

基于压电分流技术的 PT 对称梁散射特性研究

王刚[†], 罗彩明, 张晓东

(湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 湖南 长沙 410082)

摘要: 为了解决宇称-时间(Parity-Time, PT)对称结构存在的结构复杂、奇异点难以调谐的问题, 基于压电分流技术, 设计了一种针对弯曲波的PT对称梁. 推导了PT对称条件, 基于等效介质法和有限元法, 验证了所设计增益单元、损耗单元的等效参数满足该PT对称条件, 并通过改变谐振频率和分流电阻研究了奇异点的可调性. 通过传递矩阵法和有限元法, 对PT对称梁的散射特性进行分析, 讨论了单向无反射点与奇异点之间的关系. 理论计算和仿真结果表明, PT对称梁有包括511 Hz和520.5 Hz在内的多个奇异点. 弯曲波频率为511 Hz的弯曲波从右端入射时反射系数趋于零, 而弯曲波频率为520.5 Hz时, 它必须施加在左端从而达到完全透射而不产生反射.

关键词: 压电分流; 弯曲波; 宇称-时间对称; 奇异点; 单向无反射; 散射矩阵

中图分类号: TH113

文献标志码: A

Study on Scattering Characteristic of PT Symmetric Beam Based on Piezoelectric Shunting Technology

WANG Gang[†], LUO Caiming, ZHANG Xiaodong

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: To solve the problems of complex structure and difficulty in tuning the exceptional points in the existing PT symmetric structures, a PT symmetric beam for flexural waves is designed, which is based on piezoelectric shunting technology. Firstly, the PT symmetric condition is derived. Then, based on the effective medium method and finite element simulation, it is verified that the effective parameters of gain and loss unit meet the PT symmetric condition, and the tunability of exception points is studied by changing the resonant frequency and the shunting resistance. Finally, the scattering property of the PT symmetric beam is derived by transfer matrix method and finite element simulation, and the relationship between exceptional points and unidirectional non-reflection is illustrated. The calculated and simulated results show that the PT symmetric beam has several exceptional points including 511Hz and 520.5Hz. When the incident flexural waves of 511Hz is applied at the right side of the PT symmetric beam, the reflection coefficient is close to zero. However, when the frequency of the incident flexural waves changes to 520.5Hz, it should be applied on the left side of the PT symmetric beam to gain a entire transmission without reflecting.

Key words: piezoelectric shunting; flexural wave; Parity-Time(PT) symmetric; exceptional point; unidirectional non-reflection; scattering matrix

收稿日期:2021-06-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11772123), National Natural Science Foundation of China (11772123)

作者简介: 王刚(1975-), 男, 湖南长沙人, 湖南大学教授, 博士生导师

[†]通信联系人, E-mail: wangg@hnu.edu.cn

宇称-时间(Parity-Time, PT)对称由 Bender 和 Boettcher 于 1998 年提出^[1], 他们发现在满足 PT 对称的条件下, 系统的哈密顿量即使是非厄米的, 也可以具有实数的本征值. 系统具有 PT 对称性的条件是势函数共轭对称, 即势函数的实部偶对称、虚部奇对称. PT 对称系统的一个重要性质为 PT 对称性的自发性破缺, 具体表现是: 当势函数虚部在某一阈值以下时, 哈密顿量的本征值全部为实数, 系统处于 PT 对称相; 当势函数虚部越过该阈值时, 哈密顿量的本征值开始有复数产生, 此时对应于 PT 破缺相. 这一阈值也被称相变点或奇异点 (Exceptional Point). PT 对称将量子力学拓展到了非厄米范围, 此后它便成为了量子力学中的一个重要研究方向. 现阶段非厄米 PT 对称的研究工作已经拓展到光学和声学领域中, 表现出许多奇特的物理现象. 在光学领域的研究中, 通过调节折射率的分布, 使折射率在传播方向上满足实部偶对称、虚部奇对称, 即可构造 PT 对称光学系统^[2-6]; 而在声学领域的研究中, 当声学系统满足一定条件时, 它也会有 PT 对称性, 例如 Fleury 等人^[7]通过调节两个麦克风连接的阻抗使得麦克风的等效质量密度共轭对称, 从而利用 PT 对称性实现了一种声学隐身传感器.

PT 对称性的关键点在于引入均衡的增益和损耗, 而目前, 固体介质中针对弯曲波的 PT 对称性的研究相对较少, 其中一个重要的原因是自然介质难以实现能量损耗和能量增益之间的平衡. 压电材料由于能够实现机械能与电能之间的转化, 并且具有易于调控的特点, 有望解决这一问题. Christensen 等人^[4]利用压电半导体中的声电效应构造了声子 PT 对称系统, 并分析了其中的单向无反射现象. Hou 等人^[8]基于压电分流单元, 提出了一种可调 PT 对称系统, 通过改变分流电路的阻抗便可以调节 PT 对称系统奇异点出现的频率. 上述研究工作所提出的 PT 对称系统均是针对纵波而言的, 所获得的研究成果为 PT 对称系统的应用奠定了理论基础. 而与纵波相比, 弯曲波的理论模型更为复杂, 因此针对弯曲波的 PT 对称系统同样值得研究.

本文首先基于欧拉梁的假设, 推导了针对弯曲波的 PT 对称条件; 之后基于该条件, 利用压电分流单元设计了一种 PT 对称梁, 并采用等效介质法和有限元仿真, 得到了增益单元、损耗单元的等效质量密度和等效弯曲刚度; 最后通过传递矩阵法和有限元仿真证明了 PT 对称梁中的单向无反射现象,

并通过计算散射矩阵的特征值和特征向量说明了单向无反射现象源于奇异点的存在. 本文所提出的 PT 对称梁对于弯曲波有许多潜在的应用, 包括增强传感、弯曲波放大和非对称控制等.

1 PT 对称梁的设计与分析

1.1 弯曲波 PT 对称条件

根据欧拉梁假设, 弯曲波沿 x 轴传播时满足控制方程^[9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{\text{eff}}(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right) + \rho_{\text{eff}}(x) h_b \frac{\partial^2 w(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: $w(x)$ 、 $D_{\text{eff}}(x)$ 、 $\rho_{\text{eff}}(x)$ 和 h_b 分别表示梁的横向位移、等效弯曲刚度、等效质量密度和厚度. 若梁满足 PT 对称性, 则根据式(1)可以得到:

$$\begin{aligned} PT \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{\text{eff}}(x) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right) + \rho_{\text{eff}}(x) h_b \frac{\partial^2 w(x)}{\partial t^2} \right\} \\ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_{\text{eff}}^*(-x) \frac{\partial^2 PT\{w(x)\}}{\partial x^2} \right) \\ + \rho_{\text{eff}}^*(-x) h_b \frac{\partial^2 PT\{w(x)\}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2)$$

式中: P 、 T 分别代表空间反演算符和时间反演算符. 根据公式(2)可以得到 PT 对称条件:

$$\rho_{\text{eff}}(x) = \rho_{\text{eff}}^*(-x) \quad (3)$$

$$D_{\text{eff}}(x) = D_{\text{eff}}^*(-x) \quad (4)$$

公式(3)和公式(4)表明, 若满足 PT 对称性, 则要求等效质量密度 $\rho_{\text{eff}}(x)$ 和等效弯曲刚度 $D_{\text{eff}}(x)$ 关于原点共轭对称.

