

基于变时域策略的线性系统事件触发预测控制

贺宁,冯小菲,杜嘉伟[†]

(西安建筑科技大学机电工程学院,陕西西安710055)

摘要:针对具有加性扰动的约束连续线性时不变系统,提出一种基于变时域策略的线性系统事件触发模型预测控制方案.首先,基于最优状态轨迹与实际状态轨迹之间的偏差设计无Zeno行为的事件触发机制,以减少求解优化问题的频率.其次,为了降低实际状态趋近终端集时求解优化问题的计算复杂度,设计一种更为高效的指数收缩形式的自适应预测时域更新机制.再次,基于双模控制策略,提出自适应事件触发模型预测控制算法,并给出了保证算法可行性和闭环系统稳定性的充分条件.最后,基于质量-弹簧-阻尼系统验证了所提算法的有效性.结果表明本文方案能够在不损失控制性能的前提下有效降低系统资源消耗和求解优化问题的计算复杂度.

关键词:线性系统;模型预测控制;事件触发;自适应预测时域

中图分类号:TP273

文献标志码:A

Event-triggered Predictive Control for Linear Systems Based on Variable Horizon Strategy

HE Ning, FENG Xiaofei, DU Jiawei[†]

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In this paper, an event-triggered model predictive control scheme based on a variable horizon strategy is proposed for constrained continuous linear time-invariant systems with additive disturbances. Firstly, an event-triggered mechanism without Zeno behavior is designed based on the deviation between the optimal state trajectory and the actual state trajectory to reduce the frequency of solving optimization problem. Next, in order to reduce the computational complexity of solving optimization problem when the actual state approaches the terminal set, a more efficient adaptive prediction horizon update mechanism in the form of exponential shrinkage is designed. Then, based on the dual-mode control strategy, an adaptive event-triggered model predictive control algorithm is proposed, and sufficient conditions are provided to ensure the feasibility of the algorithm and the stability of the closed-loop system. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is verified based on a mass-spring-damper system, and the results show that the proposed scheme can effectively reduce system resource consumption and computational complexity for solving optimization problem without losing control performance.

* 收稿日期:2023-08-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61903291), National Natural Science Foundation of China(61903291);国家重点研发计划资助项目(2022YFC3802702), National Key Research and Development Program of China(2022YFC3802702);陕西省重点研发计划资助项目(2022NY-094), Key Research and Development Program of Shaanxi Province(2022NY-094)

作者简介:贺宁(1989—),男,陕西西安人,西安建筑科技大学教授,博士

[†] 通信联系人, E-mail: jiaweidu@xauat.edu.cn

Key words: linear systems; model predictive control; event-triggered; adaptive prediction horizon

模型预测控制(model predictive control, MPC)作为一种滚动优化求最优解的方法,由于其能有效处理时域复杂约束以及多目标优化问题,因而在工业控制系统等领域应用越来越广泛^[1-3]. 基于MPC的理论研究成果在不断产出,李志军^[4]、何德峰等^[5]通过充分利用控制输入的约束范围,从而减少控制行为的保守性,提升了算法执行效率,提高了系统的控制性能. 杨世忠等^[6]、Vozák等^[7]和蔡宏斌^[8]提出了鲁棒模型预测控制器的设计方法,其具有极强的处理不确定性和外部干扰的能力,使得在与现有方法有相同初始可行域的前提下,只需确保优化问题初始可行就能够保证闭环系统实现稳定. 近年来,MPC已经在众多领域中得到应用,如飞行控制^[9]、污水处理^[10]、列车自动驾驶^[11]、建筑节能^[12]等. 然而,传统的MPC由于在每个采样时刻都需要在线求解相同时域的优化问题,对于采样间隔较小以及资源有限的实际系统,会导致计算和通信资源的过度消耗.

事件触发控制作为一种有效且研究充分的非周期采样控制策略^[13-15],其核心思想是预先设计一种事件触发机制(event-triggered mechanism, ETM)并设定触发阈值,从而达到减少资源消耗并确保满意的系统控制性能的目的. 相比于时间触发控制,事件触发控制可以通过使用更小的平均采样率以获得更好的控制性能^[16]. 因此将ETM与MPC相结合可以显著降低系统通信和计算负载.

在此背景下,事件触发MPC(event-triggered MPC, ET-MPC)得到了广泛的关注和研究,并取得了突出的成果^[17-21]. 目前,针对该方向的研究主要包括连续系统和离散系统,对于连续系统,Li等^[17]研究了连续时间非线性系统的鲁棒MPC问题,设计了一种基于事件触发方案的MPC算法,有效减少了系统优化问题的在线求解次数,降低了在线计算量. Liu等^[18]针对具有有界扰动的约束连续时间非线性系统,通过考虑系统的真实状态与其最优预测状态之间的误差来设计触发机制,同时在优化问题中引入时变收紧状态约束,以满足鲁棒约束. Luo等^[19]研究了具有输入约束和有界干扰的线性时不变(linear time-invariant, LTI)系统的ET-MPC,通过实际计算与最优状态轨迹之间的偏差来设计ETM以减少计算

负载. 对于离散系统,Hu等^[20]研究了受有界扰动的离散线性时不变系统的鲁棒ET-MPC,基于线性矩阵不等式,通过计算实际状态轨迹与最优状态轨迹之间的偏差来设计ETM以减少计算负载. Deng等^[21]研究了具有有界扰动的线性离散时间系统的事件触发鲁棒MPC问题,提出了一种随机触发机制,考虑了基于管的MPC和基于线性矩阵不等式的MPC,与所设计的随机触发机制具有互补的优点.

通过对以上众多研究的总结,可以得出结论,现有的ET-MPC策略通过设计合理有效的ETM可以在保证系统控制性能的同时有效减少通信和计算资源的过度使用,但仍然无法有效降低求解优化问题的计算复杂度. 具体来说,在标准ET-MPC框架中通常预先选择固定的预测时域,由此使得优化问题在每个触发时刻具有几乎相同的计算复杂度,即使当系统状态逐渐接近或已经到达终端区域,也仍要求解计算复杂度高的优化问题. 在此背景下,基于自适应预测时域的ET-MPC得到了进一步的研究. 苑守正等^[22]基于ETM和MPC,设计了一种船舶自动靠泊控制器,为了提高求解速度,提出了一种基于事件触发的自适应时域MPC方案,并进行了稳定性分析. Cao等^[23]设计了一种预测时域收缩策略,随着实际状态接近终端集,求解最优控制问题的计算复杂度逐渐降低. Wang等^[24]提出了一种自适应预测时域更新策略,其中预测时域随着状态进入终端集而逐渐减小,从而有效地降低了触发时刻求解优化问题的计算复杂度. 因此,研究设计更高效的预测时域收缩策略以更有效地降低MPC控制器求解优化问题的计算复杂度是非常必要的,特别是对于当前实际应用中广泛关注和研究的连续时间线性系统.

