

文章编号:1674-2974(2016)09-0018-08

# CFRP 索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析<sup>\*</sup>

康厚军<sup>†</sup>, 解维东, 郭铁丁

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**利用张紧弦和欧拉梁振动理论分别描述斜拉梁结构中索与梁的振动,通过索梁连接处的动态平衡条件,建立斜拉梁平面内自由振动理论.利用传递矩阵法和边界条件对斜拉梁结构平面内自由振动的特征值问题进行求解.同时,建立斜拉梁的有限元模型,有限元法所得结果与本文理论研究非常吻合,证明了本文理论和方法的正确性.最后对 CFRP 索斜拉梁平面内自由振动进行参数分析.研究表明,CFRP 索斜拉梁的基本动力学性能优于传统钢索斜拉梁.

**关键词:**CFRP 索;斜拉梁;传递矩阵法;振动分析;频率;振型

**中图分类号:** O343.9

**文献标识码:** A

## Modeling and Parameters Analysis on In-plane Free Vibration of Cable-stayed Beam

KANG Hou-jun<sup>†</sup>, XIE Wei-dong, GUO Tie-ding

(College of Civil Engineering, Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China)

**Abstract:** Based on the dynamic theory of taut string and Euler beam as well as the dynamic equilibrium conditions at the joint of cable and beam, the in-plane free vibration theory of a cable-stayed beam was established. The transfer matrix method and boundary conditions were considered to solve the eigenvalue problem of the in-plane free vibration of a cable-stayed beam structure. Meanwhile, a finite element model of the cable-stayed beam was also developed to verify the proposed theory and method. The predictions by the proposed method match well with those of the finite element analysis. Finally, the parametric analysis was conducted, which shows that the fundamental dynamic properties of the cable-stayed beam are improved by replacing steel cables with CFRP cables.

**Key words:** CFRP cable; cable-stayed beam; transfer matrix method; vibration analysis; frequency; mode shape

碳纤维增强复合材料(Carbon Fiber Reinforced Polymer,简称 CFRP)是由多股连续有机纤维丝在惰性气体中经高温炭化,并经拉挤成型技术和必要的表面处理而形成的一种新型复合材料.采用

CFRP 制成的拉索具有耐腐蚀性强、自重轻(仅为钢材的 1/5 左右)、强度高(钢材的 8~10 倍,弹性模量最高可达 1 000 GPa,抗拉强度可达 2 700 MPa<sup>[1]</sup>)、抗疲劳性能好等优点,相比传统钢拉索优势明显,

<sup>\*</sup> 收稿日期:2015-09-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11572117,11502076), National Natural Science Foundation of China(11572117,11502076)

作者简介:康厚军(1977-),四川安岳人,湖南大学副教授,博士

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: kang\_echo@gmail.com

因此,CFRP 斜拉索将有很好的应用前景. 目前,国内外学者已从理论上证明了 CFRP 索相对于钢索的静动力特性有不同程度的改善<sup>[2-4]</sup>,CFRP 索也已投入实际应用<sup>[5-6]</sup>. 截至目前国内外已建成 CFRP 索斜拉桥 6 座,其进一步的应用研究和基础研究已成为国内外研究的一个热点. 我国已成功采用 CFRP 拉索替换钢拉索建造试验性质的人行斜拉桥<sup>[5]</sup>,未来斜拉桥也有采用 CFRP 拉索的趋势,尤其是对于特大跨径桥梁,CFRP 索将具有足够的优势. 然而,我国对于 CFRP 的研究还主要集中在应用加固方面,作为大跨度柔性结构,其动力学问题比较突出,相关研究却很少见到.

斜拉梁结构由于其良好的受力性能和优美的外观被广泛应用于土木工程和海洋工程,如斜拉桥、房屋建筑中的雨棚、塔吊以及桅杆结构等. 由于斜拉梁中索和梁 2 种结构单元有着很大的力学差异,特别是索跟梁的耦合,历来是国内外学者研究的重点和难点. Fung<sup>[7]</sup>通过 Hamilton 原理和有限元法推导出的非线性时变微分方程研究了斜拉梁中索的长度和张力随时间变化的振动问题. Gattulli 等人<sup>[8-9]</sup>通过经典变分公式得到了斜拉梁横向振动的运动控制方程,将其与有限元方法和试验进行对比,并考虑了面内和面外的振动;赵跃宇等人<sup>[10]</sup>利用索-梁组合结构的连接条件和边界条件,建立了索-梁组合结构的约化运动学控制方程,利用 Galerkin 模态截断得到了该系统的多模态离散动力学方程;Wang 等人<sup>[11]</sup>通过 Halmilton 原理得到索梁组合结构的动力学运动方程,通过边界和连续性条件以及分离变量法,得到结构的频率方程和相应的振型表达式,并对固有频率进行了讨论. 这些研究工作都只考虑了梁的横向振动,没有考虑纵向振动问题,并且在索梁连接条件的处理上各不相同,存在较大的局限性.

传递矩阵法(Transfer Matrix Method, 简称 TMM)是 20 世纪 20 年代建立起来的一种用矩阵来描述多输入多输出的线性系统的输出与输入之间关系的方法. 相比于有限元方法,该方法计算精度不随划分段数而改变,许多学者和工程技术人员将传递矩阵法应用于解决工程实际问题,例如 Kang 和 Wang 等人<sup>[12-14]</sup>用传递矩阵法来研究索-拱结构和悬索桥的动力学问题.