1.2 PT 对称梁设计

压电分流单元已经被证明可以有效地改变基体材料的等效弯曲刚度而几乎不改变其等效质量密度^[10], 因此, 可以通过设计合理的压电分流单元使其满足公式(3)和(4)所提出的等效质量密度和等效弯曲刚度共轭对称条件. 图 1(a)为所设计的 PT 对称梁的示意图, 基体梁上表面贴有两块压电片, 两块压电片分别连接由正、负电阻与电感并联组成的分流电路, 从而与基体梁部分构成了损耗单元、增益单元. 分流电路中, 正、负电阻的作用分别是衰减和放大弯曲波. 正电阻 R_{sh} 和电感 L_{sh} 并联后的分流阻抗 Z_L 、负电阻 $-R_{\text{sh}}$ 与电感 L_{sh} 并联后的分流阻抗 Z_G 分别为:

$$\begin{cases} Z_L = i\omega L_{\text{sh}} R_{\text{sh}} / (i\omega L_{\text{sh}} + R_{\text{sh}}) \\ Z_G = -i\omega L_{\text{sh}} R_{\text{sh}} / (i\omega L_{\text{sh}} - R_{\text{sh}}) \end{cases} \quad (5)$$

式中: ω 为角频率.

PT 对称梁中的负电阻可以通过如图 1(b)所示

的 Non-Foster 电路来实现^[11-12]，大电感可以用如图 1(c)所示的 Antoniou's 模拟电感电路实现^[13-14]。此外，分流电路中的电感会与压电片的固有电容产生谐振，从而使得增益单元、损耗单元的等效弯曲刚度 $D_{\text{eff}}(x)$ 与弯曲波频率相关，该现象在第 2 节进一步说明。

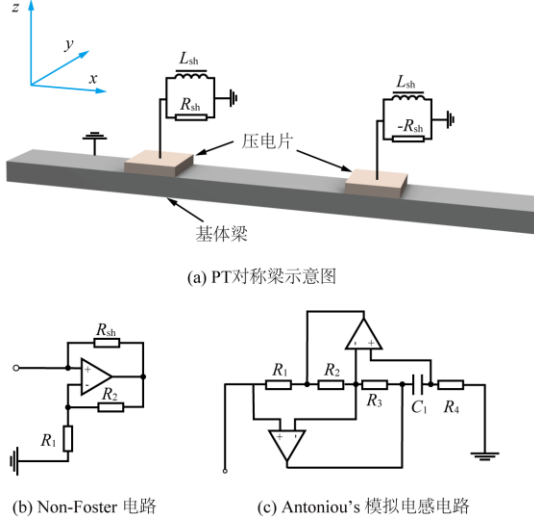


图 1 PT 对称梁示意图、Non-Foster 电路及 Antoniou's 模拟电感电路

Fig.1 Schematic illustrations of PT symmetric beam, the Non-Foster circuit and the Antoniou's circuit

1.3 PT 对称梁的特性分析

本节基于等效介质理论计算增益单元、损耗单元的等效参数，并通过传递矩阵法，针对图 1(a)所示 PT 对称梁，计算弯曲波分别从左端和右端两种入射情况下的透射系数和反射系数。同时，使用有限元软件 COMSOL Multiphysics 进行有限元仿真，以验证理论计算结果的准确性。

如图 2 所示，令基体梁的厚度及弹性模量分别为 h_b 、 E_b ，压电片的厚度和长度分别为 h_p 、 L_p 。假设压电片除了垂直于 x 轴的端面外，其余表面均为自由状态，且压电片仅在 z 轴存在极化，因此压电片的本构方程可简化为^[15-16]：

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中： T_1 和 S_1 分别表示压电片 x 轴方向的应力和应变； D_3 和 E_3 分别为压电片的电位移和电场强度； s_{11}^E 、 ϵ_{33}^T 、 d_{31} 分别对应于压电片短路弹性柔顺系数、介电常数、压电应变常数。

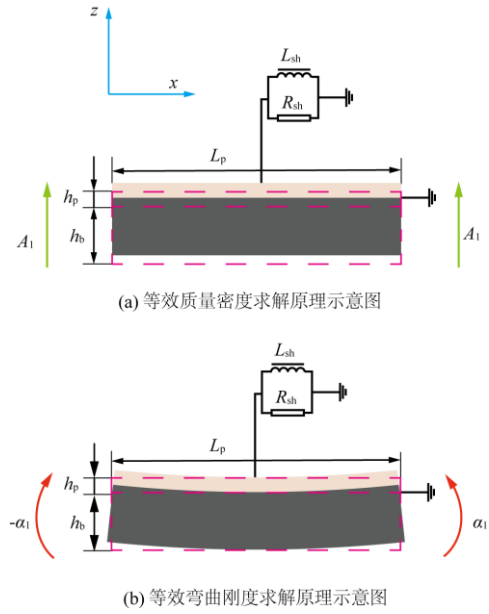


图 2 等效参数求解原理示意图

Fig.2 Configurations to calculate the effective parameters

另外，如图 2 所示中单元内任意一点 x 方向的位移 $u(x, z)$ 为纵波位移 $u_0(x)$ 与弯曲波位移 $w^p(x)$ 的组合：

$$u(x, z) = u_0^p(x) - z \frac{\partial w^p(x)}{\partial x} \quad (7)$$

由于压电片的厚度与基体梁的厚度处于同一个数量级，因此电场强度 E_3 在 z 方向不能被认为是恒定的。本文采用文献[17]提出的假设，认为电场强度 E_3 在 z 方向成线性分布，即电场强度 E_3 和电势 $V(x, z)$ 可以用如下公式表述：

$$E_3 = z a(x) + b(x) \quad (8)$$

$$V(x, z) = - \left[\frac{a(x)}{2} z^2 + b(x)z + c(x) \right] \quad (9)$$

电位移 D_3 满足控制方程^[18]：

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

联立公式(6)~(10)，便可以求出系数 $a(x)$ 、 $b(x)$ 、 $c(x)$ 和压电片上表面的电压 V_{up} ^[17]：

$$a(x) = \frac{d_{31}}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T - d_{31}^2} \frac{\partial^2 w^p(x)}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$b(x) = - \frac{V_{\text{up}}}{h_p} - \frac{a}{2} (h_b + h_p) \quad (12)$$

$$c(x) = - \frac{h_b^2}{8} a - \frac{h_b}{2} b \quad (13)$$

$$V_{\text{up}} = \frac{i\omega \frac{d_{31}}{s_{11}^E} Z_{\text{sh}} \int_0^{L_p} \left(\frac{\partial u_0(x)}{\partial x} - \frac{h_p + h_b}{2} \frac{\partial^2 w^p(x)}{\partial x^2} \right) dx}{1 + i\omega C_p^T (1 - k_{31}^2) Z_{\text{sh}}} \quad (14)$$

式中： $k_{31}^2 = d_{31}^2 / s_{11}^E \varepsilon_{33}^T$ 、 $C_p^T = \varepsilon_{33}^T L_p / h_p$ 分别表示压电片的机电耦合系数和固有电容； Z_{sh} 对应于损耗单元或增益单元的分流阻抗。

