 算例

为验证本文方法的准确性,以双塔四索漂浮体系斜拉桥为例(见图2)进行计算,并与SAP2000结果进行对比. 其中斜拉桥各构件的主要参数见表2.

3.2 固有频率和振型

表3给出了不同方法确定的斜拉桥前24阶固有频率. 可以看出两种方法的计算结果比较吻合. 因此验证了本文方法的正确性.

图3给出了斜拉桥前16阶固有模态,可以看出不同方法得到的固有模态形状基本一致,同时呈现出了三类不同的形态. 其中第6~9阶和第11~16阶模态完全由斜拉索的振动控制,相应的固有频率(无量纲)等于纯索频率(无量纲)(见表3),因此呈现出

表1 斜拉桥面内固有频率求解方法

Tab.1 The solution methods of in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

固有频率求解算法伪代码	
input:	
ω_0 :方程根初始值, N :等分步长的较大正整数,	
$\Delta\omega_1$:初始步长, $\Delta\omega_2$:新步长, ξ :精度	
output:	
omega:重新升序排列的满足要求精度的根	
begin	
$\omega_0 = \varpi\Delta\omega_1$ #赋初值,其中 $\varpi=0, 1, 2, \dots$	
$\Psi_j = [\det(\mathbf{F}(\varpi\Delta\omega_1)), \dots, \det(\mathbf{F}((\varpi+1)\Delta\omega_1))]$ ($j=1, 2$)	
For $\Psi_1 \leq 0$ do #在 ω_0 的给定范围内求出所有根	
omega = sort $\{\omega_1\}$ #将根重新升序排列	
$\Delta\omega_2 = \Delta\omega_1/N$ #用一个大的正整数得到新步长	
for $\Psi_2 \leq 0$ do #求出距第一级更靠近 ω_0 的根	
if $ \omega_2 - \omega_0 \leq \xi$ #收敛满足要求的精度	
omega = sort $\{\omega_1, \omega_2\}$ #将根重新升序排列	
break	
end if	
end for	
end For	
return omega #返回所求固有频率值	
end begin	

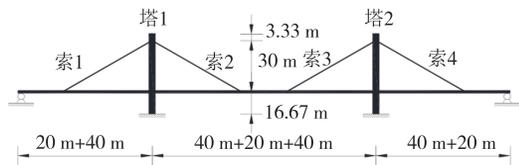


图2 双塔四索漂浮体系斜拉桥示意图

Fig.2 Schematic of a cable-stayed bridge of double towers and four cables floating system

表2 斜拉桥的主要参数

Tab.2 Parameters of the cable-stayed bridge

结构	A/m^2	E/MPa	I/m^4	$\rho A/(KN \cdot m^{-3})$
主塔	30	30 000	62.5	25.0
主梁	7.2	206 000	2.4	77.0
斜拉索	0.005 542	190 000	—	90.0

注: ρ 为结构材料的重力密度.

局部模态特性;第1~4阶模态中,主梁主导了斜拉桥的模态,呈现出全局模态特性;此外第5、10阶模态中,斜拉桥呈现出混合模态特性.

3.3 局部化因子

如前所述,斜拉桥固有模态可能呈现明显的局部化现象,为了定量描述这种现象,引入局部化因子 $\lambda_i (i = c, b, p)$:

表 3 双塔四索斜拉桥的面内固有频率和固有模态类型
Tab.3 The in-plane natural frequencies and mode shapes of the cable-stayed bridge with double towers and four cables

阶数	面内固有频率		模态类型
	本文方法	有限元	
1	0.543 8	0.547 2	全局
2	0.613 6	0.614 5	全局
3	1.230 8	1.260 0	全局
4	2.504 6	2.523 9	全局
5	2.831 6	2.844 9	混合
6	3.141 5	3.158 5	局部
7	3.141 5	3.159 5	局部
8	3.141 5	3.160 5	局部
9	3.141 5	3.161 3	局部
10	3.787 1	3.807 4	混合
11	6.281 9	6.319 6	局部
12	6.281 9	6.319 7	局部
13	6.281 9	6.319 8	局部
14	6.281 9	6.320 2	局部
15	9.422 6	9.479 4	局部
16	9.422 6	9.479 5	局部
17	9.422 6	9.479 6	局部
18	9.422 6	9.479 6	局部
19	12.563 6	12.639 4	局部
20	12.563 6	12.639 5	局部
21	12.563 6	12.639 5	局部
22	12.563 6	12.639 6	局部
23	14.943 4	15.799 3	混合
24	14.943 5	15.799 4	混合