针对以上问题和方法,本文将同时考虑索和梁的纵横向振动,利用张紧弦和欧拉梁振动微分方程,在索梁结合处考虑它们的动态平衡并将索端和梁端内力和纵横向位移进行耦合,利用传递矩阵法求解

系统振动的特征值问题. 为了验证本文中索梁理论和传递矩阵法运用的正确性,我们将建立斜拉梁的有限元模型,对本文理论研究和有限元法结果进行对比,对本文的理论和求解方法进行验证. 最后将对 CFRP 索斜拉梁的特征值问题进行参数分析,同时和传统钢索斜拉梁进行对比研究.

## 1 斜拉梁动力学模型

本文所研究的斜拉梁模型如图 1 所示,其中斜拉索初始轴力为  $N_0$ ,  $\alpha$  为拉索倾角,  $v_c, Q_c, u_c$  和  $N_c$  分别为拉索横向振动时的动态位移、剪力、纵向振动时的动态位移和轴力,  $v_b, Q_b, u_b$  和  $N_b$  分别为梁横向振动时的动态位移、剪力、纵向振动时的动态位移和轴力. 为了使梁在斜拉索初始应力的作用下仍能保持水平,在斜拉梁右端部施加竖直向下的力  $f_0 = N_0 \sin \alpha$ ,在工程实际中为了保持梁水平通常用梁的自重来平衡拉索初始应力的分力或设置预拱度.

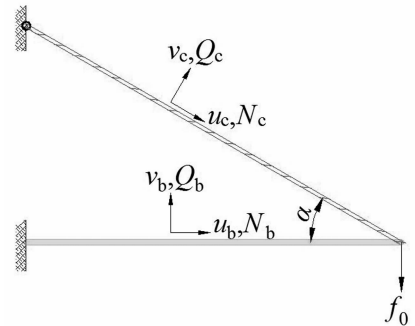


图 1 斜拉梁简化模型

Fig. 1 Reduced model of the cable-stayed beam

众所周知,对于斜拉梁结构内的斜拉索,用一根张紧的弦来描述即可满足工程实际,特别是 CFRP 索,即使跨径非常大、应力非常小,等效弹性模量和切线模量差别也很小<sup>[2]</sup>. 因此本文将利用一根张紧的弦来模拟拉索,不考虑垂度的影响. 斜拉梁面内自由振动,同样不考虑垂度. 可将斜拉梁的振动分解为 4 种振动:索的纵向振动和横向振动、梁的纵向振动和横向振动.

对于索,其纵横向振动微分方程分别为<sup>[15-16]</sup>:

$$E_c A_c \frac{\partial^2 u_c(x_c, t)}{\partial x^2} - \mu_c \frac{\partial^2 v_c(x_c, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$N_0 \frac{\partial^2 v_c(x_c, t)}{\partial x^2} - \mu_c \frac{\partial^2 v_c(x_c, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

梁的纵向振动微分方程与拉索一致,但横向振动应该考虑拉索的初始轴力  $N_0$ . 对其影响,所以应

该用包含轴力影响的梁的弯曲振动理论,其纵横向振动微分方程分别为<sup>[15]</sup>:

$$E_b A_b \frac{\partial^2 u_b(x_b, t)}{\partial x^2} - \mu_b \frac{\partial^2 u_b(x_b, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$E_b I_b \frac{\partial^4 v_b(x_b, t)}{\partial x^4} + N'_b \frac{\partial^2 v_b(x_b, t)}{\partial x^2} + \mu_b \frac{\partial^2 v_b(x_b, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

式中:  $\mu$  为线密度;  $E$  为弹性模量;  $A$  为截面面积;  $I$  为截面惯性矩; 下标  $c$  和  $b$  分别代表索和梁,  $N'_b = N_0 \cos \alpha$  为梁的初始轴力. 利用分离变量法求解以上 2 个偏微分方程, 令:

$$\begin{cases} u_c(x, t) = U_c(x)G_{cu}(t), \\ v_c(x, t) = V_c(x)G_{cv}(t); \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} u_b(x, t) = U_b(x)G_{bu}(t), \\ v_b(x, t) = V_b(x)G_{bv}(t). \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $U_c(x), U_b(x)$  分别为索和梁的纵向振动振型函数;  $V_c(x), V_b(x)$  分别为索和梁的横向振动振型函数. 通过求解偏微分方程(1)~(4)可以得到  $U_c(x), U_b(x), V_c(x)$  和  $V_b(x)$  通解形式为:

$$U_c(x_c) = C_1 \sin(\beta_c x_c) + C_2 \cos(\beta_c x_c), \quad (7)$$

$$V_c(x_c) = C_3 \sin(\delta_c x_c) + C_4 \cos(\delta_c x_c), \quad (8)$$

$$U_b(x_b) = C_5 \sin(\beta_b x_b) + C_6 \cos(\beta_b x_b), \quad (9)$$

$$V_b(x_b) = C_7 \cos(\delta_b x_b) + C_8 \sin(\delta_b x_b) + C_9 \sinh(\epsilon_b x_b) + C_{10} \cosh(\epsilon_b x_b). \quad (10)$$

式中:  $C_i (i = 1, 2, \dots, 10)$  为实常数系数;

$$\beta_c = \omega \sqrt{\frac{\mu_c}{E_c A_c}}; \delta_c = \omega \sqrt{\frac{\mu_c}{N_0}}; \beta_b = \omega \sqrt{\frac{\mu_b}{E_b A_b}};$$

$$\delta_b = \sqrt{\sqrt{\frac{\mu_b \omega^2}{E_b I_b} + \frac{N_b'^2}{4E_b^2 I_b^2}} + \frac{N_b'}{2E_b I_b}};$$

$$\epsilon_b = \sqrt{\frac{\mu_b \omega^2}{E_b I_b} + \frac{N_b'^2}{4E_b^2 I_b^2} - \frac{N_b'}{2E_b I_b}}.$$