基于以上论述,本文针对具有输入约束和有界扰动的连续LTI系统,基于自适应预测时域收缩机制和双模控制策略提出一种新的ET-MPC算法,通过设计事件触发机制,在保证递归可行性和稳定性的同时,降低优化问题的计算频率和求解复杂性. 本文主要贡献阐述如下:

1) 针对受扰线性系统,建立有限时域约束优化问题,采用鲁棒性约束以处理系统加性扰动;基于实际状态和最优状态之间的误差设计事件触发机制,

并给出保证无 Zeno 行为的条件;设计一种更为高效的指数形式预测时域收缩机制,其具有更大的收缩范围,使得系统状态在接近终端区域过程中预测时域得到更高效的收缩,有效降低在触发时刻求解优化问题的计算复杂度.

2) 基于双模控制思想,提出自适应事件触发鲁棒 MPC 算法,进一步降低系统的计算和通信资源消耗.此外,通过严格的理论分析,给出保证所提算法可行性和闭环系统稳定性的充分条件.

1 问题描述

1.1 系统定义

本文考虑如下具有加性扰动和约束的连续 LTI 系统,其系统动力学模型为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, t_0 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, 满足 $\mathbf{u}(t) \in U$; $\mathbf{w}(t) \in W \in \mathbb{R}^l$ 表示以 $\eta = \sup_{\mathbf{w}(t) \in W} \|\mathbf{w}(t)\|$ 为上界的加性扰动; \mathbb{R} 表示实数集. 此外, 状态和控制输入可行域被定义为包含原点为内点的凸紧集. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 和 $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ 为时不变矩阵.

为本文所研究的系统提供一个常规假设和一个标准定义如下:

假设 1^[25]: 对系统(1)的标称模型 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, 存在一个状态反馈增益 \mathbf{K} , 使得 $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 是 Hurwitz 矩阵.

定义 1^[26]: 如果对所有 $\mathbf{x}(t_0) \in \Omega$, 存在 $\mathbf{u}(t) \in U$ 使得 $\mathbf{x}(t) \in \Omega, t \geq t_0$, 那么 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 是系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ 的一个控制不变集.

基于此, 有如下标准引理.

引理 1^[25]: 若假设 1 成立, 给定两个对称正定矩阵 $\mathbf{Q} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{R} > \mathbf{0}$, 存在一个状态反馈增益矩阵 \mathbf{K} , 一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得:

1) Lyapunov 方程 $\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \leq \mathbf{0}$ 有唯一对称正定解 $\mathbf{P} > \mathbf{0}$.

2) 集合 $\Omega(r) \triangleq \{\mathbf{x}(t): \|\mathbf{x}(t)\| \leq r\}$ 是一个控制不变集, 对于系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$, 满足 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

3) $\forall \mathbf{x}(t) \in \Omega(r)$, 满足 $\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \in U$ 和 $\dot{g}(\mathbf{x}(t)) \leq -\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2$, 其中 $g(\mathbf{x}(t)) = \|\mathbf{x}(t)\|_P^2$ 和 $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}$.

对于状态和控制变量, 由优化问题求解得到的变量表示为 $()^*$, 提供可行解并满足所有约束条件的变量表示为 $()^\circ$. 给定一个矩阵 \mathbf{P} , $\bar{\lambda}(\mathbf{P})$ 和 $\underline{\lambda}(\mathbf{P})$ 分别表示其最大特征值和最小特征值. 对于一个向量 \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 表示其 2-范数, $\|\mathbf{x}\|_P = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}$ 表示其 \mathbf{P} 加权范数.

1.2 有限时域约束优化问题

对于系统(1), 定义时间序列 $\{t_k\}, k \in \mathbb{N}$ 作为触发条件被违反的时刻 (\mathbb{N} 表示自然数集), 即优化问题被求解的时刻. 在 t_k 时刻, $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k)$ 和 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k)$ 分别被定义为预测输入轨迹和预测状态轨迹, 其满足标称系统 $\dot{\mathbf{x}}(\tau|t_k) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k), \tau \in [t_k, t_k + T_k]$. 需要求解的有限时域约束优化问题如下:

$$\mathbf{u}^*(\tau|t_k) = \min_{\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k) \in U} J(\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k), \bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k)) \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau|t_k) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k) \\ \bar{\mathbf{x}}(t_k|t_k) = \mathbf{x}(t_k), \|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_k)\| \in \Omega(\varepsilon) \\ \|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k)\| \leq \frac{T_k \varepsilon}{\tau - t_k}, \tau \in (t_k, t_k + T_k] \\ \bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k) \in U, \tau \in [t_k, t_k + T_k] \end{cases}$$

式中: $J(\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k), \bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k))$ 表示优化问题的代价函数; $\Omega(\varepsilon) = \{\mathbf{x} | \|\mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon\}$ 被定义为鲁棒终端集; ε 是一个可设计的常数且 $\varepsilon < r$; T_k 表示 t_k 时刻所求解的优化问题的预测时域, 在控制过程中根据所设计的收缩机制进行自适应调整, 相应的更新机制后续将介绍. 通过求解优化问题, 可以得到最优预测输入 $\mathbf{u}^*(\tau|t_k)$ 和相应的最优状态 $\mathbf{x}^*(\tau|t_k)$. 代价函数为:

$$J(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \int_{t_k}^{t_k + T_k} L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) d\tau + g(\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_k)) \quad (3)$$

式中: $L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_k)\|_R^2$ 表示运行代价函数; $g(\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_k)) = \|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_k)\|_P^2$ 表示终端代价函数; \mathbf{Q} 、 \mathbf{R} 和 \mathbf{P} 是权重矩阵, 可根据引理 1 设计.

2 自适应事件触发 MPC 策略

基于系统(1)和所建立的有限时域约束优化问题(2), 本节设计事件触发机制和自适应预测时域更新机制来分别降低求解优化问题过程中的资源消耗和计算复杂度.