$$\lambda_i = \frac{\sum_{k=1}^{Nu_i} m_{ik} \int_{I_{ik}} \phi_{ik}^2(x_{ik}) dx_{ik}}{\sum_{i=c,d,p} \sum_{k=1}^{Nu_i} m_{ik} \int_{I_{ik}} \phi_{ik}^2(x_{ik}) dx_{ik}}, i = c, d, p \quad (31)$$

理论上,这个因子代表第 n 阶模态时结构单元的动能与斜拉桥系统的总动量之比。

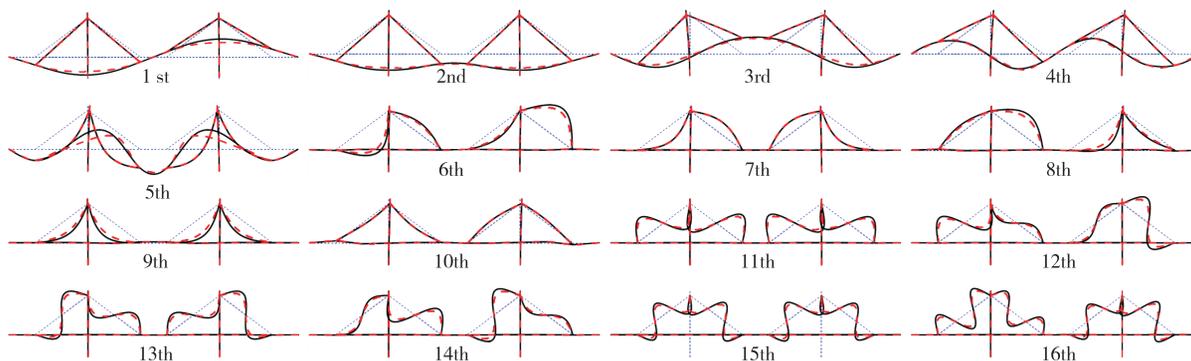


图 3 双塔四索斜拉桥的前 16 阶固有模态

Fig.3 The first 16 modes of the cable-stayed bridge with double towers and four cables

图 4 给出了模型前 16 阶模态各构件的局部化因子. 可以看出,第 1~4 阶模态中主梁的局部化因子接近 90%, 因此为全局模态. 相反第 6~9 阶、第 11~16 阶中斜拉索的局部化因子之和均大于 90% (局部模态), 此时拉索的振动完全独立于斜拉桥体系. 值得指出的是,目前的局部化因子从能量的角度反映了斜拉桥的模态特性. 最近,有学者从刚度的角度给出关于不同模态的定义^[22]. 对比这种方法,实际上两者都直接从不同结构构件的模态幅值直接定义斜拉桥的模态特性. 存在较小差别的原因在于局部化因子考虑了结构构件的材料特性.

4 数值分析

选取如图 5 所示的双塔八索斜拉桥作为数值算例开展参数分析. 表 4 给出相应斜拉桥模型的固有频率和固有模态类型. 接下来讨论主塔刚度、垂跨比、梁索刚度比和结构体系对斜拉桥面内固有频率的影响.

4.1 主塔刚度的影响

作为斜拉桥重要构件之一的主塔主要用来锚固拉索. 理论上,主塔由于两端拉索的共同作用,变形相对较小,然而它的刚度仍然在一定程度上影响整个结构的自振特性. 为了研究主塔刚度的影响,引入塔梁刚度比: $\vartheta = E_p I_p / E_d I_d$.