根据力-位移关系, 由式(7)~(10)可推导出轴力  $N$ , 转角  $\theta$ , 弯矩  $M$  和剪力  $Q$  的表达式:

$$N_c(x_c) = C_1 E_c A_c \beta_c \cos(\beta_c x_c) - C_2 E_c A_c \beta_c \sin(\beta_c x_c); \quad (11)$$

$$Q_c(x_c) = C_3 N_c \delta_c \cos(\delta_c x_c) - C_4 N_c \delta_c \sin(\delta_c x_c); \quad (12)$$

$$N_b(x_b) = C_5 E_b A_b \beta_b \cos(\beta_b x_b) - C_6 E_b A_b \beta_b \sin(\beta_b x_b); \quad (13)$$

$$\theta_b(x_b) = C_7 \delta_b \cos(\delta_b x_b) - C_8 \delta_b \sin(\delta_b x_b) + C_9 \epsilon_b \cosh(\epsilon_b x_b) + C_{10} \epsilon_b \sinh(\epsilon_b x_b); \quad (14)$$

$$M_b(x_b) = -C_7 E_b I_b \delta_b^2 \sin(\delta_b x_b) - C_8 E_b I_b \delta_b^2 \cos(\delta_b x_b) +$$

$$C_9 E_b I_b \epsilon_b^2 \sinh(\epsilon_b x_b) + C_{10} E_b I_b \epsilon_b^2 \cosh(\epsilon_b x_b); \quad (15)$$

$$Q_b(x_b) = -C_7 E_b I_b \delta_b^3 \cos(\delta_b x_b) + C_8 E_b I_b \delta_b^3 \sin(\delta_b x_b) + C_9 E_b I_b \epsilon_b^3 \cosh(\epsilon_b x_b) + C_{10} E_b I_b \epsilon_b^3 \sinh(\epsilon_b x_b) - C_7 N'_b \delta_b \cos(\delta_b x_b) + C_8 N'_b \delta_b \sin(\delta_b x_b) - C_9 N'_b \epsilon_b \cosh(\epsilon_b x_b) - C_{10} N'_b \epsilon_b \sinh(\epsilon_b x_b). \quad (16)$$

值得注意的是, 式(7)~(16)是索和梁的平面内自由振动的精确解.

## 2 传递矩阵法求解

将式(7)~(16)写成矩阵的形式:

$$\mathbf{t} = \mathbf{TC}. \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{t} = [u_c \ N_c \ v_c \ Q_c \ u_b \ N_b \ v_b \ Q_b \ \theta_b \ M_b]^T$ ;

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{3,3} & T_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{4,3} & T_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{5,5} & T_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{6,5} & T_{6,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{7,7} & T_{7,8} & T_{7,9} & T_{7,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{8,7} & T_{8,8} & T_{8,9} & T_{8,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{9,7} & T_{9,8} & T_{9,9} & T_{9,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{10,7} & T_{10,8} & T_{10,9} & T_{10,10} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6 \ C_7 \ C_8 \ C_9 \ C_{10}]^T$ . 元素  $T_{i,j} (i, j = 1, 2, \dots, 10)$  对应式(7)~(16)中的系数, 具体见附录 A.

根据式(17)可得到最左端的状态矢量:

$$\mathbf{t}_L = \mathbf{T}_0 \mathbf{C}. \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}|_{x=0}$ , 下标 L 代表左端, 因此积分常数矢量  $\mathbf{C}$  可写为:

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_0^{-1} \mathbf{t}_L. \quad (19)$$

斜拉梁整体可视为一段, 状态矢量只传递一次即可. 因此, 本文中斜拉梁体系中最右端的状态向量可写为:

$$\mathbf{t}_R = \mathbf{T}_1 \mathbf{C} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_0 \mathbf{t}_L. \quad (20)$$

然后建立斜拉梁结构最右端索和梁状态矢量的关系, 如图 2 所示. 由索梁铰接、位移协调和力平衡条件得:

$$U_{Rb} - U_{Rc} \cos \alpha - V_{Rc} \sin \alpha = 0,$$

$$N_{Rb} - N_{Rc} \cos \alpha - Q_{Rc} \sin \alpha = 0,$$

$$V_{Rb} + U_{Rc} \sin \alpha - V_{Rc} \cos \alpha = 0,$$

$$Q_{Rb} + N_{Rc} \sin \alpha - Q_{Rc} \cos \alpha = 0,$$

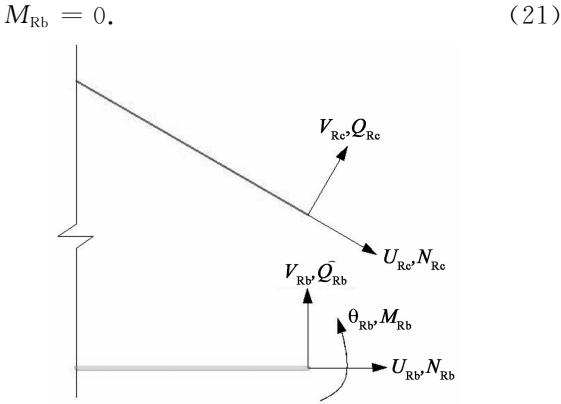


图 2 索梁连接处的位移和内力的分布  
Fig. 2 Distribution of the displacements and forces at the joint of cable and beam

这里,可以定义  $\bar{t}_R$  和  $T_N$ , 使

$$\bar{t}_R = T_N t_R. \tag{22}$$

式中:  $\bar{t}_R = [U_{Rc} \ N_{Rc} \ V_{Rc} \ Q_{Rc} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \theta_{Rb} \ 0]^T$ ;

$$T_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

然后分析斜拉梁左边的边界条件,拉索一般为铰支,而梁可固支也可铰支,所以一般有梁左端固支和铰支两种情况.