2.1 事件触发机制

在实际控制过程中, 由于系统受到加性扰动, 因此求解优化问题应用最优预测输入所获得的最优状

态 $\mathbf{x}^*(\tau|t_k)$ 与系统实际状态 $\mathbf{x}(\tau|t_k)$ 之间必然存在差异. 事件触发机制的关键是预先设定一个阈值作为系统最优状态和实际状态之差的上界, 以判断何时进行触发采样和重新求解优化问题. 基于此, 本文考虑的事件触发条件为:

$$\bar{t}_{k+1} \triangleq \inf_{\tau > t_k} \{ \tau : \|\mathbf{x}(\tau|t_k) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| = \sigma \} \quad (4)$$

式中: $\sigma = m(e^{a\beta T_k} - 1)$ 是触发阈值, 满足 $m = \eta\|E\|/\|A\|$ 和 $a = \|A\|$. 基于 t_k 和 \bar{t}_{k+1} 时刻, 下一触发时刻 t_{k+1} 可以表示为:

$$t_{k+1} = \min\{\bar{t}_{k+1}, t_k + T_k\} \quad (5)$$

注意, Zeno 行为是事件触发控制系统中特有的一种动态现象, 为避免所设计的事件触发机制可能存在 Zeno 行为^[27], 即在有限时间间隔内控制器被无限次触发, 需要对事件间隔时间进行分析, 以确保两个连续触发时刻的触发间隔存在一个正的下界, 即 $t_{k+1} - t_k > 0$. 这一结果在定理 1 中给出.

定理 1: 对于系统 (1), 如果事件触发时间序列 $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ 通过式 (5) 获得, 并且触发阈值满足 $\sigma = m(e^{a\beta T_k} - 1)$, $\beta \in (0, 1)$ 是可设计的常数, 那么任意两个连续触发时刻的触发间隔的下界为 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{t_{k+1} - t_k\} = \beta T_k$, 上界为 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \{t_{k+1} - t_k\} = T_k$.

证明: 首先, 触发间隔的上界可以直接由式 (5) 得到, 因为 T_k 是优化问题 (2) 的预测时域, 所以两个连续触发时刻的触发间隔不会大于 T_k .

然后, 为证明触发间隔的下界, 需考虑 t_k 时刻 $\|\mathbf{x}(\tau|t_k) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|$ 的上界. 根据线性定常方程的解、矩阵不等式和实际状态 $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}^*(t_k|t_k)$, 可得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| &= \|\mathbf{e}^{A(\tau-t_k)}\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{e}^{A(\tau-t_k)}\mathbf{x}^*(t_k|t_k) + \\ &\quad \int_{t_k}^{\tau} \mathbf{e}^{A(\tau-s)}[\mathbf{B}\mathbf{u}^*(s) + \mathbf{E}\mathbf{w}(s)]\mathrm{d}s - \int_{t_k}^{\tau} \mathbf{e}^{A(\tau-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}^*(s)\mathrm{d}s\| = \\ &\quad \left\| \int_{t_k}^{\tau} \mathbf{e}^{A(\tau-s)}\mathbf{E}\mathbf{w}(s)\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{t_k}^{\tau} \mathbf{e}^{\|A\|(\tau-s)}\|E\|\eta\mathrm{d}s = \\ &\quad \frac{\eta\|E\|}{\|A\|} \mathbf{e}^{\|A\|(\tau-t_k)} - \frac{\eta\|E\|}{\|A\|} = m[e^{a(\tau-t_k)} - 1] \end{aligned}$$

式中: $\tau \in [t_k, t_k + T_k]$. 基于式 (4), 可有 $\bar{t}_{k+1} \geq t_k + \beta T_k$, 由式 (5) 可知 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{t_{k+1} - t_k\} = \beta T_k$, 即任意两个连续触发时刻的触发间隔的下界为 βT_k .

结合以上两部分, 完成了对定理 1 的证明.

2.2 自适应预测时域收缩机制

为确保优化问题可解, 当系统状态远离终端域

时, 可设置较大的预测时域; 而当系统状态接近终端域时, 可以适当缩小预测时域. 基于此, 在控制策略中引入预测时域更新策略可以有效降低求解优化问题的计算复杂度, 节省计算时间. 本文设计了一种新的自适应预测时域收缩机制, 具体形式如下:

$$T_{k+1} = T_k - e^{\mu_k(T_k - T_k^*)} \quad (6)$$

式中: T_k^* 为到达鲁棒终端集边界的时间间隔, 通过求解优化问题 (2) 获得; $T_k > 0$ 为当前时刻预测时域; $\mu_k > 0$ 为预测时域收缩系数, 通过后续可行性和稳定性分析得出选择条件. 本文所设计的更新策略的收缩项是指数形式的, 这与传统收缩形式^[22-24]相比具有更大的收缩范围, 从而在降低求解优化问题计算复杂度方面具有更突出的效果. 此外, 从式 (6) 可看出, 预测时域是严格单调递减的.

2.3 自适应事件触发鲁棒 MPC 算法

为进一步减少求解优化问题的次数, 缓解控制器的在线计算负担, 本文基于双模控制策略, 在终端域内外采用不同的控制模式, 即当系统状态在终端域外时, 通过求解优化问题 (2) 获得最优控制序列并应用到系统; 当系统状态进入终端域时, 将不再进行优化问题的求解, 而是采用本地局部控制器. 由此, 本文所建立的自适应事件触发鲁棒 MPC 算法如算法 1 所示.

算法 1: 自适应事件触发鲁棒 MPC 算法

```

1:   while  $\mathbf{x}(t) \notin \Omega(\mathcal{E})$  do
2:       if  $k = 0$  或触发条件 (4) 满足 then
3:           求解优化问题 (2) 获得  $\mathbf{u}^*(\tau|t_k)$ ,  $\mathbf{x}^*(\tau|t_k)$  和  $T_k^*$ ;
4:           根据收缩机制 (6) 求解  $T_k$ ;
5:       end if
6:       while 触发条件 (4) 未满足 do
7:           应用控制输入  $\mathbf{u}^*(\tau|t_k)$ ;
8:       end while
9:        $k = k + 1$ ;
10:    end while
11:    应用局部控制律  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 

```

自适应事件触发鲁棒 MPC 算法中自适应性主要体现在预测时域自适应收缩方面. 具体地, 在传统 ET-MPC 策略中, 预测时域 T_k 取固定值, 而算法 1 中当所设计的触发条件满足时, 预测时域 T_k 在触发时刻是基于所设计的自适应预测时域收缩机制变化的.

3 理论结果

3.1 可行性分析

由于优化问题需要被反复求解,保证其可行性是保证系统稳定运行的必要条件,然而由于事件触发机制的引入和系统干扰的存在可能导致算法1在采样时刻 $t_k, k \in \mathbb{N}$ 处不可行,因此,需要通过设计系统相关参数来保证算法的迭代可行性.接下来的定理给出了可行性分析的理论结果.

假设 2^[25]: 优化问题(2)在初始时刻 t_0 处有可行解 $\mathbf{u}^*(\tau|t_0)$.