图 6 给出了塔梁刚度比对斜拉桥前 24 阶固有频率的影响. 由图可知,局部模态的固有频率与塔梁刚度比无关,但斜拉桥的非局部模态受刚度比影响显著. 当刚度比较小时,固有频率随着刚度比的增大呈现明显波动,这种变化对于高阶频率表现得更为明显. 相反当刚度比较大时,基本可以忽略其对固有频

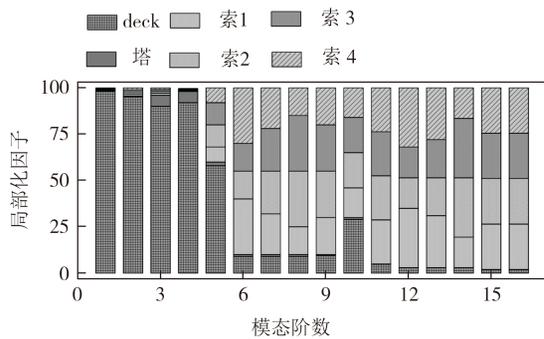


图4 双塔四索斜拉桥前16阶模态各构件的局部化因子

Fig.4 The localization factors of the first 16 modes of the cable-stayed bridge with double towers and four cables

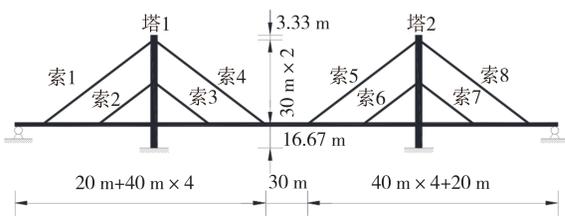


图5 双塔八索漂浮体系斜拉桥示意图

Fig.5 Schematic of cable-stayed bridge of floating system with double towers and eight cables

率的影响. 另外在频率较小区域, 斜拉桥频谱图呈现很多频率转向现象^[23].

4.2 垂跨比的影响

拉索的垂跨比直接决定索力, 也在一定程度上影响塔梁刚度. 同时垂跨比也直接影响拉索的相互作用. 因此理论上垂跨比对斜拉桥的非局部模态固有频率有重要影响. 为了定量研究垂跨比的影响, 考虑所有拉索具有相同垂跨比情况.

图7给出了斜拉桥的斜拉索垂跨比对前24阶固有频率的影响. 可以看出局部模态的固有频率与垂跨比无关, 同时非局部低阶模态的固有频率受垂跨比影响较小. 相反, 高阶模态的固有频率随垂跨比增

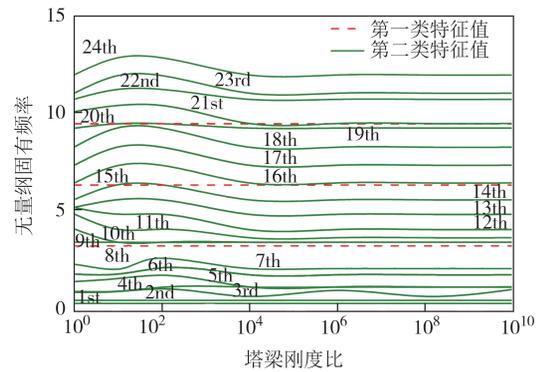


图6 塔梁刚度比对斜拉桥面内固有频率的影响

Fig.6 Effects of the tower-to-beam stiffness ratio on the in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

大, 到达峰值后随垂跨比的增大迅速减小, 呈现明显的周期性变化. 并且这一过程随着模态阶数的增加而变得更加明显. 值得注意的是, 斜拉桥频率谱仍然存在频率转向和频率交叉现象^[23].