对于第一种情况(梁左端固支),左端的状态矢量可表示为:

$$t_L = [0 \ N_{Lc} \ 0 \ Q_{Lc} \ 0 \ N_{Lb} \ 0 \ Q_{Lb} \ 0 \ M_{Lb}]^T. \tag{23}$$

对于第二种情况(梁左端铰支),左端的状态矢量可表示为:

$$t_L = [0 \ N_{Lc} \ 0 \ Q_{Lc} \ 0 \ N_{Lb} \ 0 \ Q_{Lb} \ \theta_{Lb} \ 0]^T. \tag{24}$$

下面讨论第一种情况.

将式(20)代入式(22)得:

$$\bar{t}_R = T_N T_1 T_0^{-1} t_L = T_G t_L. \tag{25}$$

式中:全局传递矩阵  $T_G$  中的元素为  $t_{i,j}$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots, 10$ ),均为圆频率  $\omega$  的函数,经过适当变换,式(25)可转化为以下齐次形式:

$$\mathbf{0} = \tilde{T} \tilde{t}. \tag{26}$$

式中:  $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ;

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -1 & t_{1,2} & 0 & t_{1,4} & 0 & t_{1,6} & 0 & t_{1,8} & 0 & t_{1,10} \\ 0 & t_{2,2} & -1 & t_{2,4} & 0 & t_{2,6} & 0 & t_{2,8} & 0 & t_{2,10} \\ 0 & t_{3,2} & 0 & t_{3,4} & -1 & t_{3,6} & 0 & t_{3,8} & 0 & t_{3,10} \\ 0 & t_{4,2} & 0 & t_{4,4} & 0 & t_{4,6} & -1 & t_{4,8} & 0 & t_{4,10} \\ 0 & t_{5,2} & 0 & t_{5,4} & 0 & t_{5,6} & 0 & t_{5,8} & 0 & t_{5,10} \\ 0 & t_{6,2} & 0 & t_{6,4} & 0 & t_{6,6} & 0 & t_{6,8} & 0 & t_{6,10} \\ 0 & t_{7,2} & 0 & t_{7,4} & 0 & t_{7,6} & 0 & t_{7,8} & 0 & t_{7,10} \\ 0 & t_{8,2} & 0 & t_{8,4} & 0 & t_{8,6} & 0 & t_{8,8} & 0 & t_{8,10} \\ 0 & t_{9,2} & 0 & t_{9,4} & 0 & t_{9,6} & 0 & t_{9,8} & -1 & t_{9,10} \\ 0 & t_{10,2} & 0 & t_{10,4} & 0 & t_{10,6} & 0 & t_{10,8} & 0 & t_{10,10} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{t} = [U_{Rc} \ N_{Rc} \ V_{Rc} \ Q_{Rc} \ N_{Lc} \ Q_{Lc} \ N_{Lb} \ Q_{Lb} \ \theta_{Rb} \ M_{Lb}]^T.$$

要使系统的振动有非零解,即

$$\tilde{t} \neq [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \text{ 则}$$

行列式值  $|\tilde{T}|$  必为 0,即频率方程为  $|\tilde{T}| = 0$ . 实际上,  $10 \times 10$  的矩阵  $\tilde{T}$  可以简化为如下  $5 \times 5$  的矩阵  $\tilde{T}_a$ , 它们有相同的行列式值.

$$\tilde{T}_a = \begin{bmatrix} t_{5,2} & t_{5,4} & t_{5,6} & t_{5,8} & t_{5,10} \\ t_{6,2} & t_{6,4} & t_{6,6} & t_{6,8} & t_{6,10} \\ t_{7,2} & t_{7,4} & t_{7,6} & t_{7,8} & t_{7,10} \\ t_{8,2} & t_{8,4} & t_{8,6} & t_{8,8} & t_{8,10} \\ t_{10,2} & t_{10,4} & t_{10,6} & t_{10,8} & t_{10,10} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

同样,第二种情况也可得到一个  $5 \times 5$  的矩阵

$$\tilde{T}_b = \begin{bmatrix} t_{5,2} & t_{5,4} & t_{5,6} & t_{5,8} & t_{5,9} \\ t_{6,2} & t_{6,4} & t_{6,6} & t_{6,8} & t_{6,9} \\ t_{7,2} & t_{7,4} & t_{7,6} & t_{7,8} & t_{7,9} \\ t_{8,2} & t_{8,4} & t_{8,6} & t_{8,8} & t_{8,9} \\ t_{10,2} & t_{10,4} & t_{10,6} & t_{10,8} & t_{10,9} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

通过让矩阵(27)和(28)的行列式值为零,可得到两种情况下的斜拉梁面内自由振动的各阶频率  $\omega$ ,再将  $\omega$  的值代入式(20)即可求得斜拉梁面内自由振动的各阶振型.

### 3 特征值分析

为研究 CFRP 索斜拉梁的特征值问题,即固有频率和模态,选取如下物理参数:索为 CFRP 索,单位长度质量为  $10.4 \text{ kg/m}$ ,横截面积为  $6.273 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,弹性模量为  $210 \text{ GPa}$ ,初始索力为  $1 \text{ MN}$ ,倾斜角度为  $30^\circ$ ;梁为钢筋混凝土箱梁,长  $100 \text{ m}$ ,单位长度质量为  $4.4 \times 10^4 \text{ kg/m}$ ,横截面面积为  $16.3 \text{ m}^2$ ,截面惯性矩为  $9.8 \text{ m}^4$ ,弹性模量为  $34.5 \text{ GPa}$ .