定理 2: 对于假设1、假设2成立的系统(1),如果系统参数满足下列条件,则算法1迭代可行.

$$\eta \leq \frac{a(r - \varepsilon)}{\|E\| (e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)}), a = \|A\| \quad (7)$$

$$\mu_k \leq \frac{\ln \left[\beta T_k + \frac{2\bar{\lambda}(P)}{\lambda(Q^*)} \ln \left(\frac{\varepsilon}{r} \right) \right]}{T_k - T_k^*}, Q^* = Q + K^T R K \quad (8)$$

$$\zeta r \leq \varepsilon \leq r \quad (9)$$

式中: $\zeta = \max \left\{ 1 - \beta, \frac{2\bar{\lambda}(P)}{T_k \lambda(Q^*)} \right\}, \frac{2\bar{\lambda}(P)}{T_k \lambda(Q^*)} < 1$.

证明: 假设在采样时刻 t_k 处存在最优解,通过求解优化问题可以得到最优控制序列 $\mathbf{u}^*(\tau|t_k)$, $\tau \in [t_k, t_k + T_k]$. 为了证明在 t_{k+1} 时刻存在可行解,一个可行的候选控制序列 $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1})$, $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T_{k+1}]$ 被构造如下:

$$\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1}) = \begin{cases} \mathbf{u}^*(\tau|t_k), & \tau \in [t_{k+1}, t_k + T_k] \\ K\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1}), & \tau \in [t_k + T_k, t_{k+1} + T_{k+1}] \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$ 是相应的可行候选状态,满足 $\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_{k+1})$. 为了证明算法1满足递归可行性,需要证明当 $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T_{k+1}]$ 时,优化问题(2)中的约束可以被同时满足,即 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\| \in \Omega(\varepsilon)$, $\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_{k+1})$ 和 $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1}) \in U$.

1) 证明对于 $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 状态轨迹 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$ 在 $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1})$ 控制下进入鲁棒终端集 $\Omega(\varepsilon)$.

对于 $\tau \in [t_{k+1}, t_k + T_k]$, t_{k+1} 时刻的可行状态轨迹 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$ 与 t_k 时刻的最优状态轨迹 $\mathbf{x}^*(\tau|t_k)$ 之差计算如下:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| \leq$$

$$\|\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(t_{k+1}|t_k)\| e^{\|A\|(\tau - t_{k+1})}$$

基于触发条件(4)可知,在 t_{k+1} 时刻有 $\|\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(t_{k+1}|t_k)\| = \sigma$. 因此,可得:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| \leq \sigma e^{\|A\|(\tau - t_{k+1})} \quad (11)$$

然后,令 $\tau = t_k + T_k$,将 $\sigma = m(e^{a\beta T_k} - 1)$ 代入式(11),通过应用三角不等式可以得到:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| \leq \|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\| + m(e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)}) \quad (12)$$

根据鲁棒终端集 $\Omega(\varepsilon)$ 的定义可知最优状态轨迹满足 $\|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\| \leq \varepsilon$. 由此,基于可行性条件(7),计算式(12)可得:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| \leq \varepsilon + m(e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)}) \leq \varepsilon + r - \varepsilon = r \quad (13)$$

即有 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| \in \Omega(r)$.

对于 $\tau \in [t_k + T_k, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 状态轨迹 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$ 在 $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1})$ 控制下进入鲁棒终端集 $\Omega(\varepsilon)$.

根据引理1可知,终端代价函数满足 $\dot{g}[\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})] \leq -\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\|_{Q^*}^2$, $Q^* = Q + K^T R K$. 通过应用比较原则可得:

$$g[\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})] \leq g[\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})] e^{-\frac{\lambda(Q^*)}{\lambda(P)}(\tau - t_k - T_k)} \quad (14)$$

将状态约束 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| \leq r$ 和 $\tau = t_{k+1} + T_{k+1}$ 代入式(14)可得:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\| \leq r e^{-\frac{\lambda(Q^*)}{2\lambda(P)}(t_{k+1} - t_k + T_{k+1} - T_k)} = r e^{-\frac{\lambda(Q^*)}{2\lambda(P)}(t_{k+1} - t_k - e^{\mu_k(T_k - T_k^*)})} \quad (15)$$

基于可行性条件(8),将其代入式(15),可得 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\| \leq \varepsilon$, 即 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\| \in \Omega(\varepsilon)$, 因此鲁棒终端约束满足.

2) 证明可行候选状态 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$ 满足鲁棒性约束 $\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_{k+1})$, $\tau \in (t_{k+1}, t_{k+1} + T_{k+1}]$.

首先,对于 $\tau \in [t_{k+1}, t_k + T_k]$,基于优化问题(2)可知,最优状态轨迹满足 $\|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_k)$, 将其代入式(13)可得: $\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_k) + r - \varepsilon$. 为了证明可行状态轨迹在 t_{k+1} 时刻满足约束 $\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_{k+1})$, $\tau \in (t_{k+1}, t_k + T_k]$, 这可以通过证明不等式 $T_k \varepsilon / (\tau - t_k) + r - \varepsilon \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_{k+1})$ 成立,从而得到上述结论. 由此可得:

$$\varepsilon \frac{T_k(t_{k+1} - t_k)}{(\tau - t_{k+1})(\tau - t_k)} \geq r - \varepsilon$$

通过考虑 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{t_{k+1} - t_k\} = \beta T_k$, 则有:

$$\varepsilon \frac{T_k(t_{k+1} - t_k)}{(\tau - t_{k+1})(\tau - t_k)} \geq \varepsilon \frac{T_k(t_{k+1} - t_k)}{T_k(T_k - \beta T_k)} \geq \varepsilon \frac{\beta}{1 - \beta} \geq r - \varepsilon$$

由可行性条件(9)可知参数 ε 满足 $\zeta r \leq \varepsilon \leq r$, 其中 $\zeta = 1 - \beta$, 故不等式 $\|\bar{x}(\tau|t_{k+1})\| \leq T_k \varepsilon / (\tau - t_{k+1})$ 成立, 状态约束满足.