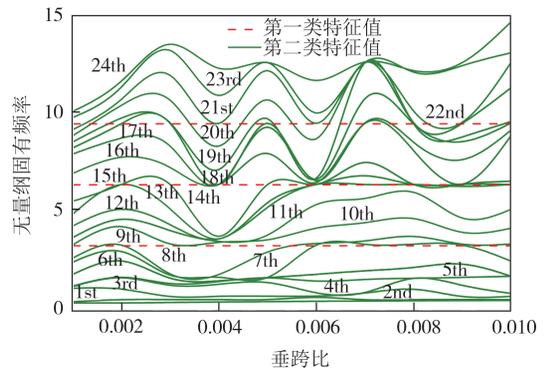


图7 垂跨比对斜拉桥面内固有频率的影响

Fig.7 Effects of the sag-to-span ratio on the in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

4.3 主梁刚度的影响

斜拉桥主梁的刚度影响斜拉桥的索梁相互作用和自振特性. 为了研究主梁刚度的影响, 借鉴无量纲

表4 双塔八索斜拉桥的面内固有频率和固有模态类型

Tab.4 The in-plane natural frequencies and mode shapes of the cable-stayed bridge with double towers and eight cables

阶数	面内固有频率		模态类型	阶数	面内固有频率		模态类型	阶数	面内固有频率		模态类型
	本文方法	有限元			本文方法	有限元			本文方法	有限元	
1	0.174 8	0.186 3	全局	9	3.992 6	4.023 4	全局	17	9.425 7	9.710 7	局部
2	0.346 6	0.366 5	全局	10	4.751 8	4.865 4	全局	18	9.435 1	9.720 3	局部
3	0.840 3	0.888 4	全局	11	5.551 7	5.738 7	混合	19	10.053 7	10.357 0	混合
4	1.390 1	1.454 6	全局	12	6.282 7	6.494 4	局部	20	10.366 2	10.678 9	全局
5	2.214 9	2.298 1	全局	13	6.395 2	6.596 9	混合	21	10.681 7	11.004 0	全局
6	2.655 5	2.730 8	混合	14	7.291 9	7.521 9	全局	22	10.994 1	11.325 8	全局
7	3.152 2	3.227 5	局部	15	8.229 2	8.479 7	全局	23	11.309 7	11.651 0	全局
8	3.295 9	3.374 1	混合	16	9.213 3	9.492 0	混合	24	11.625 2	11.976 3	全局

力学条件式(19)中的系数 K_{dk} 来定量描述主梁刚度, 这里引入梁索刚度比: $K = E_d I_d / (E_c A_c^2)$.

图 8 给出了梁索刚度比对斜拉桥前 24 阶固有频率的影响. 可以看出刚度比对低阶固有频率影响较小. 相反刚度比明显影响斜拉桥的高阶固有频率. 实际上, 随着刚度比的增大, 斜拉桥的高阶固有频率谱出现明显波动. 同时固有频率的明显变化导致频谱图呈现很多频率交叉和转向现象. 此外, 还可以看出, 当刚度比较大时, 斜拉桥的固有频率基本独立于刚度比的变化; 相反刚度比较小时, 斜拉桥固有频率的变化明显依赖于梁索刚度比.

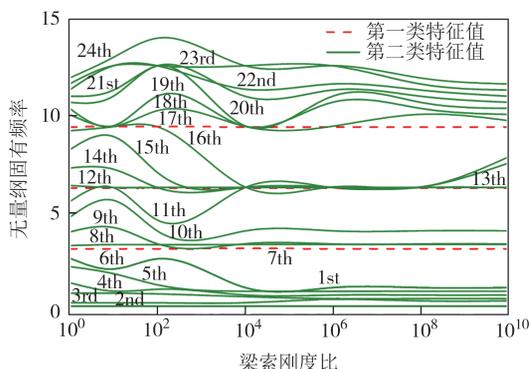


图 8 梁索刚度比对斜拉桥面内固有频率的影响

Fig.8 Effects of the beam-to-cable stiffness of the deck on the in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

4.4 索梁相互作用的影响

斜拉桥拉索和主梁(主塔)存在明显的动态相互作用, 从而导致不同结构构件振动的相互耦合. 这种相互作用在一定程度上影响斜拉桥的固有频率. 理论上, 这种作用可以通过几何条件和力学条件进行力学描述. 考虑到力学条件作为这种相互作用的主导作用, 下文将针对力学条件对索梁相互作用的影响进行定量分析.

