

文章编号:1674-2974(2016)09-0026-10

## 样条有限点法分析旋转变截面 Euler 梁 弯曲自由振动问题\*

刘 鹏<sup>1</sup>, 刘红军<sup>1†</sup>, 林 坤<sup>1</sup>, 秦 荣<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055; 2. 广西大学 土木建筑工程学院, 广西 南宁 530004)

**摘 要:**基于 Euler-Bernoulli 梁理论, 采用样条有限点法建立旋转变截面梁弯曲振动分析新模型. 通过沿梁轴线均匀布置一定数量的样条节点对变截面梁样条离散化, 采用三次 B 样条函数对变截面梁的位移场进行插值. 考虑截面尺寸变化和旋转离心刚度效应的影响, 基于 Hamilton 原理推导出旋转变截面梁计算模型的总刚度和总质量矩阵表达式, 编制程序对旋转变截面梁动力特性进行分析, 并建立 ANSYS 有限元模型进行比较验证. 结果表明: 本文解答与文献和有限元解答吻合良好, 本文模型具有计算精度高、建模效率高、边界条件简单和程序编制方便的优点, 可适用于不同边界约束、截面变化率、截面变化类型、旋转角速度和轮毂半径条件下的旋转变截面梁的弯曲自由振动问题. 参数分析表明截面变化率和旋转角速度对旋转变截面梁动力特性有重要影响.

**关键词:** Euler-Bernoulli 梁理论; 旋转变截面梁; 弯曲自由振动; 样条有限点法

**中图分类号:** TU311.3

**文献标识码:** A

## Spline Finite Point Method for Free Bending Vibration Analysis of Rotating Tapered Euler-Bernoulli Beams

LIU Peng<sup>1</sup>, LIU Hong-jun<sup>1†</sup>, LIN Kun<sup>1</sup>, QIN Rong<sup>2</sup>

(1. Shenzhen Graduate School, Harbin Institute of Technology, Shenzhen, Guangdong 518055, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi Univ, Nanning, Guangxi 530004, China)

**Abstract:** Based on the Euler-Bernoulli beam theory (EBT), a new model for free bending vibration problems of rotating tapered beams using spline finite point method (SFPM) was investigated. The beam was discretized by a set of uniformly scattered spline nodes along the beam axis direction instead of meshes, and the displacement field was approximated by the cubic B-spline interpolation functions. Both of the variations of cross-sectional dimension and the rotating centrifugally stiffened effect were considered in the proposed model, and the global stiffness and mass matrices of the structures were deduced based on the Hamilton principle. Computer programs were compiled to study the dynamic properties of rotating tapered beams. The finite element model (FEM) for the rotating tapered beams by using ANSYS was also built for validating the proposed model. The results show that the present results agree very well with the results of other reported literatures and the FEM, and the proposed model has the advantages of good computational

\* 收稿日期: 2015-10-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51178153), National Natural Science Foundation of China(51178153)

作者简介: 刘 鹏(1983-), 男, 江西会昌人, 哈尔滨工业大学博士生

† 通讯联系人, E-mail: liuhongjun@hit.edu.cn

accuracy, high modeling efficiency, simple boundary conditions, and convenience for compiling computer program. It is capable of studying the free bending vibration of rotating tapered beams with the variation of boundary conditions, taper ratios, cross-sectional types, rotating speeds, and hub radius. Both the taper ratios and rotating speeds have important roles on the dynamic properties of rotating tapered beams through parameter analysis.

**Key words:** Euler-Bernoulli beam theory; rotating tapered beam; free bending vibration; spline finite point method

旋转变截面梁结构,如风力机叶片、直升机螺旋桨等,在机械和航空航天工程中应用广泛,其分析模型可等效为变截面梁的绕轴旋转运动.而梁的绕轴旋转运动产生离心刚化效应,对旋转变截面梁的动力特性产生重要影响,有必要对其动力特性进行深入研究.对于变截面细长梁的弯曲振动问题,可以忽略截面剪切变形和转动惯量效应的影响,采用 Euler-Bernoulli 梁理论(EBT)建立模型进行分析<sup>[1]</sup>.

旋转变截面梁弯曲自由振动分析需要考虑梁的截面特性(面积、惯性矩)变化和绕轴转动产生的离心力变化对梁的动力特性的影响,导致求解变截面 Euler 梁振动微分方程趋于复杂,且难于获得解析解,必须借助数值分析方法.国内外学者针对变截面梁振动问题开展了大量的数值分析方法研究.