为了验证本文理论方法在斜拉梁结构中运用的

正确性,我们用有限元软件 ANSYS12.0 建立了同样参数的斜拉梁有限元模型,其中索用 Link1 单元,梁用 Beam3 单元,划分单元数为 200,然后比较本文理论和有限元法得到的频率和振型.表 1 分别列出了通过有限元法和本文理论研究两种情况下(左端梁固支和简支)的斜拉梁的前 5 阶频率.图 3 给出了第一种情况(左端梁固支)的前 5 阶振型.可以发现,两种方法所得的结果几乎完全吻合.因此,表 1 和图 3 不仅可以说明本文理论的正确性,还为下面的 CFRP 索斜拉梁面内自由振动的研究作了铺垫,考虑到工程实际中第一种情况(梁左端固支)的斜拉梁更常见,下面的研究只考虑梁左端固支情况的斜拉梁.

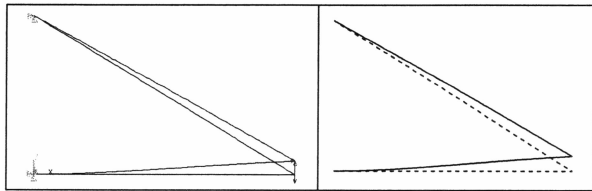
表 1 斜拉梁的前五阶频率

Tab. 1 The first five frequencies of cable-stayed beam

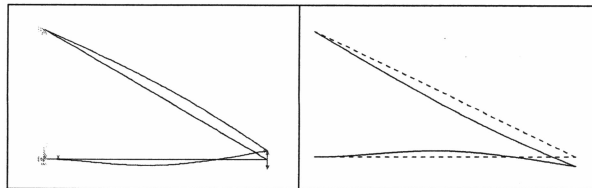
边界条件	方法	前 5 阶频率/Hz				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
第一种情况	本文理论	0.291	1.008	1.345	2.692	2.732
	有限元法	0.290	1.005	1.347	2.692	2.729
	误差/%	0.2	0.3	-0.1	0.0	0.1
第二种情况	本文理论	0.205	0.731	1.345	2.219	2.690
	有限元法	0.204	0.729	1.346	2.214	2.695
	误差/%	0.1	0.3	-0.1	0.3	-0.2

ANSYS 振型

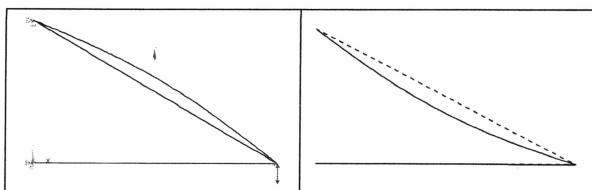
本文理论振型



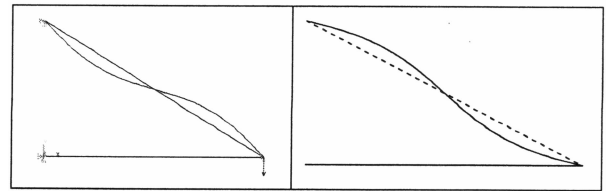
(a) 第 1 阶振型



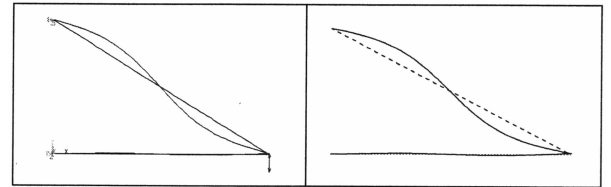
(b) 第 2 阶振型



(c) 第 3 阶振型



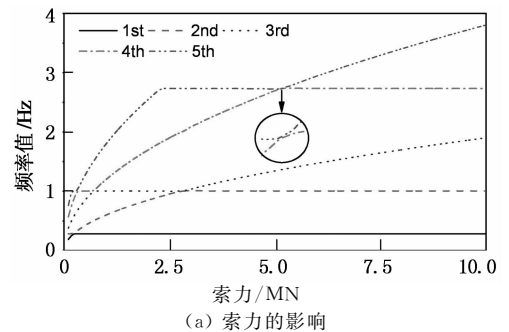
(d) 第 4 阶振型



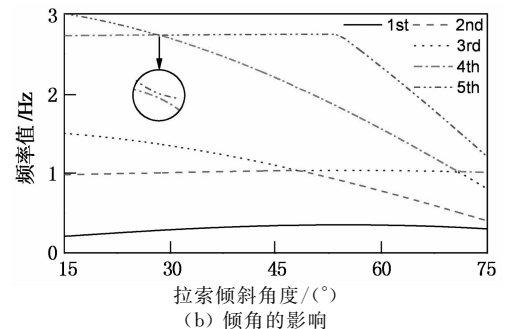
(e) 第 5 阶振型

图 3 梁左端固支的斜拉梁前 5 阶振型

Fig. 3 The first 5 mode shapes of the cable-stayed beam with the beam fixed at left end



(a) 索力的影响



(b) 倾角的影响

图 4 索力和倾角对斜拉梁前 5 阶频率的影响

Fig. 4 Effects of the cable-force and incline angle of cable on the first 5 frequencies of cable-stayed beam

图 4 给出了不同索力和拉索倾斜角度对 CFRP 索斜拉梁面内自由振动的各阶频率的影响.一阶频率几乎不随索力大小而改变,倾角的变化有一定的影响,各高阶频率随索力的增大而增大,随拉索倾斜角度的增大而减小,变化较明显.斜拉梁一阶频率对索力和拉索倾斜角度的变化不敏感,原因主要为斜拉梁结构的第一阶振动以梁的振动为主,而索的振动主要是由梁的振动拖动产生.这时,索对于悬臂梁相当于起一个弹性支承的作用,弹性支承主要由索的轴向刚度和倾斜角度决定,索力的改变对弹性支