表 5 给出了索梁相互作用对斜拉桥面内固有频率的影响. 理论上, 局部模态的固有频率取决于斜拉索的初始索力, 这种索力完全由静态平衡条件确定. 相反, 相互作用只反映索力的动态变化, 因此局部模态的固有频率完全独立于索梁相互作用, 如表 5 所示. 此外, 索梁相互作用明显影响非局部模态. 实际上, 对于低阶模态, 相互作用减小了非局部模态的固有频率. 这种影响随着固有模态阶数的增加而减弱, 因此基本可以忽略相互作用对高阶模态固有频率的影响.

表 5 索梁相互作用对斜拉桥面内固有频率的影响
Tab.5 Effects of cable-deck interaction on the in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

阶数	面内固有频率	
	有索力	无索力
1	0.174 8	0.273 3
2	0.346 6	0.466 4
3	0.840 3	1.042 5
4	1.390 1	1.413 2
5	2.214 9	2.325 7
6	2.655 5	2.867 6
7	3.152 2	3.151 0
8	3.295 9	3.465 6
9	3.992 6	4.119 6
10	4.751 8	4.832 8
11	5.551 7	5.602 1
12	6.282 7	6.284 1
13	6.395 2	6.427 4
14	7.291 9	7.311 9
15	8.229 2	8.252 4
16	9.213 3	9.249 0
17	9.425 7	9.426 6
18	9.435 1	9.432 8
19	10.053 7	10.015 2
20	10.366 2	10.301 7
21	10.681 7	10.681 7
22	10.994 1	10.996 2
23	11.309 7	11.310 8
24	11.625 2	11.625 3

4.5 结构体系的影响

根据主塔、主梁和桥墩的连接方式, 通常将斜拉桥分为漂浮体系、半漂浮体系和刚构体系. 与漂浮体系不同, 半漂浮体系塔梁连接点的力学(几何)条件为:

$$\left[\alpha_k \eta_{pk}^j K_{pk}^j v_{pj}''' + (N_{pk}^j + \alpha_k \kappa_{pk}^j e_{pk}^j(t)) v_{pj}' \right] \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} - (N_{dk} + E_{dk} A_{dk} \varepsilon_{dk}) (1 + u_d') \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = 0,$$

$$\mathbf{u}_d \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = \mathbf{R} \left(\frac{\pi}{2} \right) \mathbf{u}_{pj} \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+}$$

对于刚构体系, 则有:

$$E_d I_{dy} v_d'' \Big|_{x_d = x_{dk}^+} - E_{pj} I_{py} v_{pj}'' \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+} = 0, \mathbf{u}_d' \Big|_{x_d = x_{dk}^+} = \mathbf{u}_{pj}' \Big|_{x_{pj} = x_{pk}^+}.$$

显然, 这 3 种体系在刚度上有较明显的差别. 接下来, 分析不同结构体系对斜拉桥固有频率的影响.

表 6 给出了结构体系对斜拉桥的面内非局部模态固有频率的影响. 总体而言, 由于斜拉桥约束的变

化,刚度明显不同.由表6可知,不同的结构体系固有频率有一定的差别.实际上,对于同一阶模态而言,刚构体系的固有频率最大,漂浮体系的固有频率最小.但是,对于某些非局部模态,塔梁固结时固有频率并没有明显改变,因此半漂浮体系和刚构体系的固有频率差别可以忽略.

表6 结构体系对斜拉桥面内固有频率的影响

Tab.6 The influence of structural systems on the in-plane natural frequencies of the cable-stayed bridge

阶数	面内固有频率		
	漂浮体系	半漂浮体系	刚构体系
1	0.174 8	0.182 4	0.184 3
2	0.346 6	0.394 8	0.401 4
3	0.840 3	0.916 4	0.918 2
4	1.390 1	1.647 3	1.668 6
5	3.295 9	3.384 0	3.398 2
6	3.992 6	4.343 1	4.399 9
7	4.751 8	4.884 6	4.897 4
8	5.551 7	5.636 1	5.671 5
9	10.366 2	10.996 0	10.994 5
10	11.309 7	11.623 8	11.622 4
11	11.937 7	12.251 7	12.253 5
12	14.137 1	14.450 6	14.449 8
13	14.527 0	14.766 1	14.765 4
14	15.080 7	15.393 9	15.393 4
15	16.021 1	16.321 7	16.321 3
16	16.336 6	16.617 2	16.616 9
17	16.649 1	16.909 5	16.909 3
18	16.964 6	17.205 0	17.204 8
19	17.280 2	17.497 4	17.497 3
20	17.592 6	17.792 8	17.792 8
21	17.908 1	18.088 3	18.088 4
22	18.220 6	18.380 7	18.380 8
23	18.536 1	18.676 1	18.676 3
24	18.848 5	18.848 5	18.848 7