Shahba 等<sup>[1]</sup>基于微分变换单元法(DTEM)和微分低阶求积法(DEQL)建立轴向功能梯度变截面 Euler 梁的振动分析模型,主要研究截面变化率参数等对轴向功能梯度变截面梁的动力特性和临界荷载的影响. Ozgumus 等<sup>[2-3]</sup>基于微分变换法(DTM)建立旋转截面 Euler 梁的振动分析模型. Rajasekaran<sup>[4]</sup>基于 DTM 和微分求积单元法(DQEM)建立旋转轴向功能梯度变截面 Euler 梁的振动分析模型,文中作者分析截面变化率、轴向功能梯度指数和旋转角速度及端部集中质量等参数对旋转变截面轴向功能梁自振频率的影响. Zarrinzadeh 等<sup>[5]</sup>和 Attarnejad 等<sup>[6]</sup>基于有限单元法(FEM)建立旋转变截面 Euler 梁的振动分析模型,文中作者提出一个新插值函数对旋转变截面梁的位移场进行插值,该模型具有一定的计算精度,但在较高截面变化率情况下,需划分较多结构单元,建模和计算效率均下降明显. Banerjee 等<sup>[7-8]</sup>基于谱单元法(或称动态刚度法)建立旋转变截面 Euler 梁的分析模型,该方法与传统有限元方法相比,需要更少的单元且可以获得较高计算精度,但建模比较复杂.其他学者采用有限差分法<sup>[9]</sup>、摄动法<sup>[10]</sup>和其他数值方法<sup>[11-13]</sup>建立模

型分析旋转或非旋转变截面和等截面梁的自由振动及稳定问题.

广西大学秦荣<sup>[14-15]</sup>于 1979 年提出用于结构分析的样条有限点法(SFPM),研究表明 SFPM 具有不需划分结构单元,边界处理方便,计算精度和效率较高等优点,可对梁、板壳等结构进行分析<sup>[16-17]</sup>.

对旋转变截面 Euler 梁的弯曲振动问题,并未见有文献采用 SFPM 进行建模分析.基于 Euler 梁理论,本文作者首次采用 SFPM 建立旋转变截面 Euler 梁的弯曲振动分析模型,针对不同截面高、宽度变化率的变截面矩形截面梁,考虑旋转动力刚化效应的影响,推导出本文旋转变截面 Euler 梁的 SFPM 模型的总刚度和总质量矩阵的表达式.编制计算程序进行算例分析,并验证本文模型正确性.研究样条节点个数对计算精度的影响.分析截面尺寸变化参数、旋转角速度参数、轮毂半径参数等对旋转变截面梁动力特性的影响,得到一些结论.

## 1 旋转变截面 Euler 梁 SFPM 计算模型

### 1.1 旋转变截面 Euler 梁理论

如图 1 所示矩形变截面梁,以常角速度  $\Omega$  绕  $z_0-z_0$  轴做旋转运动,忽略旋转梁刚体运动和弯曲变形耦合二阶效应,且不考虑梁自重影响,根据 EBT 理论,旋转变截面梁的弯曲振动变形为  $w = w(x, t)$ . 假定梁跨为  $L$ ,轮毂半径为  $R$ ,梁的弹性模量  $E$  和材料密度  $\rho$  沿轴线保持为常数,变截面梁截面面积  $A(x)$  和惯性矩  $I(x)$  沿着梁轴线按幂函数连续变化,表达式为

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{c_0 x}{L}\right)^{mr},$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{c_0 x}{L}\right)^{mr+2}, \quad (1a)$$

$$A_0 = b_0 h_0, I_0 = \frac{1}{12} b_0 h_0^3. \quad (1b)$$

式中:  $c_0$  为梁截面宽度或者高度沿着梁轴线的渐变

系数;  $b_0, h_0$  分别为  $x = 0$  处的梁截面宽度和高度;  $A_0, I_0$  分别为  $x = 0$  处的梁截面面积和绕  $y$  轴惯性矩;  $mr$  可取 1 或 2, 代表着不同的截面变化类型, 当  $mr = 1$  时, 表示为矩形截面宽度保持不变, 而高度沿轴线线性变化; 当  $mr = 2$  时, 表示为矩形截面宽度和高度沿轴线均线性变化。