承的影响相对较小. 对于 2, 3, 4 和 5 阶的振动, 可从振型看出, 除二阶振型为索与梁的联合振动外, 主要为索的振动, 索力和拉索倾斜角度变化时, 索的参数发生变化, 直接影响到索的振动, 因此这几阶频率变化较明显. 当索力增大时, 斜拉梁整个系统刚度增大, 而拉索倾斜角度增加时, 拉索变长, 其质量也跟着增大, 刚度却减小, 根据等效频率公式  $\omega_{eq} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$ , 频率也就相应地增大和减小了. 另外, 仔细观察会发现所有相邻两阶频率随索力和拉索倾角的变化发生靠近而又分离的现象, 并非两个频率变化曲线交叉, 而是两条频率变化曲线转向了 (Veering 现象), 这时两阶振型会发生快速且连续的交换<sup>[17]</sup>, 并且系统两个模态之间发生能量传递, 很容易发生内共振现象, 这对指导斜拉梁设计, 特别是其振动控制具有重要参考价值.

图 5 给出了斜拉索在不同索力、材料和弹性模量下对斜拉梁结构一阶频率的影响. 其中,  $E_{cc}$  中下标第二个 c 表示 CFRP 索,  $E_{cg}$  中下标 g 表示钢索. 从中可发现, 当采用 CFRP 索时, 索力对一阶频率的影响微乎其微; 当采用钢索且索力小于 0.5 MN 时, 一阶频率随索力的增大而增大, 当索力大于 0.5 MN 时, CFRP 索和钢索斜拉梁的一阶频率随索力变化的曲线几乎是重合的. 这是因为 CFRP 索斜拉梁不论是大索力下还是小索力下其一阶振型均如图 3(a) 所示, 这样一种模态是梁拖动索振动的模态, 所以随着索力的增加其频率基本不变. 当采用钢索时, 由于其质量要比 CFRP 索质量大, 受其影响振型随索力的变化如图 6 所示. 可看到一阶振型的变化过程是由索振动为主到索梁整体振动再到梁振动为主. 因此其一阶频率变化曲线是先增大后持平的变化过程. 另外, CFRP 索斜拉梁一阶频率随拉索弹性模量的增大而增大, 说明可以通过提高拉索弹性模量来提高斜拉梁整体结构的刚度, 这是因为 4 种弹性模量下斜拉梁的振型均如图 3(a) 所示, 此时斜拉梁可以看成是一端固支一端弹簧支撑的梁模型, 其振动频率与弹簧刚度有关, 弹簧刚度越大, 振动频率越大, 反之越小.

图 7 反映了斜拉索在不同材料、索力和弹性模量下对斜拉梁结构二阶和三阶频率的影响. 可以看出 CFRP 索斜拉梁的 4 条曲线均有一个上升段, 之后持平, 持平段曲线特征与图 6 类似. 因此我们猜

测, 上升段的振型是渐变的过程, 当到达持平段后, 振型基本不再变化. 为了验证我们的猜测, 我们提取出弹性模量为 210 GPa 的 CFRP 索斜拉梁索力在 0.3 MN, 0.6 MN 和 1 MN 的二阶振型和索力在 1 MN, 5 MN 和 10 MN 的三阶模态如图 8 所示. 从图 8 可看出随着索力的增加, 第二、三阶振型均是从拉索振动为主到斜拉梁整体振动再到梁振动为主的变化过程, 证明我们的猜测是正确的. 另外, 可以发现使用钢索的斜拉梁要相比于使用 CFRP 索的斜拉梁随着索力的增加较慢进入持平状态, 说明振动阶数越高, 拉索质量对其影响越明显.

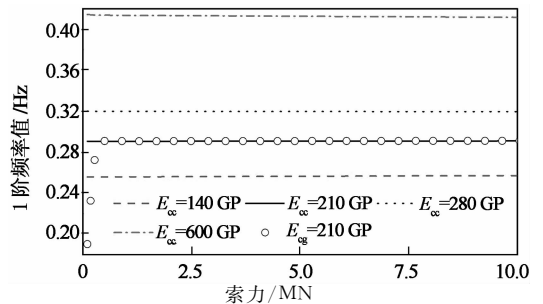


图 5 斜拉索在不同材料、索力和弹性模量下对斜拉梁结构一阶频率的影响  
Fig. 5 Effects of cable with different materials, cable-forces and elasticity modulus on the first frequency of the cable-stayed beam

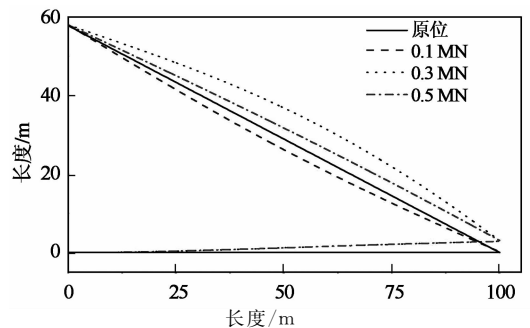


图 6 钢索斜拉梁不同索力作用下的第一阶振型  
Fig. 6 The first mode shapes of the cable-stayed beam with steel cable and different cable-forces

综合分析图 6 和图 8, 可发现索力对斜拉梁结构的动力学特性的影响, 主要体现在索与梁刚度相对变化. 当索力较小时, 拉索振动明显, 随着索力的增大, 索振动慢慢地弱化, 最后变为随梁振动的“摆动”. 这是因为索力增大使拉索的横向刚度显著增大 (应力刚化), 最后拉索所表现出的性质就类似于刚度很大的弹簧.