以基体梁的中性面为基准面，对应力求积分，可以得到单元 x - y 截面上的弯矩 M 、法向力 N 和剪力 T ：

$$M = I \frac{\partial^2 w^p(x)}{\partial x^2} - J \frac{\partial u_0^p(x)}{\partial x} - FV_{up} \quad (15)$$

$$N = K \frac{\partial u_0^p(x)}{\partial x} - J \frac{\partial^2 w^p(x)}{\partial x^2} + GV_{up} \quad (16)$$

$$T = I \frac{\partial^3 w^p(x)}{\partial x^3} - J \frac{\partial^2 u_0^p(x)}{\partial x^2} \quad (17)$$

其中系数 I 、 J 、 K 、 F 和 G 通过下式计算：

$$\begin{cases} I = \frac{E_a h_b^3}{12} + \frac{6h_b h_p^2 + 3h_b^2 h_p + 4h_p^3}{12s_{11}^E} + \frac{h_p^3 d_{31}^2}{12s_{11}^E (s_{11}^E \varepsilon_{33}^T - d_{31}^2)} \\ J = (h_p^2 + h_b h_p) / 2s_{11}^E \\ K = E_b h_b + h_p / s_{11}^E \\ F = (h_b + h_p) d_{31} / 2s_{11}^E \\ G = d_{31} / s_{11}^E \end{cases} \quad (18)$$

基于公式(15)~(17)，图2所示单元的运动控制方程为：

$$I \frac{\partial^4 w^p(x)}{\partial x^4} - J \frac{\partial^3 u_0^p(x)}{\partial x^3} + \bar{\rho} \frac{\partial^2 w^p(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

$$K \frac{\partial^2 u_0^p(x)}{\partial x^2} - J \frac{\partial^3 w^p(x)}{\partial x^3} - \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_0^p(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

式中： $\bar{\rho} = \rho_b h_b + \rho_p h_p$ ，其中 ρ_b 、 ρ_p 分别对应于基体梁及压电片的密度。由公式(19)(20)可以得到特征方程：

$$(IK - J^2)\gamma^6 + \omega^2 I \bar{\rho} \gamma^4 - \omega^2 K \bar{\rho} \gamma^2 - \omega^4 \bar{\rho}^2 = 0 \quad (21)$$

令 γ_n 表示特征方程(21)的特征根，则纵波 $u_0^p(x)$ 和弯曲波 $w^p(x)$ 的表达式为：

$$u_0^p(x) = \sum_{n=1}^6 \bar{A}_n \beta_n e^{\gamma_n x} \quad (22)$$

$$w^p(x) = \sum_{n=1}^6 \bar{A}_n e^{\gamma_n x} \quad (23)$$

式中： $\beta_n = (I\gamma_n^4 - \omega^2 \bar{\rho}) / (J\gamma_n^3)$ ； \bar{A}_n 为任意常数。将公式(22)(23)代入公式(14)中可以得到 V_{up} ：

$$V_{up} = \sum_{n=1}^6 \frac{i\omega \frac{d_{31}}{s_{11}^E} Z_{sh} \left(\beta_n - \frac{h_b + h_p}{2} \gamma_n \right) (e^{\gamma_n L_p} - 1)}{1 + i\omega C_p^T (1 - k_{31}^2) Z_{sh}} \quad (24)$$

对于没有贴压电片的基体梁，纵波 $w^b(x)$ 和弯曲波 $u_0^b(x)$ 解耦，运动控制方程分别为^[19]：

$$D_b \frac{\partial^4 w^b(x)}{\partial x^4} + \bar{\rho}_b \frac{\partial^2 w^b(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

$$K_b \frac{\partial^2 u_0^b(x)}{\partial x^2} - \bar{\rho}_b \frac{\partial^2 u_0^b(x)}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

式中： $K_b = E_b h_b$ ； $\bar{\rho}_b = \rho_b h_b$ ； $D_b = E_b h_b^3 / 12$ 。根据公式(25)、(26)可以得到弯曲波 $w^b(x)$ 和纵波 $u_0^b(x)$ 的表达式：

$$w^b(x) = \sum_{n=1}^4 \bar{A}_n^b e^{\gamma_n^b x} \quad (27)$$

$$u_0^b(x) = \sum_{n=5}^6 \bar{A}_n^b e^{\gamma_n^b x} \quad (28)$$

其中 \bar{A}_n^b 为任意常数，且有：

$$\begin{cases} \gamma_{1,2}^b = \pm i \sqrt{\frac{\rho_b \omega^2}{D_b}} \\ \gamma_{3,4}^b = \pm \sqrt{\frac{\rho_b \omega^2}{D_b}} \\ \gamma_{5,6}^b = \pm i \sqrt{\frac{\rho_b \omega^2}{K_b}} \end{cases} \quad (29)$$

对于基体梁中未贴压电片的部分及贴有压电片的部分，本文分别定义向量 \mathbf{Y}_b 和 \mathbf{Y}_p ：

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_b = [w^b(x), \frac{\partial w^b(x)}{\partial x}, M, T, u_0^b(x), N]^T \\ \mathbf{Y}_p = [w^p(x), \frac{\partial w^p(x)}{\partial x}, M, T, u_0^p(x), N]^T \end{cases} \quad (30)$$

根据公式(22)~(28)，公式(15)~(17)可以用以下矩阵形式表述：

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{B}_p(x) \mathbf{A}_p \quad (31)$$

$$\mathbf{Y}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{A}_b \quad (32)$$

其中：

$$\begin{cases} \mathbf{A}_p = [\bar{A}_n^p e^{\gamma_n^p x}]_{6 \times 1} \\ \mathbf{A}_b = [\bar{A}_n^b e^{\gamma_n^b x}]_{6 \times 1} \end{cases} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_b = [a_{mn}]_{6 \times 6} \quad (34)$$

$$\begin{cases} a_{1n} = \begin{cases} 1, & n=1,2,3,4 \\ 0, & n=5,6 \end{cases} \\ a_{2n} = \begin{cases} \gamma_n^b, & n=1,2,3,4 \\ 0, & n=5,6 \end{cases} \\ a_{3n} = \begin{cases} \frac{E_b h_b^3 (\gamma_n^b)^2}{12}, & n=1,2,3,4 \\ 0, & n=5,6 \end{cases} \\ a_{4n} = \begin{cases} \frac{E_b h_b^3 (\gamma_n^b)^3}{12}, & n=1,2,3,4 \\ 0, & n=5,6 \end{cases} \\ a_{5n} = \begin{cases} 0, & n=1,2,3,4 \\ 1, & n=5,6 \end{cases} \\ a_{6n} = \begin{cases} 0, & n=1,2,3,4 \\ E_b h_b \gamma_n^b, & n=5,6 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p(x) = [a_{mn}]_{6 \times 6} \\ a_{1n} = 1 \\ a_{2n} = \gamma_n \\ a_{3n} = (I\gamma_n^2 - J\beta_n\gamma_n)e^{\gamma_n x} \\ a_{4n} = (I\gamma_n^3 - J\beta_n\gamma_n^2)e^{\gamma_n x} \\ a_{5n} = \beta_n e^{\gamma_n x} \\ a_{6n} = (K\beta_n\gamma_n - J\gamma_n^2)e^{\gamma_n x} \end{cases} \quad (35)$$

根据连续性条件, 结合公式(31)和(32), 可以得到增益单元或损耗单元的传递矩阵 \mathbf{M}_i , 其中 $i=G$ 表示增益单元, $i=L$ 表示损耗单元:

表 1 增益单元和损耗单元的几何参数和材料参数

Tab.1 Geometrical and material parameters of loss and gain units

参数	定义	数值
L_p /mm	压电片长度	18
E_b /GPa	基体梁杨氏模量	70
h_b /mm	基体梁厚度	1.6
h_p /mm	压电片厚度	0.5
s_{11}^E /mm	压电片柔度系数	1.66×10^{-11}
ρ_b /(kg·m ⁻³)	基体梁质量密度	2 700
ρ_p /(kg·m ⁻³)	压电片质量密度	7 600
d_{31} /(C·N ⁻¹)	压电应力常数	-2.74×10^{-12}
ϵ_{33}^T	恒应力介电常数	$3.443 \epsilon_0$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_b(x + L_p) &= \mathbf{B}_b^T \mathbf{B}_p(x + L_p) \mathbf{P}_p^{-1} \mathbf{B}_p^{-1}(x) \mathbf{B}_b \mathbf{A}_b(x) \\ &= \mathbf{M}_i \mathbf{A}_b(x) \end{aligned} \quad (36)$$

式中: \mathbf{P}_p 为对角矩阵.