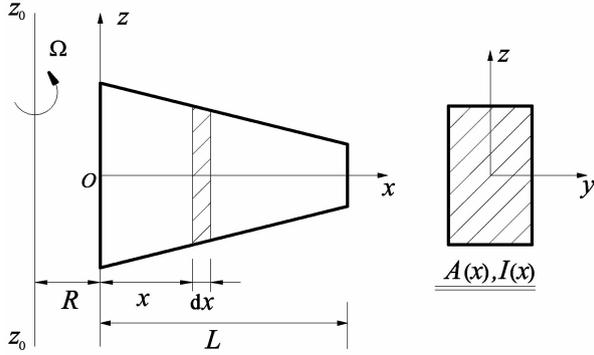


图 1 旋转变截面梁示意图

Fig. 1 Sketch of rotating tapered beams

将(1a)式按幂函数多项式展开:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{mr} \tilde{A}_i x^i, I(x) = \sum_{j=0}^{mr+2} \tilde{I}_j x^j. \quad (2)$$

式中:  $\tilde{I}_i, \tilde{A}_i$  为与  $A(x), I(x)$  多项式展开的相关的系数, 当  $mr = 1$  时, 可得  $\tilde{A}_2 = \tilde{I}_4 = 0$ ; 当  $mr = 2$  时, 可得  $\tilde{A}_i \neq 0 (i = 0, 1, 2), \tilde{I}_i \neq 0 (i = 0, \dots, 4)$ 。

如图 1 所示, 变截面梁任意截面的由旋转运动产生的离心力表示为:

$$T(x) = \int_x^L \rho A(x) (R+x) \Omega^2 dx \quad (3)$$

可展开为:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{mr+2} \tilde{T}_i x^i \quad (4)$$

式中:  $\tilde{T}_i$  为(3)式中  $T(x)$  积分展开多项式对应的常数项和系数, 随  $mr = 1$  或  $mr = 2$  取不同的值。

旋转变截面 Euler 梁弯曲自由振动的总应变能和总动能表达式为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + T(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dx \quad (5)$$

利用 Hamilton 原理, 可得

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) = \int_{t_1}^{t_2} \delta(U - T) = 0 \quad (6)$$

由(6)式, 可得无外荷载作用且不考虑阻尼时的旋转变截面 Euler 梁的弯曲自由运动总势能泛函表

达式<sup>[18]</sup>:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + T(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2w^T(\rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2})] dx \quad (7)$$

### 1.2 旋转变截面 Euler 梁 SFPM 计算格式

基于 SFPM 的建模离散方法<sup>[14]</sup>, 对图 1 所示的旋转变截面梁沿轴线  $x$  方向进行均匀样条离散化, 离散示意图如图 2 所示, 可得

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = L; \quad (8)$$

$$x_i = x_0 + ih_x, h_x = L/N$$

式中:  $x_i$  为样条节点坐标;  $h_x$  为样条离散步长;  $N$  为样条节点数。

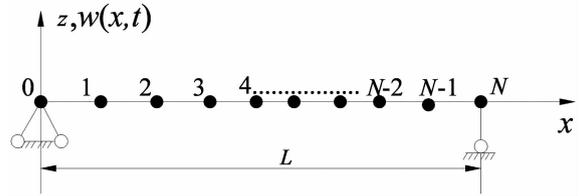


图 2 旋转变截面梁沿轴线样条离散化

Fig. 2 Spline discretization of rotating tapered beams

采用三次 B 样条基函数对旋转变截面 Euler 梁的位移场  $w = w(x, t)$  进行插值, 有:

$$w = w(x, t) = [\varphi(x)]\{a(t)\} = [\varphi]\{a\} \quad (9)$$

式中:

$$[\phi] = [\phi_{-1} \quad \phi_0 \quad \phi_1 \quad K_{\phi, N} \quad \phi_{N+1}]_{1 \times (N+3)}$$

$$[a] = [a_{-1} \quad a_0 \quad a_1 \quad K \quad a_N \quad a_{N+1}]_{(N+3) \times 1}^T \quad (10)$$

式中:  $[\phi]$  为一组由三次 B 样条函数构成的样条基函数;  $[a]$  为样条节点广义参数. 本文采用广义参数法构造出适合各种边界条件的样条基函数<sup>[14]</sup>, 将  $[\phi]$  展开可写为:

$$[\phi] = [\varphi_{3, -1} \quad \varphi_{3, 0} \quad \dots \quad \varphi_{3, N} \quad \varphi_{3, N+1}] [Q_s]$$

$$= [\varphi_{3, i \times (N+3)}] [Q_s] \quad (11)$$

式中:  $[Q_s]$  为  $(N+3) \times (N+3)$  阶的转换矩阵;  $\varphi_{3, i}$  为与样条节点和离散步长相关的三次 B 样条函数; 可展开为:

$$\varphi_{3, i} = \phi_3 \left(\frac{x}{h_x} - i\right) \quad (i = -1, 0, \dots, N+1) \quad (12)$$

$$[Q_s] = \text{diag}([g], [I], [h]) \quad (13)$$

式中:  $[I]$  为  $(N-3) \times (N-3)$  阶的单位矩阵;