对于 $\tau \in [t_k + T_k, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 由式(14)可知:

$$\|\bar{x}(\tau|t_{k+1})\| \leq r e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}}$$

如果状态约束满足, 则要满足不等式

$$r e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}} \leq \frac{T_k \varepsilon}{\tau - t_{k+1}}$$

通过转化, 有

$$\frac{r(\tau - t_{k+1}) - e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}} \varepsilon T_k}{e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}} (\tau - t_{k+1})} \leq 0$$

显而易见其分母为正, 因此可定义:

$$F(\tau) = r(\tau - t_{k+1}) - e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}} \varepsilon T_k \quad (16)$$

将式(16)对 τ 求导, 可得:

$$\frac{dF}{d\tau} = r - \varepsilon T_k \frac{\lambda(Q^*)}{2\lambda(P)} e^{-\frac{\lambda(Q^*)\tau - t_k - T_k}{2}} \quad (17)$$

令 $\tau = t_k + T_k$, $\zeta = 1 - \beta$, 因为 $\zeta r \leq \varepsilon$, 容易得到 $F(t_k + T_k) = r(T_k + t_k - t_{k+1}) - \varepsilon T_k \leq 0$. 基于式(17), 可知 $F(\tau)$ 是一个单调递减函数. 如果 $\dot{F}(t_k + T_k) \leq 0$, 那么可得 $F(\tau) \leq 0$, 完成证明, 即

$$\dot{F}(\tau)_{\max} = \dot{F}(t_k + T_k) = r - \varepsilon T_k \frac{\lambda(Q^*)}{2\lambda(P)} \leq 0 \quad (18)$$

基于条件 $\varepsilon \geq \frac{2\lambda(P)}{T_k \lambda(Q^*)} r$ 且 $\frac{2\lambda(P)}{T_k \lambda(Q^*)} < 1$, 可以保

证式(18)成立, 即有 $F(\tau) \leq 0$, 故状态约束满足.

3) 对于 $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 证明控制输入满足 $\bar{u}(\tau|t_{k+1}) \in U$. 首先, 当 $\tau \in [t_{k+1}, t_k + T_k]$, $\bar{u}(\tau|t_{k+1}) \in U$ 成立. 其次, 当 $\tau \in [t_k + T_k, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 由引理1可知, $\bar{u}(\tau|t_{k+1}) = k\bar{x}(\tau|t_{k+1}) \in U$ 成立. 因此, 控制输入满足约束.

基于上述分析, 完成了对定理2递归可行性的证明.

3.2 稳定性分析

对于所提控制方案, 由于事件触发机制的引入

和外加扰动的存在, 闭环系统的稳定性可能会受到影响. 因此, 需要通过设计系统相关参数来保证闭环系统的稳定性.

定义2^[21,28]: 对于系统(1), 如果集合 Ω 满足对所有的 $x(t) \in \Omega$ 和 $u(t) \in U$ 均有 $\dot{x}(t) \in \Omega$, 则称 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为系统的时不变集.

定理3: 对于系统(1), 若假设1、假设2和定理1、定理2成立. 如果系统满足以下参数条件:

$$\mu_k \leq \frac{\ln f(T_k) - \ln a\Pi}{T_k - T_k^*} \quad (19)$$

那么闭环系统状态是稳定的并将收敛到时不变集 $\Omega(\gamma)$. 其中 $f(T_k) = \psi + \phi$, $\Pi = \sup \|Ax(t) + Bu(t)\|$; $\psi =$

$$\frac{\lambda(\sqrt{Q})^2 \beta T_k \varepsilon^2 - (r + \varepsilon) \bar{\lambda}(\sqrt{P})^2 m(e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)})}{2\bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 m(e^{a\beta T_k} - 1)/a^2};$$

$$\phi = (1 - e^{aT_k(1-\beta)})(ar + \Pi) - (\beta e^{aT_k(1-\beta)} - 1)a\Pi T_k.$$

证明: 基于代价函数的定义, 将最优代价函数 $J(x^*(t_k), u^*(t_k))$ 设定为 Lyapunov 函数, 通过证明其递减来保证系统稳定性. 由于 $\bar{u}(\tau|t_{k+1})$ 的次优性, 可知 $J(x^*(t_{k+1}), u^*(t_{k+1})) \leq J(\bar{x}(t_{k+1}), \bar{u}(t_{k+1}))$.

定义以下函数作为 Lyapunov 函数在 t_k 和 t_{k+1} 时刻处的差值:

$$\Delta J = J(\bar{x}(t_{k+1}), \bar{u}(t_{k+1})) - J(x^*(t_k), u^*(t_k)) \quad (20)$$

根据式(3), 有

$$\begin{aligned} \Delta J = & \int_{t_{k+1}}^{t_{k+1} + T_{k+1}} [\|\bar{x}(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 + \|\bar{u}(\tau|t_{k+1})\|_R^2] d\tau - \\ & \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\|x^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|u^*(\tau|t_k)\|_R^2] d\tau + \\ & \|\bar{x}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\|_P^2 - \|x^*(t_k + T_k|t_k)\|_P^2 \end{aligned}$$

为了便于分析, 定义 $\Delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 + \Delta J_3$,

其中:

$$\begin{aligned} \Delta J_1 = & \int_{t_{k+1}}^{t_{k+1} + T_{k+1}} [\|\bar{x}(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 - \|x^*(\tau|t_k)\|_Q^2] d\tau \\ \Delta J_2 = & \int_{t_k + T_k}^{t_{k+1} + T_{k+1}} [\|\bar{x}(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 + \|\bar{u}(\tau|t_{k+1})\|_R^2] d\tau + \\ & \|\bar{x}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\|_P^2 - \|x^*(t_k + T_k|t_k)\|_P^2 \\ \Delta J_3 = & - \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\|x^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|u^*(\tau|t_k)\|_R^2] d\tau \end{aligned}$$

通过以下两方面进行证明:

1) 当初始状态 $x(t_0) \notin \Omega(\varepsilon)$, 证明状态轨迹将在有限时间内进入 $\Omega(\varepsilon)$.

对于 ΔJ_1 , 应用三角不等式, 变换可得:

$$\Delta J_1 \leq \int_{t_{k+1}}^{t_k+T_k} \|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|_Q \times \left[\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\|_Q + \|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|_Q \right] d\tau \quad (21)$$

对于 $\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\|_Q + \|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|_Q$, 考虑 $\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k) - \mathbf{x}^*(\tau|t_k) = \int_{\tau}^{t_k+T_k} [\mathbf{A}\mathbf{x}^*(s|t_k) + \mathbf{B}\mathbf{u}^*(s|t_k)] ds$, 通过应用三角不等式可得:

$$\|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\| \leq \|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\| + \Pi(t_k + T_k - \tau) \quad (22)$$

其中 $\Pi = \sup_{u \in U} \|\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\|$. 同理, 对于 $\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$, 通过使用相同的推导方法可得:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\| \leq \|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\| + \Pi(t_{k+1} + T_{k+1} - \tau) \quad (23)$$

基于式(21), 结合式(11)、式(22)和式(23), 令 $s = \tau - t_{k+1}$, $s \in [0, (1 - \beta)T_k]$, 可以得到以下结果:

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &\leq \bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 \int_{t_{k+1}}^{t_k+T_k} \sigma e^{A(\tau-t_{k+1})} \times \\ &\quad [r + \Pi(t_{k+1} + T_{k+1} - \tau) + r + \\ &\quad \Pi(t_k + T_k - \tau)] d\tau \leq 2\bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 \times \\ &\quad \int_0^{(1-\beta)T_k} m(e^{a\beta T_k} - 1)e^{as} [\Pi(T_{k+1} - s) + r] ds = \\ &\quad \frac{2\bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 m(e^{a\beta T_k} - 1)}{a^2} \times \\ &\quad \{a\Pi[T_{k+1} - (1 - \beta)T_k]e^{aT_k(1-\beta)} - \\ &\quad a\Pi T_{k+1} + (ar + \Pi)(e^{aT_k(1-\beta)} - 1)\} \leq \\ &\quad \frac{2\bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 m(e^{a\beta T_k} - 1)}{a^2} [(e^{aT_k(1-\beta)} - 1) \times \\ &\quad (ar + \Pi) + (\beta e^{aT_k(1-\beta)} - 1)a\Pi T_k + a\Pi e^{\mu_k(T_k - T_k^*)}] \end{aligned} \quad (24)$$

对于 ΔJ_2 , 基于引理 1 和 $\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1}) = \mathbf{k}\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})$, $\tau \in [t_k + T_k, t_{k+1} + T_{k+1}]$, 可得:

$$\int_{t_k+T_k}^{t_{k+1}+T_{k+1}} (\|\bar{\mathbf{x}}(\tau|t_{k+1})\|_Q^2 + \|\bar{\mathbf{u}}(\tau|t_{k+1})\|_R^2) d\tau \leq \|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\|_p^2 - \|\bar{\mathbf{x}}(t_{k+1} + T_{k+1}|t_{k+1})\|_p^2 \quad (25)$$

将式(25)代入 ΔJ_2 可得:

$$\begin{aligned} \Delta J_2 &\leq \|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\|_p^2 - \|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\|_p^2 \leq \\ &\quad \bar{\lambda}(\sqrt{P})^2 \|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1}) - \mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\| \times \\ &\quad [\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| + \|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\|] \end{aligned} \quad (26)$$

在 $\tau = t_k + T_k$ 时刻, 通过考虑式(11)以及终端约束 $\|\bar{\mathbf{x}}(t_k + T_k|t_{k+1})\| \leq r$ 和 $\|\mathbf{x}^*(t_k + T_k|t_k)\| \leq \varepsilon$, 可得:

$$\begin{aligned} \Delta J_2 &\leq (r + \varepsilon)\bar{\lambda}(\sqrt{P})^2 \sigma e^{aT_k(1-\beta)} = \\ &\quad (r + \varepsilon)\bar{\lambda}(\sqrt{P})^2 m(e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)}) \end{aligned} \quad (27)$$

对于 ΔJ_3 , 由于最优状态轨迹满足约束 $\|\mathbf{x}^*(t_{k+1}|t_k)\| \leq T_k \varepsilon / (t_{k+1} - t_k)$ 且 $T_k \varepsilon / (t_{k+1} - t_k) \in [\varepsilon, \varepsilon/\beta]$, 因此有:

$$\begin{aligned} \Delta J_3 &= - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}^*(\tau|t_k)\|_R^2 \right\} d\tau \leq \\ &\quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathbf{x}^*(\tau|t_k)\|_Q^2 d\tau \leq -\underline{\lambda}(\sqrt{Q})^2 \beta T_k \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (28)$$

基于式(19), 结合 ΔJ_1 、 ΔJ_2 和 ΔJ_3 可得:

$$\begin{aligned} \Delta J &\leq \frac{2\bar{\lambda}(\sqrt{Q})^2 \cdot m(e^{a\beta T_k} - 1)}{a^2} [(e^{aT_k(1-\beta)} - 1) \times \\ &\quad (ar + \Pi) - \underline{\lambda}(\sqrt{Q})^2 \beta T_k \varepsilon^2 + (\beta e^{aT_k(1-\beta)} - 1) \times \\ &\quad a\Pi T_k + a\Pi e^{\mu_k(T_k - T_k^*)}] + (r + \varepsilon)\bar{\lambda}(\sqrt{P})^2 m \times \\ &\quad (e^{aT_k} - e^{aT_k(1-\beta)}) < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

因此, $J(\mathbf{x}^*(t_{k+1}), \mathbf{u}^*(t_{k+1})) - J(\mathbf{x}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k)) < 0$ 成立, 由此证明了闭环系统状态轨迹将在有限时间内进入鲁棒终端集 $\Omega(\varepsilon)$.

2) 当初始状态 $\mathbf{x}(t_0) \in \Omega(\varepsilon)$, 证明状态轨迹将收敛到不变集 $\Omega(\gamma)$.

当系统状态轨迹进入鲁棒终端集内时, 控制器将切换为本地控制器 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 系统在本地控制器控制下实现稳定, 并最终收敛到不变集 $\Omega(\gamma)$, 且始终保持在 $\Omega(\gamma)$ 内, $\Omega(\gamma) \in \Omega(\varepsilon)$. 值得注意的是, 采用参考文献[17-18, 24]中的证明方法可以得出上述结论.

基于以上理论分析, 完成了对定理 3 中闭环系统稳定性条件的证明.

4 仿真

本节基于质量-弹簧-阻尼系统^[17]来验证所提算法的有效性, 实际生活中如汽车减震装置中的缓冲器、建筑物抗震装置中的减震器等都可简化为该类型机械振动系统, 其动力学模型为:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_c} & -\frac{h_d}{M_c} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_c} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) \quad (30)$$

式中: \mathbf{w} 为系统加性扰动, 满足 $\|\mathbf{w}\| \leq \eta$; 系统质量 $M_c = 1.5 \text{ kg}$; 线性弹簧系数 $k = 0.25 \text{ N/m}$; 阻尼器系数

$h_d = 0.42 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. 系统初始状态设定为 $x_0 = [0.85, -0.25]^T$, 控制输入和状态分别满足 $-0.25 \leq u(t) \leq 0.25$ 和 $-1 \leq x(t) \leq 1$. 基于引理1, 选择优化问题中的权重矩阵为 $Q = [1.0 \ 0; 0 \ 1.0]$ 和 $R = 0.1$, 状态反馈增益为 $K = [-0.8456 \ -0.9444]$, 权重矩阵 $P = [1.6136 \ 0.7334; 0.7334 \ 1.4050]$, 鲁棒终端集设定为 $\Omega(\varepsilon) = \{x \mid \|x(t)\| \leq 0.19\}$, 即 $\varepsilon = 0.19$. 优化问题初始预测时域设定为 $T_0 = 4.5 \text{ s}$, 仿真时间为 15 s . 根据定理2, 计算扰动上界为 $\eta \leq 1.2 \times 10^{-3}$. 最后, 选择 $\beta = 0.01$ 和 $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$, 以保证定理3中的稳定性条件.