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} e^{\gamma_1 L_p} & & & & & \\ & e^{\gamma_2 L_p} & & & & \\ & & e^{\gamma_3 L_p} & & & \\ & & & e^{\gamma_4 L_p} & & \\ & & & & e^{\gamma_5 L_p} & \\ & & & & & e^{\gamma_6 L_p} \end{bmatrix} \quad (37)$$

1.3.1 等效参数

本文仅对波长远大于单元长度 L_p 的低频弯曲波进行分析, 采用等效介质理论计算结构的等效参数^[20]. 因为增益单元和损耗单元的等效参数求解原理相同, 对应的等效参数计算过程相同, 所以本文仅以损耗单元为例介绍等效参数求解过程.

令 $x=0$, 根据公式(36), $\mathbf{Y}_b(L_p)$ 与 $\mathbf{Y}_b(0)$ 之间满足:

$$\mathbf{Y}_b(L_p) = \mathbf{B}_p(L_p) \mathbf{P}_p^{-1} \mathbf{B}_p^{-1}(0) \mathbf{Y}_b(0) \quad (38)$$

求解等效质量密度 ρ_{eff} 时, 需要获取单元的质量, 这要求单元任意一点的横向加速度均相同. 如图 2 (a)所示, 损耗单元整体相对于虚线方框所示的原始

位置作幅值为 A_1 的横向简谐振动, 并且限制其左、右边界的纵向位移和旋转角度为 0. 依据上述边界条件, 基于公式(38)可求解向量中 $\mathbf{Y}_b(0)$ 、 $\mathbf{Y}_b(L_p)$ 的未知元素, 从而得到损耗单元的等效质量密度 ρ_{eff} :

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{T(0) + T(L_p)}{A_1 \omega^2 L_p h_b w_b} \quad (39)$$

如图 2(b)所示, 求解等效弯曲刚度 D_{eff} 时, 在单元左、右两侧相对于虚线方框所示的原始位置分别施加大小为 $-\alpha_1$ 、 α_1 的转角, 令 $w^p(0) = w^p(L_p) = 0$. 弯曲波和纵波相互耦合, 若限制单元两端纵向位移为零, 则需要确定增益单元、损耗单元的中性面. 但是该中性面对于本文中的增益单元、损耗单元来说很难确定, 因此, 本文只限制单元左边界的纵向位移 $w_0^p(0) = 0$, 而令右边界的纵向力为零. 依据上述边界条件便可以基于公式(38)求解向量中 $\mathbf{Y}_b(0)$ 、 $\mathbf{Y}_b(L_p)$ 的未知元素, 从而得到等效弯曲刚度 D_{eff} :

$$D_{\text{eff}} = \frac{M(L_p) L_p}{2\alpha_1} \quad (40)$$

为了验证等效介质法计算结果的正确性, 本文针对损耗单元和增益单元, 使用 COMSOL 分别建立了如图 2 所示 2 种情况下的二维有限元模型. 有限元模型中, 认为单元满足平面引力假设, 施加的边界条件与等效介质法中的边界条件一致.

求解等效质量密度 ρ_{eff} 时, 分别在左右边界上, 对单元所受的 z 方向力求线积分即可得到对应边界上的剪切力 $T(0)$ 、 $T(L_p)$; 而求解等效弯曲刚度 D_{eff} 时, 在右边界上对单元所受的 y 方向力矩求线积分可得到力矩 $M(L_p)$. 得到剪切力和力矩之后, 便可以通过公式(39)和公式(40)分别计算得到单元的等效质量密度 ρ_{eff} 及等效弯曲刚度 D_{eff} .

等效参数法和有限元仿真中, 损耗单元和增益单元的几何参数及材料参数如表 1 所示. 另外, 电感与压电片的固有电容会产生谐振, 因此取谐振频率 $f_0 = 500$ Hz, 分流电阻 $R_{\text{sh}} = 1\,000 \Omega$. 等效参数法和有限元仿真的计算结果在 2.1 节进行讨论.

1.3.2 透射系数及反射系数

为了表述方便, 本文用下标 1 表示弯曲波从左端入射, 用下标 r 表示弯曲波从右端入射, 将弯曲波从左端入射时的透射系数和反射系数分别定义为左透射系数 t_l 和左反射系数 r_l . 同理, 定义弯曲波从右端入射时的右透射系数 t_r 和右反射系数 r_r .

在 PT 对称梁的左端或右端施加一个单位位移, 即

$$\begin{bmatrix} t_{l(r)} \\ 0 \\ t_{l(r)}^e \\ 0 \\ t_{l(r)}^p \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{l(r)}^t \begin{bmatrix} 1 \\ r_{l(r)} \\ 0 \\ r_{l(r)}^e \\ 0 \\ r_{l(r)}^p \end{bmatrix} \quad (41)$$

式中：上标 e 和 p 分别代表倏逝弯曲波和纵波。对于图 1(a)所示 PT 对称梁，弯曲波从左端和右端入射时，对应情况传递矩阵分别为 $\mathbf{M}_l^t = \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{M}_G \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{M}_L$ 、 $\mathbf{M}_r^t = \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{M}_L \mathbf{P}_b^{-1} \mathbf{M}_G$ ，其中传播矩阵 \mathbf{P}_b 为对角矩阵：

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} e^{\gamma_1^b L} & & & & & \\ & e^{\gamma_2^b L} & & & & \\ & & e^{\gamma_3^b L} & & & \\ & & & e^{\gamma_4^b L} & & \\ & & & & e^{\gamma_5^b L} & \\ & & & & & e^{\gamma_6^b L} \end{bmatrix} \quad (42)$$

式中： L 表示两块压电片之间的距离。求解公式(41)便可以得到左透射系数 t_l 、左反射系数 r_l 、右反射系数 r_r 、右透射系数 t_r ，进而可以得到弯曲波的散射矩阵 \mathbf{S} [21]：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} t_l & r_r \\ r_l & t_r \end{bmatrix} \quad (43)$$