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[h] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

本文采用的样条基函数  $[\phi]$  满足边界条件<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} \phi_{-1}(0) &= 0 (i \neq -1), \phi'_{-1}(0) = 0 (i \neq -1, 0) \\ \phi_{N+1}(L) &= 0 (i \neq N+1), \\ \phi'_{N+1}(L) &= 0 (i \neq N, N+1) \end{aligned} \quad (15)$$

对式(7)求导,得:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [\phi'']\{a\}; \frac{\partial w}{\partial x} = [\phi']\{a\}; \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [\phi]\{\ddot{a}\} \quad (16)$$

将(9)和(16)代人(7)可得旋转变截面 Euler 梁的样条离散化后的弯曲自由振动总势能泛函为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{a\}^T [K] \{a\} - \\ &\{a\}^T (\{f(t)\} - [M] \{\ddot{a}\}) \end{aligned} \quad (17)$$

式中:

$$[K] = [K_b] + [K_g]$$

$$[K_b] = \int_0^L EI(x) [\phi'']^T [\phi''] dx$$

$$[K_g] = \int_0^L T(x) [\phi']^T [\phi'] dx$$

$$[M] = \int_0^L \rho A(x) [\phi]^T [\phi] dx \quad (18)$$

式中:  $[K_b]$ ,  $[K_g]$  分别为弯曲刚度和几何刚度矩阵,  $[K]$ ,  $[M]$  分别为总刚度和总质量矩阵, 均为  $(N+3) \times (N+3)$  阶矩阵;  $\{a\}$ ,  $\{\ddot{a}\}$  为  $(N+3) \times 1$  阶样条节点广义位移、加速度参数向量。

对式(17), 利用变分原理, 可得

$$\delta \Pi = \partial \Pi / \partial \{a\} = 0 \quad (19)$$

旋转变截面 Euler 梁样条离散化的弯曲自由振动方程为:

$$[M] \{\ddot{a}\} + [K] \{a\} = \{0\} \quad (20)$$

假定变截面 Euler 梁轴线上各节点均按相同的频率作简谐振动, 并令  $\{a(t)\} = \{\varphi\} \sin(\omega t + \theta)$ , 并代人(21)式, 可得频率方程为:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\varphi\} = \{0\} \quad (21)$$

式中:  $\{\varphi\}$  为样条广义特征向量,  $\omega$  为旋转变截面 Euler 梁横向自由振动频率值。

### 1.3 刚度、质量矩阵计算

将(2)和(4)代人(18)式, 可得旋转变截面 Euler 梁的弯曲刚度、几何刚度矩阵和总质量矩阵的展开式为:

$$[K_b] = \int_0^L EI(x) [\phi'']^T [\phi''] dx = E \sum_{m=0}^{mr+2} \tilde{I}_m [A_{x,m}]$$

$$[K_g] = \int_0^L T(x) [\phi']^T [\phi'] dx = \sum_{p=0}^{mr+2} \tilde{T}_p [C_{x,p}]$$

$$[M] = \int_0^L \rho A(x) [\phi]^T [\phi] dx = \rho \sum_{n=0}^{mr} \tilde{A}_n [F_{x,n}] \quad (22)$$

式中:

$$[A_{x,m}] = \int_0^L x^m [\phi'']^T [\phi''] dx = [Q_s]^T A_{x,m} [Q_s]$$

$$[C_{x,p}] = \int_0^L x^p [\phi']^T [\phi'] dx = [Q_s]^T C_{x,p} [Q_s] \quad (23)$$

$$[F_{x,n}] = \int_0^L x^n [\phi]^T [\phi] dx = [Q_s]^T F_{x,n} [Q_s]$$

$$A_{x,m} = \int_0^L x^m [\varphi_{3,i}']^T [\varphi_{3,k}'] dx, (m = 0, 1, \dots, mr+2)$$

$$C_{x,p} = \int_0^L x^p [\varphi_{3,i}]^T [\varphi_{3,k}] dx, (p = 0, 1, \dots, mr+2)$$

$$F_{x,n} = \int_0^L x^n [\varphi_{3,i}]^T [\varphi_{3,k}] dx, (n = 0, 1, \dots, mr)$$

$$i, k = -1, 0, 1, \dots, N, N+1 \quad (24)$$

式中:  $A_{x,m}$ ,  $F_{x,n}$ ,  $C_{x,p}$  均为  $(N+3) \times (N+3)$  阶矩阵, 是推导本文旋转变截面 Euler 梁分析模型的重要矩阵, 可采用分部积分法进行计算, 具体计算方法可参考文献[14]第一章的内容。