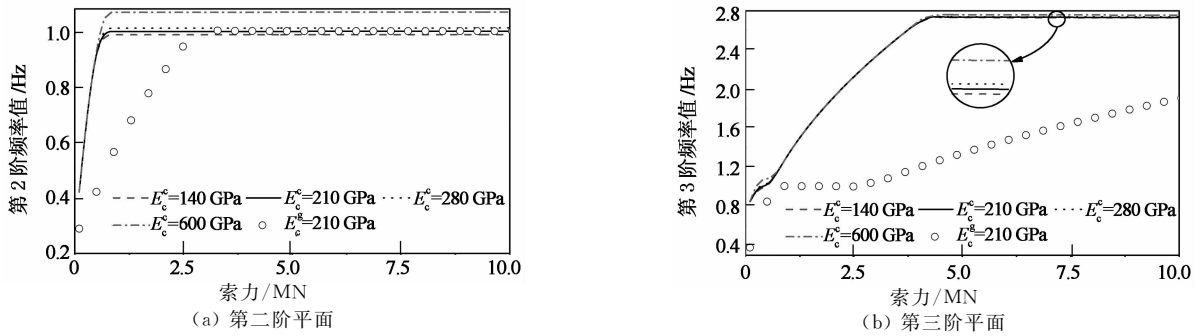


图7 斜拉索在不同材料、索力和弹性模量下对斜拉梁结构第二、三阶平面内自由振动频率的影响  
Fig. 7 Effects of cable with different materials, cable-forces and elasticity modulus on the second and third in-plane free vibration frequencies of cable-stayed beam

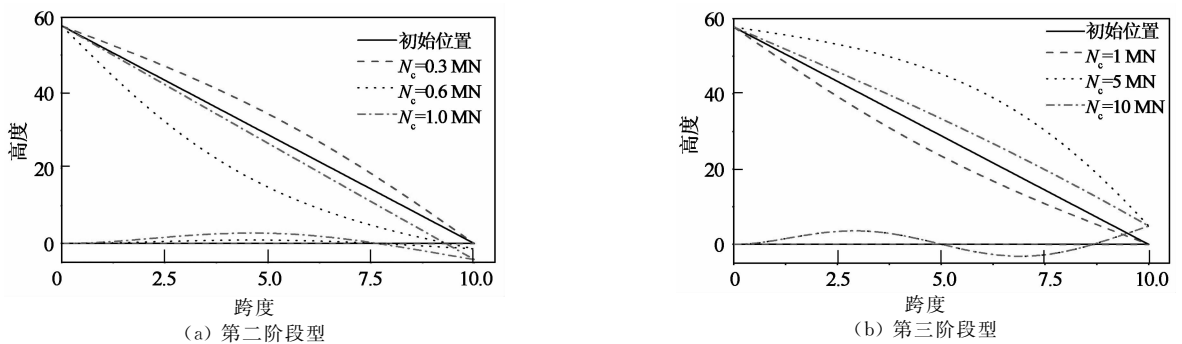


图8 CFRP索斜拉梁在不同索力作用下平面内自由振动的第二、三阶振型

Fig. 8 The second and third in-plane free vibration mode shapes of the cable-stayed beam with CFRP cable and its different forces

## 4 结论

本文建立了不考虑垂度影响的CFRP索斜拉梁面内自由振动的力学模型,利用简单的张紧弦和欧拉梁振动理论,采用分离变量法得到它们的振型函数,通过考虑索梁连接处的动态平衡条件,将索和梁的振动耦合到一起,利用传递矩阵法得到斜拉梁面内自由振动的各阶频率方程,从而求得各阶频率值.最后讨论了斜拉梁面内自由振动在不同索力、拉索倾角和拉索材料的变化情况.这种研究方法不仅将复杂的问题简单化,而且能反映实际工程中斜拉梁应有的振动特性,并由此得到以下结论:

1) CFRP斜拉梁结构的面内第一阶自振频率几乎不受索力变化的影响,但随着拉索倾角的改变有不同程度的变化,而钢索斜拉梁第一阶频率则随索力和倾角变化较大.这说明CFRP索斜拉梁的刚度相对稳定.

2) 斜拉梁结构的面内二阶以上振动模态表现出受索力和倾角变化的敏感性,都可能出现频率变化曲线转向(veering)现象,因此为了避免内共振对

结构产生不利影响,设计或建造斜拉梁时应该避免使用这些可能产生内共振的参数.

3) CFRP索斜拉梁基本动力学性能优于钢索斜拉梁,特别是在较低索力下和高阶频率上尤为突出,并且弹性模量的增大,对结构的一阶频率的影响较大,振动阶数越高,影响越小.由于工程实际中,高阶振动出现的概率要远小于低阶振动,所以高弹性模量的CFRP索在斜拉梁结构中有着更广阔的应用前景.

4) 随着索力的增加,各阶振动的振型均经历从索振动为主到索梁全局振动再到梁振动为主的变化过程,拉索表现出的性质越来越像一根弹簧,这对拉索振动控制具有重要参考意义.