为验证传递矩阵法计算结果的正确性，本文使用 COMSOL 软件建立如图 3 所示的有限元仿真模型，基体梁上含有增益单元、损耗单元。分别在左端激励点和右端激励点施加力载荷，产生弯曲波。为了抑制边界反射，基体梁的两端各连接一个完美匹配层，其他边界保持自由状态。完美匹配层的长度至少为研究波长的 $1/2$ [22]，在本文中，波长的最大值约为 0.3844 m ，则本文中完美匹配层的长度设为 0.2 m 。由于激励点关于原点 O 对称，所以观测点相对原点也要对称分布，为了避免受到激励点的影响，观测点与激励点之间要保持一定距离。观测点 A 和观测点 B 的坐标分别为 $(-0.35 \text{ m}, 0)$ 和 $(0.35 \text{ m}, 0)$ ，左端激励点和右端激励点的坐标分别为 $(-0.5 \text{ m}, 8.0 \times 10^{-4} \text{ m})$ 和 $(0.5 \text{ m}, 8.0 \times 10^{-4} \text{ m})$ 。图 4 为试验装置图，在图 4 中，梁的两端附着有蓝丁胶，用来减少反射。信号发生器产生的信号经过功率放大器后作用在压电激励器上，产生弯曲激励。激光测振仪用来测量指定点的位移响应，它与信号调理器、数据采集卡、电脑共同组成信号采集处理系统。试验中所需要的负电阻和电感可以分别通过图 1(b)和图 1(c)所示电路来实现。

传递矩阵法和有限元仿真中，压电片长度

$L_p = 45 \text{ mm}$ ，两块压电片之间的距离 $L = 300 \text{ mm}$ ，分流电阻 $R_{sh} = 1900 \Omega$ ，分流电路的谐振频率 $f_0 = 500 \text{ Hz}$ ，其他参数与表 1 中所列参数相同。有限元仿真模型的长度为 2005 mm 。

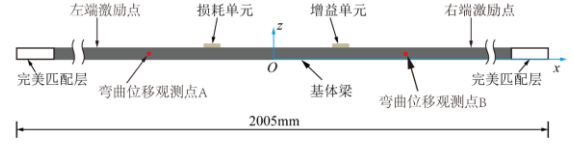


图 3 有限元仿真示意图

Fig.3 Configuration for finite elements simulation

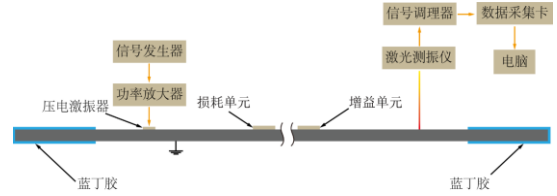


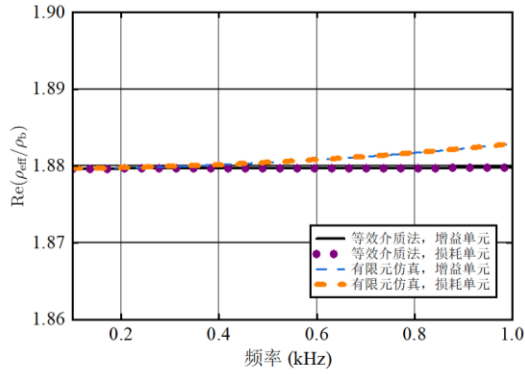
图 4 试验装置图

Fig.4 Diagram of experimental setup

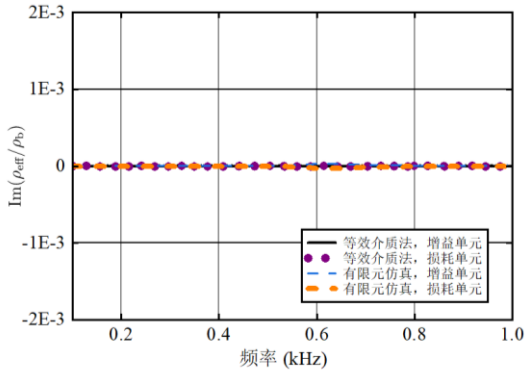
2 结果和讨论

2.1 等效参数

基于上述等效介质法和有限元仿真，计算得到增益单元和损耗单元的等效质量密度 ρ_{eff} 和等效弯曲刚度 D_{eff} 。为了表达方便，本文采用归一化等效质量密度 $\rho_{\text{eff}} / \rho_b$ 和归一化等效弯曲刚度 D_{eff} / D_b 来表征增益单元、损耗单元的等效参数。等效介质法和有限元仿真计算得到的归一化等效参数分别如图 5 和图 6 所示。由图 5(a)可知，通过 2 种方法得到的增益单元和损耗单元的归一化等效质量密度 $\text{Re}(\rho_{\text{eff}} / \rho_b)$ 在计算频率范围内几乎保持不变，并且与分流阻抗无关。由图 5(b)可知，归一化等效质量密度虚部 $\text{Im}(\rho_{\text{eff}} / \rho_b)$ 数值很小，可以认为，等效质量密度 ρ_{eff} 在计算的频率范围内为实数。由图 6(a)和图 6(b)可以发现，增益单元和损耗单元的等效弯曲刚度 D_{eff} 共轭。因此，本文提出的 PT 对称梁满足公式 (3)和公式(4)所提出的等效质量密度 ρ_{eff} 和等效弯曲刚度 D_{eff} 共轭对称条件。由于电感和分流电阻 R_{sh} 的存在，增益单元和损耗单元的等效弯曲刚度 D_{eff} 与弯曲波频率相关。等效介质法和有限元仿真获取的结果总体上相稳合，存在部分差异的原因主要在于等效介质法存在的局限性，如压电片 z 方向上电场线性分布的假设等。



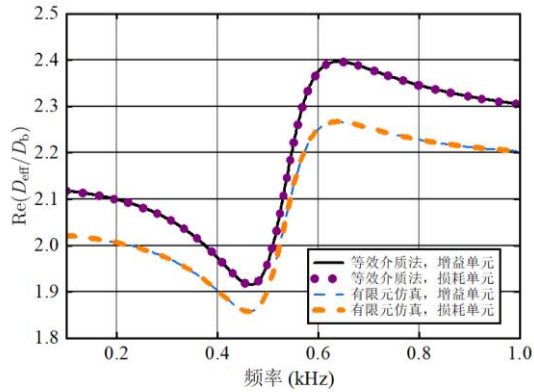
(a) 归一化等效质量密度实部



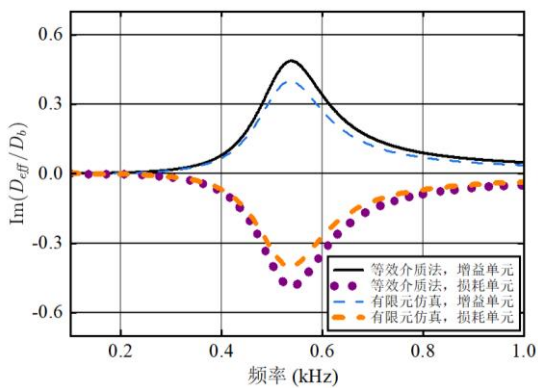
(b) 归一化等效质量密度虚部

图 5 归一化等效质量密度

Fig.5 The normalized effective mass density



(a) 归一化等效弯曲刚度实部



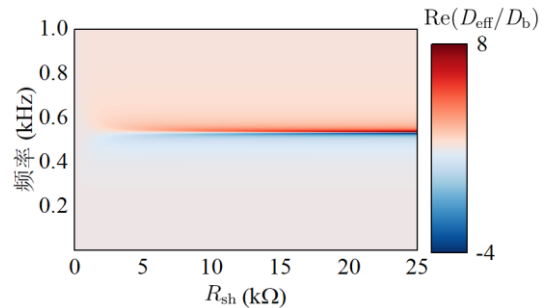
(b) 归一化等效弯曲刚度虚部

图 6 归一化等效弯曲刚度

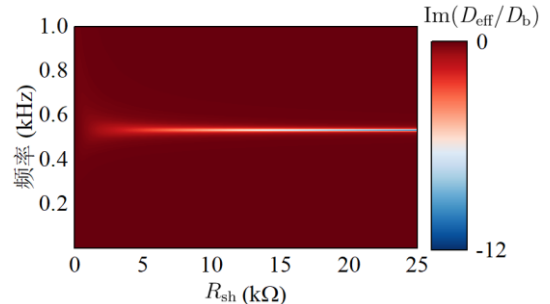
Fig.6 The normalized effective bending stiffness