5 结论

本文利用Hamilton变分原理推导了斜拉桥的面内运动方程,同时利用虚位移之间的几何关系将分部积分项转化为相应的力学条件.利用分离变量法对斜拉桥的无量纲线性化模型开展特征值分析,并得到了相应的频率方程.然后利用数值算例分析了斜拉桥的固有频率和固有模态,同时引入局部化因子定量地反映了结构的模态特征.结果表明,斜拉桥的固有模态可能呈现局部、全局和混合特性.最后讨

论了结构参数、索梁相互作用和结构体系对斜拉桥固有频率的影响.

总体而言,本文主要关注斜拉桥面内振动的理论研究,相关结果对工程具有指导意义.首先,斜拉桥的纯索频率为索力测试提供理论依据;其次,从理论的角度揭示了斜拉桥的固有频率谱.此外,对于千米级的密索体系而言,可以为抗震分析中固有模态的选取提供理论基础;最后,为分析桥梁工程中索梁相互作用提供了方法.

参考文献

- [1] 康厚军,韩艳,徐军. 桥梁工程中动力学与控制研究进展[J]. 动力学与控制学报,2023,21(4):1-6.
KANG H J, HAN Y, XU J. Advances on dynamics and control in bridge engineering [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(4): 1-6. (in Chinese)
- [2] 陈常松,田仲初,郑万泔,等. 大跨度混凝土斜拉桥模态试验技术研究[J]. 土木工程学报,2005,38(10):72-75.
CHEN C S, TIAN Z C, ZHENG W G, et al. A study on the modal experiment technique of long-span cable-stayed bridges [J]. China Civil Engineering Journal, 2005, 38(10): 72-75. (in Chinese)
- [3] WILSON J C, GRAVELLE W. Modelling of a cable-stayed bridge for dynamic analysis [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1991, 20(8):707-721.
- [4] 梅葵花,吕志涛. CFRP索斜拉桥的动力特性分析[J]. 公路,2006,51(11):48-53.
MEI K H, LÜ Z T. Dynamic characteristics analysis of cable-stayed bridge with CFRP cables [J]. Highway, 2006, 51(11): 48-53. (in Chinese)
- [5] 向桂兵,胡腾飞,华旭刚. 超长并列斜拉索尾流驰振及其控制风洞试验研究[J]. 动力学与控制学报,2023,21(5):69-75.
XIANG G B, HU T F, HUA X G. Investigation on wake galloping and its control of super long parallel stay cables by wind tunnel test [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(5): 69-75. (in Chinese)
- [6] 夏超,回忆,李珂. 单侧主缆刚度损伤悬索桥的模态分析及1:1共振[J]. 动力学与控制学报,2023,21(2):66-74.
XIA C, HUI Y, LI K. Study on modal analysis and 1:1 internal resonance of suspension bridge with unilateral main cable stiffness damage [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(2): 66-74. (in Chinese)
- [7] 孙测世,赵冰,康厚军,等. 斜拉桥的多重内共振及其耦合过程研究[J]. 振动与冲击,2018,37(10):87-93.
SUN C S, ZHAO Y B, KANG H J, et al. Multiple internal resonances and coupling process of cable-stayed bridge [J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(10): 87-93. (in Chinese)
- [8] BROWNJOHN J M W, LEE J, CHEONG B. Dynamic performance