## 参考文献

- [1] ACI 440. 4R-04 Prestressing concrete structures with FRP tendons[S]. Farmington Hills, USA: American Concrete Institute, 2004: 440. 4R-10.
- [2] 梅葵花, 吕志涛. CFRP斜拉索的静力特性分析[J]. 中国公路学报, 2004, 17(2): 43-45.  
MEI Kui-hua, LV Zhi-tao. Static characteristic analysis of CFRP cables[J]. China Journal of Highway and Transport, 2004, 17(2): 43-45. (In Chinese)

- [3] 梅葵花, 吕志涛, 孙胜江. CFRP 拉索的非线性参数振动特性[J]. 中国公路学报, 2007, 20(1): 52-57.  
MEI Kui-hua, LV Zhi-tao, SUN Sheng-jiang. Property of nonlinear parametric vibration of CFRP cables[J]. China Journal of Highway and Transport, 2007, 20(1): 52-57. (In Chinese)
- [4] 康厚军, 赵跃宇, 朱志辉, 等. 强迫激励下 CFRP 斜拉索面内分叉特性[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2014, 41(9): 8-13.  
KANG Hou-jun, ZHAO Yue-yu, ZHU Zhi-hui, *et al.* In-plane bifurcation behavior of inclined CFRP cables subject to external excitation[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2014, 41(9): 8-13. (In Chinese)
- [5] 吕志涛, 梅葵花. 国内首座 CFRP 索斜拉桥的研究[J]. 土木工程学报, 2007, 40(1): 54-59.  
LV Zhi-tao, MEI Kui-hua. First application of CFRP cables for a cable-stayed bridge in China[J]. China Civil Engineering Journal, 2007, 40(1): 54-59. (In Chinese)
- [6] GRACE N F, NAVARRE F C, NACEY R B, *et al.* Design-construction of bridge street bridge-first CFRP bridge in the United States[J]. PCI Journal, 2002, 47(5): 20-35.
- [7] FUNG R, LU L, HUANG S. Dynamic modeling and vibration analysis of a flexible cable-stayed beam structure[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 254(4): 717-726.
- [8] GATTULLI V, MORANDINI M, PAOLONE A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2002, 31: 1281-1300.
- [9] GATTULLI V, LEPIDI M. Nonlinear interactions in the planar dynamics of cable-stayed beam[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: 4729-4748.
- [10] 赵跃宇, 蒋丽忠, 王连华, 等. 索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析[J]. 土木工程学报, 2004, 37(3): 69-72.  
ZHAO Yue-yu, JIANG Li-zhong, WANG Lian-hua, *et al.* The dynamical modelling theory and internal resonance of cable-beam composite structure[J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(3): 69-72. (In Chinese)
- [11] WANG Z Q, YI Z P, LUO Y S. Modeling and nonlinear modal characteristics of the cable-stayed beam[J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2014, 47: 58-69.
- [12] ZHAO Y Y, KANG H J. In-plane free vibration analysis of cable-arch structure[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 172: 363-379.
- [13] KANG H J, ZHAO Y Y, ZHU H P. Out-of-plane free vibration analysis of a cable-arch structure[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332: 907-921.
- [14] WANG Z Q, KANG H J, SUN C S, *et al.* Modeling and parameter analysis of in-plane dynamics of a suspension bridge with transfer matrix method[J]. Acta Mechanica, 2014, 225: 3423-3435.
- [15] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures[M]. 3rd ed. Berkeley, CA, USA: Computers & Structures, Inc, 2003: 368-375.
- [16] HUANH Z H, JONES N P. Damping of taut-cable systems: effects of linear elastic spring support[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, 137: 512-518.
- [17] GATTULLI V, LEPIDI M. Localization and veering in the dynamics of cable-stayed bridges[J]. Computers & Structures, 2007, 85: 1661-1678.

## 附录 A:

$$\begin{aligned}
T_{1,1} &= \sin(\beta_c x_c), T_{1,2} = \cos(\beta_c x_c), \\
T_{2,1} &= E_c A_c \beta_c \cos(\beta_c x_c), \\
T_{2,2} &= -E_c A_c \beta_c \sin(\beta_c x_c), T_{3,3} = \sin(\delta_c x_c), \\
T_{3,4} &= \cos(\delta_c x_c), T_{4,3} = N_c \delta_c \cos(\delta_c x_c), \\
T_{4,4} &= -N_c \delta_c \sin(\delta_c x_c), T_{5,5} = \sin(\beta_b x_b), \\
T_{5,6} &= \cos(\beta_b x_b), T_{6,5} = E_b A_b \beta_b \cos(\beta_b x_b), \\
T_{6,6} &= -E_b A_b \beta_b \sin(\beta_b x_b), T_{7,7} = \sin(\delta_b x_b), \\
T_{7,8} &= \cos(\delta_b x_b), T_{7,9} = \sinh(\epsilon_b x_b), \\
T_{7,10} &= \cosh(\epsilon_b x_b), \\
T_{8,7} &= [-E_b I_b \delta_b^2 - N'_b] \delta_b \cos(\delta_b x_b), \\
T_{8,8} &= [E_b I_b \delta_b^2 + N'_b] \delta_b \sin(\delta_b x_b), \\
T_{8,9} &= [E_b I_b \epsilon_b^2 - N'_b] \epsilon_b \cosh(\epsilon_b x_b), \\
T_{8,10} &= [E_b I_b \epsilon_b^2 - N'_b] \epsilon_b \sinh(\epsilon_b x_b), \\
T_{9,7} &= \delta_b \cos(\delta_b x_b), T_{9,8} = -\delta_b \sin(\delta_b x_b), \\
T_{9,9} &= \epsilon_b \cosh(\epsilon_b x_b), T_{9,10} = \epsilon_b \sinh(\epsilon_b x_b), \\
T_{10,7} &= -E_b I_b \delta_b^2 \sin(\delta_b x_b), \\
T_{10,8} &= -E_b I_b \delta_b^2 \cos(\delta_b x_b), \\
T_{10,9} &= E_b I_b \epsilon_b^2 \sinh(\epsilon_b x_b), \\
T_{10,10} &= E_b I_b \epsilon_b^2 \cosh(\epsilon_b x_b).
\end{aligned}$$