为了进一步表征归一化等效弯曲刚度 D_{eff}/D_b 与分流电阻 R_{sh} 、弯曲波频率的关系，本文采用等效

介质法计算不同分流电阻 R_{sh} 及不同频率的弯曲波激励下损耗单元的归一化等效弯曲刚度 D_{eff}/D_b ，计算结果分别如图 7 和图 8 所示。由图 7 可知，当弯曲波的频率远离 530 Hz 时，分流电阻 R_{sh} 的取值不会影响归一化等效弯曲刚度实部 $Re(D_{eff}/D_b)$ 和虚部 $Im(D_{eff}/D_b)$ ，并且虚部 $Im(D_{eff}/D_b)$ 接近于 0，表明此时损耗单元几乎没有消耗弯曲波能量；当弯曲波频率为 530 Hz 附近时，归一化等效弯曲刚度实部 $Re(D_{eff}/D_b)$ 出现极值，并且增大分流电阻 R_{sh} 会使得归一化弯曲刚度虚部 $Im(D_{eff}/D_b)$ 数值减小，从而加强损耗作用。当分流电路的谐振频率 $f_0=800$ Hz 时，可以发现图 8(a)和图 8(b)所示结果分别与图 7(a)和图 7(b)所示结果相近，只是归一化等效弯曲刚度 D_{eff}/D_b 的梯度变大，并且随着分流电路谐振频率 f_0 的改变，极值出现的频率变为 850 Hz 附近。



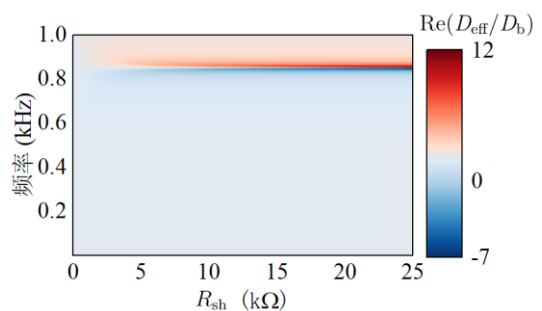
(a) 归一化等效弯曲刚度实部($f_0=500$ Hz)



(b) 归一化等效弯曲刚度虚部($f_0=500$ Hz)

图 7 谐振频率 $f_0=500$ Hz 时损耗单元归一化等效弯曲刚度与分流电阻 R_{sh} 、弯曲波频率的关系

Fig.7 The normalized effective bending stiffness of loss element in relationship to shunting resistance and flexural wave frequency when resonant frequency $f_0=500$ Hz



(a) 归一化等效弯曲刚度实部($f_0=800$ Hz)

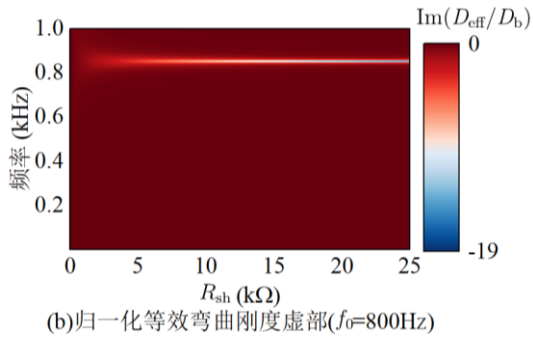


图 8 谐振频率 $f_0=800$ Hz 时损耗单元归一化等效弯曲刚度与分流电阻 R_{sh} 、弯曲波频率的关系

Fig.8 The normalized effective bending stiffness of loss element in relationship to shunting resistance and flexural wave frequency when resonant frequency $f_0=800$ Hz

由图 5~图 8 可知, 本文提出的 PT 对称梁满足公式(3)和公式(4)所提出的等效质量密度 ρ_{eff} 和等效弯曲刚度 D_{eff} 共轭对称条件. 通过改变分流电阻 R_{sh} 和谐振频率 f_0 , 增益单元、损耗单元的弯曲刚度 D_{eff} 会产生较大变化. 因此, 本文所提出的 PT 对称梁具有易于调控的特点.

2.2 透射系数、反射吸收及散射矩阵

基于传递矩阵法和有限元仿真得到的透射系数和反射系数分别如图 9 和图 10 所示. 图 9 表示弯曲波分别从左端和右端入射的情况下透射系数的幅值, 由图 9 可知, 2 种方法得到的透射系数幅值非常一致, 这是因为 PT 对称梁具有互易性, 即左透射系数与右透射系数相等. 在图 9 中的阴影部分内, 透射系数的幅值大于 1, 这是由于 PT 对称梁是非保守系统, 与外界存在能量交换. 图 10(a)和图 10(b)分别表示左反射系数和右反射系数幅值. 由图 10 可以发现, PT 对称梁对弯曲波的非对称散射特性, 即当弯曲波分别从左、右两端入射时, 2 种情况下的反射系数幅值不相等, 2 种情况下的反射系数都存在零点, 该零点对应的弯曲波频率即为单向无反射点, 如图 10(a)中的 520.5 Hz 及图 10(b)中的 511 Hz. 由图 9 可以发现, 在单向无反射点 511 Hz 和 520.5 Hz, 透射系数的幅值接近 1.

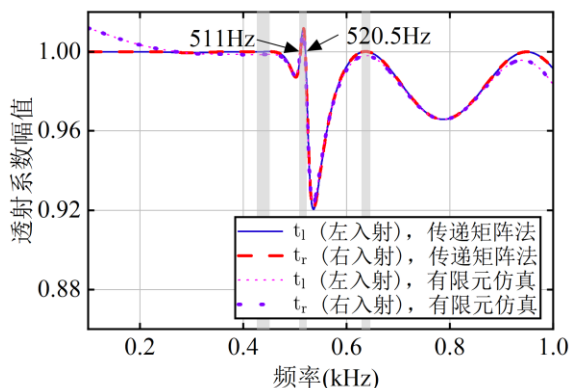
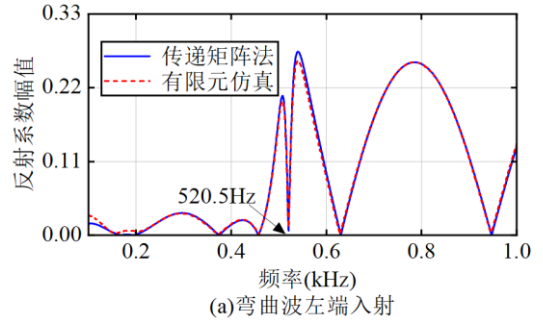
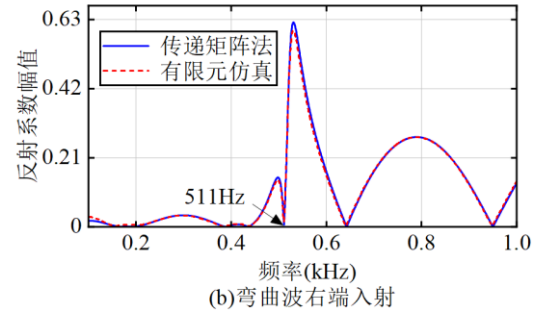


图 9 透射系数幅值

Fig.9 The amplitude of transmission coefficients



(a) 弯曲波左端入射



(b) 弯曲波右端入射

图 10 反射系数幅值图

Fig.10 The amplitude of reflection coefficients

根据 PT 对称性, 左反射系数 r_l 、右反射系数 r_r 、透射系数 t 之间满足:

$$r_l r_r = t^2 \left(1 - \frac{1}{|t|^2} \right) \quad (44)$$

根据公式(44), 可以得到广义守恒定律^[23]:

$$|T-1| = \sqrt{R_l R_r} \quad (45)$$

式中: $T=|t|^2$ 表示透射率; $R_l=|r_l|^2$ 表示弯曲波左端入射时的反射率; $R_r=|r_r|^2$ 表示弯曲波右端入射时的反射率.