在系统参数配置相同的情况下, 将所提算法1与时间触发 MPC 和标准自适应预测时域 ET-MPC (SAT ET-MPC)^[24] 进行仿真对比, 其中 SAT ET-MPC 的预测时域更新机制设计成线性收缩形式, 即 $T_{k+1} = T_k - \mu_k(T_k - T_k^*)$. 图1和图2分别为系统状态轨迹和控制输入轨迹对比, 由图1和图2可知, 算法1与其他2种方法的控制效果基本相似, 可以在满足约束的情况下使系统平稳地稳定到原点.

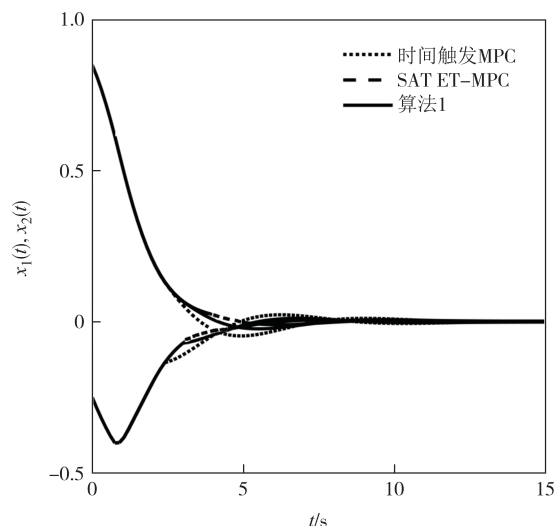


图1 系统状态轨迹对比

Fig.1 System state trajectory comparison

图3描述了算法1和SAT ET-MPC^[24]的触发情况, 纵坐标“1”表示触发, 纵坐标“0”表示未触发. 由图3可知, 算法1相比于SAT ET-MPC^[24]不仅触发次数减少, 而且触发间隔变大, 由此说明算法1在减少优化问题求解频率方面具有一定的优势.

为了更直观地展示算法1相比于其他两种方法的优势, 表1给出了在状态进入鲁棒终端集之前3种

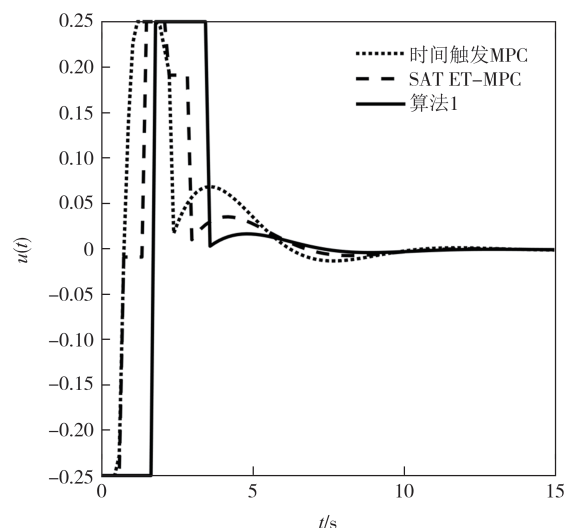


图2 控制输入轨迹对比

Fig.2 Control input trajectory comparison

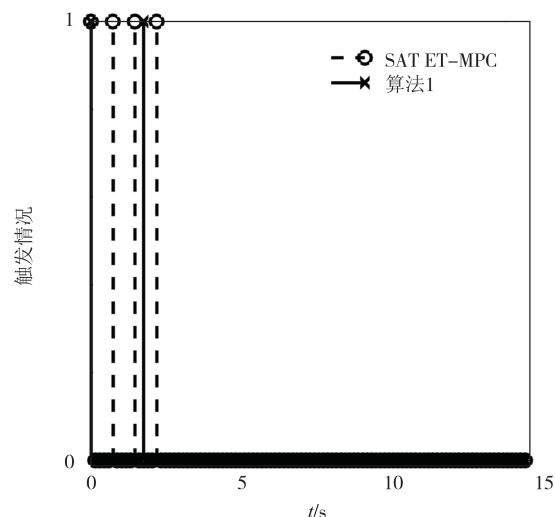


图3 触发时刻对比

Fig.3 Comparison of the triggering instant

控制方法所求解优化问题的触发次数以及相应的性能提升对比. 在相似条件和控制性能下, 与时间触发 MPC 和 SAT ET-MPC^[24] 相比, 算法1分别减少86.7%和50.0%的触发次数.

表1 触发次数及性能提升的对比

Tab.1 Comparison of triggering times and performance improvement

方法	触发次数	性能提升/%
时间触发 MPC	15	—
SAT ET-MPC ^[24]	4	73.3
算法1	2	86.7, 50.0

图4和表2描述了算法1和SAT ET-MPC^[24]的预测时域收缩情况对比. 由图4和表2可知, SAT ET-MPC^[24]的预测时域平均收缩值为0.225, 算法1的预

测时域平均收缩值为 0.9,本文所设计的预测时域收缩机制相比于传统形式具有更大的收缩范围,从而在降低每个触发时刻求解优化问题计算复杂度方面具有更突出的效果.

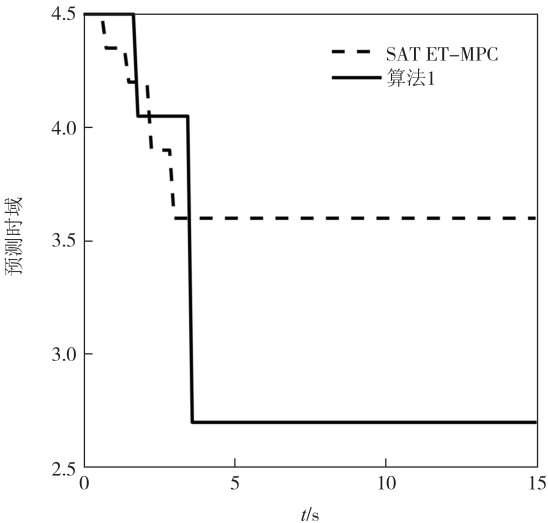


图 4 预测时域收缩对比

Fig.4 Comparison of the prediction horizon shrinkage

表 2 预测时域收缩值对比

Tab.2 Comparison of prediction horizon shrinkage value		
方法	最终时域	预测时域平均收缩值
时间触发 MPC	4.5	—
SAT ET-MPC ^[24]	3.6	0.225
算法 1	2.7	0.9

综上所述,本文所提算法不仅可以在降低系统资源消耗和保持预期控制性能之间实现更有效的平衡,而且可以有效降低系统计算复杂度,验证了算法的有效性.