- of a curved cable-stayed bridge[J]. *Engineering Structures*, 1999, 21(11): 1015-1027.
- [9] 谭长建, 祝兵. 大跨度斜拉桥索与桥面耦合振动分析[J]. *西南交通大学学报*, 2007, 42(6): 726-731.
TAN C J, ZHU B. Coupled vibration analysis of bridge deck and cable of long-span cable-stayed bridge[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2007, 42(6): 726-731. (in Chinese)
- [10] TULADHAR R, DILGER W H, ELBADRY M M. Influence of cable vibration on seismic response of cable-stayed bridges [J]. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 1995, 22(5): 1001-1020.
- [11] AU F T K, CHENG Y S, CHEUNG Y K, et al. On the determination of natural frequencies and mode shapes of cable-stayed bridges [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, 25(12): 1099-1115.
- [12] 张妍, 王怀磊, 杨杰. 斜拉桥索-面-塔三自由度非线性振动模型及其 1:2:1 内共振分析[J]. *动力学与控制学报*, 2010, 8(1): 62-66.
ZHANG Y, WANG H L, YANG J. Dynamics of a three degrees of freedom nonlinear vibration model of cables and bridge decks and towers with the frequency 1:2:1 internal resonance[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2010, 8(1): 62-66. (in Chinese)
- [13] GATTULLI V, LEPIDI M. Localization and veering in the dynamics of cable-stayed bridges [J]. *Computers & Structures*, 2007, 85(21/22): 1661-1678.
- [14] 苏潇阳, 康厚军, 皮梓豪, 等. 斜拉桥多索-浅拱-弹性约束模型及面内自由振动[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2021, 48(7): 138-144.
SU X Y, KANG H J, PI Z H, et al. Elastically constrained multi-cable-stayed shallow-arch model in cable-stayed bridge and its in-plane free vibration research[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2021, 48(7): 138-144. (in Chinese)
- [15] 康厚军, 解维东, 郭铁丁. CFRP索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2016, 43(9): 18-25.
KANG H J, XIE W D, GUO T D. Modeling and parameters analysis on in-plane free vibration of cable-stayed beam [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2016, 43(9): 18-25. (in Chinese)
- [16] 陈柯帆, 李源, 贺拴海, 等. 斜拉桥面内竖向固有振动模型及特性影响的有限差分分析[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2023, 50(7): 33-43.
CHEN K F, LI Y, HE S H, et al. Influence analysis on In-plane vertical natural vibration model of cable-stayed bridges based on finite difference method[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2023, 50(7): 33-43. (in Chinese)
- [17] KANG H J, CONG Y Y, YAN G R. Theoretical analysis of dynamic behaviors of cable-stayed bridges excited by two harmonic forces [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 102(2): 965-992.
- [18] 苏潇阳, 朱国敬, 康厚军. 具有弹性转动约束的斜拉桥多索-浅拱模型及其面内自由振动分析[J]. *地震工程与工程振动*, 2021, 41(3): 75-85.
SU X Y, ZHU G J, KANG H J. Multi-cable-stayed shallow-arch model of cable-stayed bridge with elastic rotation constraints and its in-plane free vibration analysis [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2021, 41(3): 75-85. (in Chinese)
- [19] YI Z P, PAN Q, YAN D H, et al. Analytically measure the vibratory characteristics of the cable-stayed bridge during dual-cantilever erection [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2022, 28(23/24): 3622-3637.
- [20] CAO D Q, SONG M T, ZHU W D, et al. Modeling and analysis of the in-plane vibration of a complex cable-stayed bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(26): 5685-5714.
- [21] 苏潇阳, 康厚军, 丛云跃. 混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论[J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 26-32.
SU X Y, KANG H J, CONG Y Y. Dynamic theory for evaluation on vertical bending stiffness of multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 26-32. (in Chinese)
- [22] 丛云跃, 康厚军, 郭铁丁, 等. 工程结构多刚度尺度分析与模态理论[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(4): 15-22.
CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. Multiple scale analysis and modal theory of engineering structures [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 15-22. (in Chinese)
- [23] 王志攀. 多索-单梁耦合结构的动力学建模及非线性特性研究[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(4): 41-47.
WANG Z Q. Study on dynamic characteristics and nonlinear characteristics of multi-cable single beam coupled structures [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(4): 41-47. (in Chinese)