由公式(45)可知, 当 $T < 1$ 时, $T + \sqrt{R_l R_r} = 1$, 表明弯曲波从左、右两端入射时 PT 对称梁中不存在耗散或者放大. 而当 $T > 1$ 时, $T - \sqrt{R_l R_r} = 1$, PT 对称梁对弯曲波进行放大. 在单向无反射点, 由于反射系数为 0, 根据公式(45)可推知 $T=1$, 表明此时 PT 对称梁对弯曲波完全透射, 这与图 9 所示结果相符.

为了更好地阐述单向无反射特性, 本文从有限元仿真的结果中, 提取 PT 对称梁在 2 个单向无反射点 511 Hz 和 520.5 Hz 下的归一化弯曲波位移场幅值, 结果如图 11 所示. 由图 11 可知, 区域 I 和区域 II 能直观地体现 PT 对称梁的散射特性, 区域 I 代表左端激励点到损耗单元左边界范围, 区域 II 代表增益单元右边界与右端激励点之间的范围. 当 511 Hz 的弯曲波从左端入射时, 区域 I 中有明显的干涉条纹, 表明区域 I 入射弯曲波与反射弯曲波形成了驻波, 导致区域 I 中各点的弯曲位移幅值明

显不一致. 当 511 Hz 的弯曲波从右端入射时, 区域 II 中各点的弯曲位移幅值近似相等, 表明区域 II 中只有向右传播的弯曲波而几乎不存在反射弯曲波, 并且区域 I 和区域 II 的弯曲位移幅值相近, 表明此时 PT 对称梁对右端入射的弯曲波完全透射. 当 520.5 Hz 的弯曲波从左端入射时, 区域 I 中几乎无反射弯曲波存在, 并且弯曲波几乎完全透射至区域 II; 而从右端入射时, 区域 II 中反射弯曲波与入射弯曲波形成了驻波, 导致区域 II 中各点之间的弯曲位移幅值有较大差别.

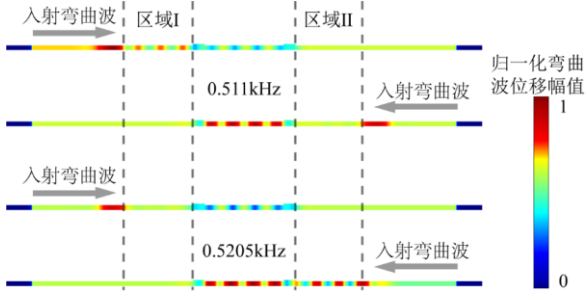
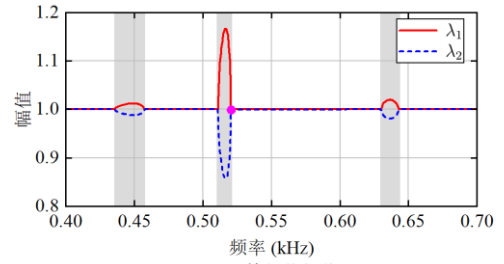


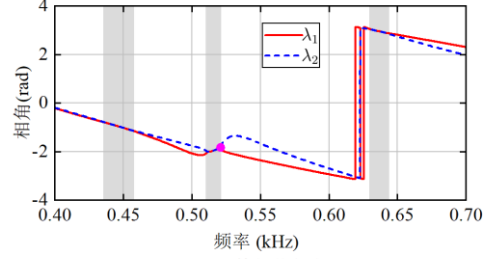
图 11 两个单向无反射点下的归一化弯曲位移场幅值

Fig.11 The normalized amplitude of flexural wave displacement fields at two unidirectional reflectionless points

通过散射矩阵 \mathbf{S} 也可以表征 PT 对称梁的散射性质. 由公式(43)定义的散射矩阵, 可以得到散射矩阵的特征值 λ_1 、 λ_2 和特征向量 \mathbf{V}_1 、 \mathbf{V}_2 , 结果分别如图 12 和图 13 所示. 图 12 和图 13 中的实心圆点代表单向无反射点 520.5 Hz, 阴影部分表示透射率 $T > 1$ 的弯曲波频率范围. 将图 12 (a)与图 9 所示结果对比可以发现: 当 $T \leq 1$ 时, 两个特征值的模均为 1, 散射矩阵的两个特征向量满足 $PT\bar{\mathbf{V}}_{1,2} \propto \bar{\mathbf{V}}_{1,2}$, 此时对应于 PT 对称相; 而当 $T > 1$ 时, 其中一个特征值的模大于 1, 另一个特征值的模小于 1, 散射矩阵的两个特征向量满足 $PT\bar{\mathbf{V}}_{1,2} = \bar{\mathbf{V}}_{2,1}$, 此时对应于 PT 破缺相^[24]. 在单向无反射点 520.5 Hz, 同时也是 PT 对称相与 PT 破缺相之间的临界点 (相变点, 也即奇异点), 两个特征值发生简并, 而由图 13 可知, 在单向无反射点 520.5 Hz, 两个特征向量也会发生简并, 这说明 PT 对称梁的奇异点即为单向无反射点. 此外, 图 10(a)所示的单向无反射点也可以通过特征向量来解释. 例如, 在 520.5 Hz 的奇异点, 两个特征向量的第二分量为零, 表明从左端入射时反射率为 0, 这与图 10 (a)中的结果一致.