5 总结

本文研究了具有加性扰动的约束线性系统事件触发模型预测控制问题,构建了有限时域约束优化问题,并采用鲁棒性约束处理系统加性扰动,设计了事件触发机制和一种新的指数收缩形式的预测时域更新机制,基于双模控制策略提出了自适应事件触发鲁棒 MPC 算法,通过严格的理论分析给出了保证算法迭代可行性和闭环系统稳定性以及无 Zeno 行为的充分条件. 仿真试验结果表明,与事件触发 MPC 和 SAT ET-MPC 方法相比,所提策略可以分别降低 86.7% 和 50.0% 的资源消耗,并通过更高效预测时域收缩有效地降低了求解优化问题的计算复杂度,节

省了计算时间. 然而,由于采用 ET-MPC 技术的网络化控制系统可能会遭受潜在的网络攻击,因此未来有必要对所提出的自适应 ET-MPC 策略的网络安全问题进行进一步深入分析.

参考文献

[1] RICHalet J, RAULT A, TESTUD J L, et al. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes [J]. Automatica, 1978, 14(5): 413–428.

[2] 王献忠,杜维. 模型预测控制发展概况[J]. 自动化与仪器仪表, 1999(4): 6–11.

WANG X Z, DU W. General situation of model predictive control development[J]. Automation & Instrumentation, 1999(4): 6–11. (in Chinese)

[3] 席裕庚,李德伟,林姝. 模型预测控制:现状与挑战[J]. 自动化学报, 2013, 39(3): 222–236.

XI Y G, LI D W, LIN S. Model predictive control: status and challenges [J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 222–236. (in Chinese)

[4] 李志军. 约束模型预测控制的稳定性与鲁棒性研究[D]. 北京:华北电力大学,2005.

LI Z J. Research on stability and robustness of constrained model predictive control [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2005. (in Chinese)

[5] 何德峰,薛美盛,季海波. 约束非线性系统构造性模型预测控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(11): 1301–1304.

HE D F, XUE M S, JI H B. Constructive model predictive control for constrained nonlinear systems [J]. Control and Decision, 2008, 23(11): 1301–1304. (in Chinese)

[6] 杨世忠,任庆昌. 基于在线优化的鲁棒模型预测控制[J]. 信息与控制, 2013, 42(6): 742–749.

YANG S Z, REN Q C. Robust model predictive control based on online optimization [J]. Information and Control, 2013, 42(6): 742–749. (in Chinese)

[7] VOZÁK D, VESELÝ V. Robust model predictive controller design [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 7443–7448.

[8] 蔡宏斌. 鲁棒模型预测控制的研究与应用[D]. 西安:西北工业大学,2019.

CAI H B. Research and application of robust model predictive control [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2019. (in Chinese)

[9] 李正强,张怡哲,邓建华,等. 基于模型预测控制的非线性飞行控制系统研究[J]. 飞行力学, 2009, 27(1): 27–30.

LI Z Q, ZHANG Y Z, DENG J H, et al. Design scheme of a nonlinear flight control system based on model predictive control [J]. Flight Dynamics, 2009, 27(1): 27–30. (in Chinese)

[10] 钱湖海. 基于自组织模糊神经网络的污水处理多目标模型预测控制研究[D]. 北京:北京工业大学,2016.

- QIAN H H. Research on multi-objective model predictive control of sewage treatment based on self-organizing fuzzy neural network [D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2016. (in Chinese)
- [11] 张维刚, 张朋, 韦昊, 等. 一种基于LTV MPC改进的无人驾驶汽车路径跟踪控制算法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2021, 48(10): 67-73.
- ZHANG W G, ZHANG P, WEI H, et al. An improved path tracking control algorithm for autonomous vehicle based on LTV MPC [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2021, 48(10): 67-73. (in Chinese)
- [12] ZENG T T, BAROOAH D P. An adaptive MPC scheme for energy-efficient control of building HVAC systems [J]. Journal of Engineering for Sustainable Buildings and Cities, 2021, 2(3): 1-10.
- [13] CHENG F, HAO F. Event-triggered control for linear descriptor systems [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2013, 32(3): 1065-1079.
- [14] GAO Y F, LIU L. Lyapunov-based triggering mechanisms for event-triggered control [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2020, 18(6): 1392-1398.
- [15] 孙洪涛, 张鹏飞, 彭晨, 等. 基于状态感知的UGV H_∞ 事件触发路径跟踪控制[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2022, 49(10): 34-42.
- SUN H T, ZHANG P F, PENG C, et al. State-sensitive based event-triggered H_∞ control for path tracking of unmanned ground vehicle [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2022, 49(10): 34-42. (in Chinese)
- [16] ÅSTRÖM K J, BERNHARDSSON B M. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems [C]// Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, December 10-13, 2002. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2002.
- [17] LI H P, SHI Y. Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems [J]. Automatica, 2014, 50(5): 1507-1513.
- [18] LIU C X, GAO J, LI H P, et al. Aperiodic robust model predictive control for constrained continuous-time nonlinear systems: an event-triggered approach [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(5): 1397-1405.
- [19] LUO Y, XIA Y Q, SUN Z Q. Robust event-triggered model predictive control for constrained linear continuous system [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(5): 1216-1229.
- [20] HU Y J, FAN D, PENG K, et al. A novel linear matrix inequality-based robust event-triggered model predictive control for a class of discrete-time linear systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(9): 4416-4435.
- [21] DENG L, SHU Z, CHEN T W. Event-triggered robust model predictive control with stochastic event verification [J]. Automatica, 2022, 146: 110638.
- [22] 苑守正, 刘志林, 郑林焯, 等. 基于事件触发自适应时域MPC的船舶靠泊方法[J]. 控制与决策, 2024, 39(1): 336-344.
- YUAN S Z, LIU Z L, ZHENG L H, et al. Ship berthing based on event-triggered adaptive horizon MPC [J]. Control and Decision, 2024, 39(1): 336-344. (in Chinese)
- [23] CAO Q, XIA Y Q, SUN Z Q, et al. Fusion event-triggered model predictive control based on shrinking prediction horizon [J]. Assembly Automation, 2022, 42(6): 721-729.
- [24] WANG P B, REN X M, ZHENG D D. Robust nonlinear MPC with variable prediction horizon: an adaptive event-triggered approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(6): 3806-3813.
- [25] CHEN H, ALLGÖWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability [C]// 1997 European Control Conference (ECC), July 1-7, 1997. Brussels, Belgium: IEEE, 1997: 1421-1426.
- [26] XIE H H, DAI L, LU Y C, et al. Disturbance rejection MPC framework for input-affine nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(12): 6595-6610.
- [27] LAMPERSKI A, AMES A D. Lyapunov theory for Zeno stability [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 100-112.
- [28] MAGNI L, RAIMONDO D M, SCATTOLINI R. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(9): 1548-1553.