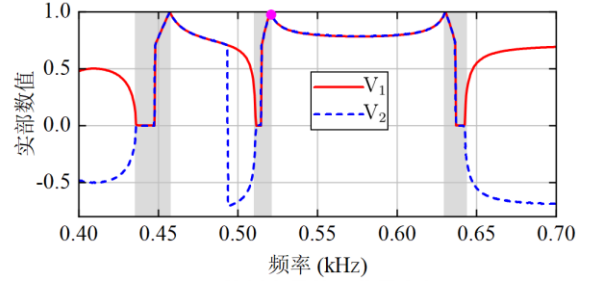
(a) 特征值幅值



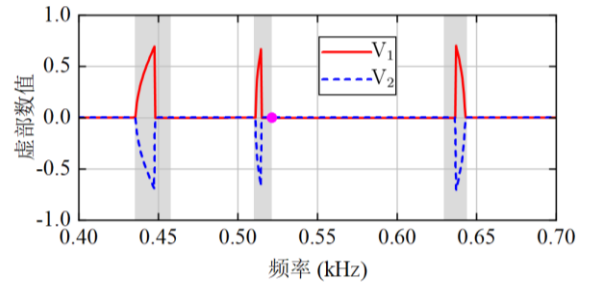
(b) 特征值相角

图 12 特征值幅值及相角

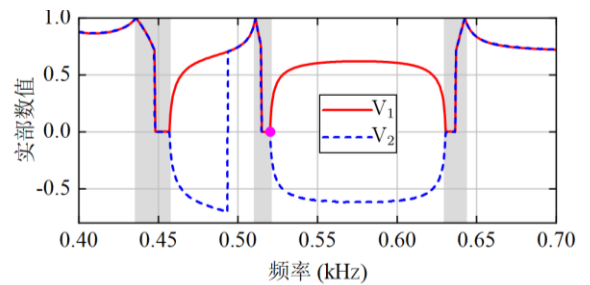
Fig.12 The amplitude and phase angle of eigenvalues



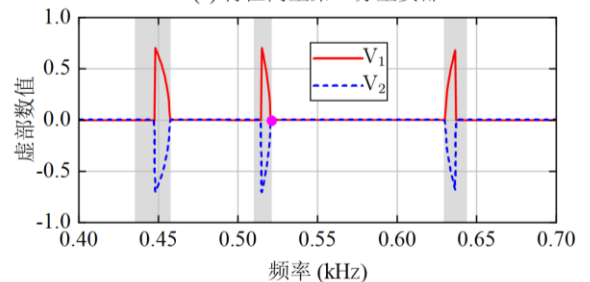
(a) 特征向量第一分量实部



(b) 特征向量第一分量虚部



(c) 特征向量第二分量实部



(d) 特征向量第二分量虚部

图 13 特征向量实部和虚部

Fig.13 The real and imaginary parts of the eigenvectors

3 结 论

1)利用压电分流单元设计了一种针对弯曲波的PT 对称梁,其中压电分流单元连接了正/负电阻并联电感组成的分流电路,构成了损耗单元、增益单元;采用等效介质法计算损耗单元、增益单元的等效弯曲刚度和等效质量密度,并通过有限元仿真对等效介质法进行验证,结果表明,本文所提出的设计满足等效质量密度和等效弯曲刚度共轭对称。

2)采用传递矩阵法计算 PT 对称梁的透射系数和反射系数,并与有限元仿真的结果进行比较,验证了传递矩阵法的正确性.传递矩阵法和有限元仿真的结果表明,所提出的 PT 梁针对弯曲波具有非对称散射特性,并且存在单向无反射点。

3)通过计算散射矩阵的特征值与特征向量,分析了 PT 对称梁的奇异点与单向无反射点之间的关系,结果表明,PT 对称梁的奇异点即为单向无反射点。

参考文献

- [1] BENDER C M, BOETTCHER S. Real spectra in non-hermitian hamiltonians Having PT Symmetry[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(24): 5243-5246.
- [2] GUO A, SALAMO G J, DUCHESNE D, *et al.* Observation of PT -symmetry breaking in complex optical potentials[J]. Physical Review Letters, 2009, 103(9): 093902.
- [3] RÜTER C E, MAKRIS K G, EL-GANAINY R, *et al.* Observation of parity - time symmetry in optics[J]. Nature Physics, 2010, 6(3): 192-195.
- [4] CHRISTENSEN J, WILLATZEN M, VELASCO V R, *et al.* Parity-time synthetic phononic media[J]. Physical Review Letters, 2016, 116(20): 207601.
- [5] LIN Z, RAMEZANI H, EICHELKRAUT T, *et al.* Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(21): 213901.
- [6] KLAIMAN S, GÜNTHER U, MOISEYEV N. Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides[J]. Physical Review Letters, 2008, 101(8): 080402.
- [7] FLEURY R, SOUNAS D, ALÙ A. An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry[J]. Nature Communications, 2015, 6(1): 5905.
- [8] HOU Z, ASSOUAR B. Tunable elastic parity-time symmetric structure based on the shunted piezoelectric materials[J]. Journal of Applied Physics, 2018, 123(8): 085101.
- [9] 张邦基, 黄训浩, 张农, 等. 局域共振声子晶体失谐梁的减振特性研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2015, 42(2): 55-59.
- [10] ZHANG B J, HUANG X H, ZHANG N, *et al.* Research on properties of vibration attenuation in phononic crystal detuning beam with local resonant structure[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2015, 42(2): 55-59. (In Chinese)
- [11] 张浩. 压电分流型声学超材料的隔声特性研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2016:49-53.
- [12] ZHANG H. Research on the sound insulation properties of acoustic metamaterials with piezoelectric shunts[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2016. (In Chinese)
- [13] HRABAR S, KROIS I, BONIC I, *et al.* Negative capacitor paves the way to ultra-broadband metamaterials[J]. Applied Physics Letters, 2011, 99(25): 254103.
- [14] CHEN Y Y, HUANG G L, SUN C T. Band gap control in an active elastic metamaterial with negative capacitance piezoelectric shunting[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2014, 136(6): 061008.
- [15] ZHANG H, XIAO Y, WEN J H, *et al.* Ultra-thin smart acoustic metasurface for low-frequency sound insulation[J]. Applied Physics Letters, 2016, 108(14): 141902.
- [16] ZHANG X D, CHEN F, CHEN Z S, *et al.* Membrane-type smart metamaterials for multi-modal sound insulation[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2018, 144(6): 3514-3524.
- [17] 罗松南, 邓庆田. 带压电层圆柱形杆中波的传播[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2006, 33(2): 74-77.
- [18] LUO S N, DENG Q T. Wave propagation in the layered piezoelectric cylindrical bars[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2006, 33(2): 74-77. (In Chinese)
- [19] WANG G, CHEN S B. Large low-frequency vibration attenuation induced by arrays of piezoelectric patches shunted with amplifier-resonator feedback circuits[J]. Smart Materials and Structures, 2016, 25(1): 015004.
- [20] CHEN Y Y, HU G K, HUANG G L. A hybrid elastic metamaterial with negative mass density and tunable bending stiffness[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2017, 105: 179-198.
- [21] COLLET M, OUISSE M, ICHCHOU M N. Structural energy flow optimization through adaptive shunted piezoelectric metacomposites[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2012, 23(15): 1661-1677.
- [22] 朱滨. 弹性力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学, 2008:276-281.
- [23] ZHU B. Elastic mechanics[M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2008: 276-281. (In Chinese)
- [24] WANG G, CHENG J Q, CHEN J W, *et al.* Multi-resonant piezoelectric shunting induced by digital controllers for subwavelength elastic wave attenuation in smart metamaterial[J]. Smart Materials and Structures, 2017, 26(2): 025031.
- [25] LI D T, HUANG S B, CHENG Y, *et al.* Compact asymmetric sound absorber at the exceptional point[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2021, 64(4): 1-7.
- [26] 杨小黎. 结构声学材料反向声散射特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2020:12-14.
- [27] YANG X L. Research on the characteristics of acoustic backscattering of structural materials[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2020:12-14. (In Chinese)
- [28] GE L, CHONG Y D, STONE A D. Conservation relations and anisotropic transmission resonances in one-dimensional PT-symmetric photonic heterostructures[J]. Physical Review A, 2012, 85(2): 023802.
- [29] CHONG Y D, GE L, STONE A D. PT-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems[J]. Physical Review Letters, 2011, 106(9): 093902.