由(22)~(24)式可知, 本文给出的旋转变截面 Euler 梁 SFPM 计算模型的  $[K_b]$ ,  $[K_g]$  和  $[M]$  矩阵的推导过程非常方便, 有别于传统有限元方法, 本文方法无需进行单元划分和单元刚度集成等过程, 且自由度少, 可以显著提高建模和计算效率。

## 2 边界条件

由式(15)给出样条基函数特性, 本文旋转变截面 Euler 梁的 SFPM 计算模型的边界条件表示为:

(a) 两端简支梁(P-P 边界)

$$w_{x=0} = w_{x=L} = 0 \Rightarrow a_{-1} = a_{N+1} = 0 \quad (25)$$

(b) 两端固支梁(C-C 边界)

$$\begin{cases} w_{x=0} = w'_{x=0} = 0 \\ w_{x=L} = w'_{x=L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = a_0 = 0 \\ a_N = a_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

(c)一端固支一端简支梁(C-P边界)

$$\begin{cases} w_{x=0} = w'_{x=0} = 0 \\ w_{x=L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = a_0 = 0 \\ a_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

(c)悬臂梁(C-F边界)

$$w_{x=0} = w'_{x=0} = 0 \Rightarrow a_{-1} = a_0 = 0 \quad (28)$$

以悬臂梁为例,根据(28)式,需处理广义参数  $a_{-1}, a_0$  所对应总刚度和总质量矩阵的前两行两列,就可满足 C-F 边界. 处理方法采用缩减矩阵法,即直接将对应的行列删去,对于悬臂梁,经过边界处理后的总刚度和总质量矩阵缩减为维数为  $(N+1) \times (N+1)$  的矩阵.

将通过处理边界条件后的  $[K], [M]$  矩阵代入旋转变截面 Euler 梁的频率方程(21),可计算得到频率  $\omega_i$  及广义振型参数  $\{\varphi_i\}$ ,将  $\{\varphi_i\}$  代人(9)式,就可得到变截面 Euler 梁的振动模态.

### 3 算例分析

假定变截面梁左端( $x=0$ 处)截面尺寸  $b_0 \times h_0 = 0.02 \text{ m} \times 0.04 \text{ m}$ ,梁长度  $L=1 \text{ m}$ ;材料为钢,密度  $\rho=7900 \text{ kg/m}^3$ ,弹性模量  $E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,泊松比  $\nu=0.3$ ;

文献[2]基于微分变换法(DTM)建立旋转变截面悬臂梁的振动分析模型.文献[4]基于DTM和微分求积单元法(DQEM)两种方法建立旋转变截面轴向功能梯度梁的振动分析模型.本文采用SFPM建立旋转变截面 Euler 梁的计算模型,并与文献解答相比较,以验证本文方法的正确性和精确性.

同时,为验证本文模型的有效性,本文还采用通用有限元软件 ANSYS 建立了变截面梁的有限元(FEM)模型,如图3所示,采用实体单元 SOLID64 建模,梁截面按  $4 \times 4$  网格划分,沿轴向划分为200个梁段,共计3200个单元;在考虑旋转角速度产生预应力效应的基础上,对变截面梁进行模态分析,可得到旋转变截面梁自振频率的 FEM 解答.

定义无量纲系数:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}}, \delta = \frac{R}{L}, \lambda = \Omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}}$$

#### 算例1 样条节点数 $N$ 取值讨论

本算例分析本文旋转梁分析模型随样条节点数  $N$  变化的收敛情况.计算参数为:C-F边界旋转变截面 Euler 梁(悬臂梁),  $mr=2, \delta=0$ .采用 SFPM

建立旋转变截面梁分析模型,表1给出不同系数  $c_0, \lambda$  取值下,  $N$  值变化时旋转变截面悬臂梁的前3阶频率系数,并给出文献[4]DQEM 解答和 FEM 解答作为比较验证.图4给出旋转变截面悬臂梁前2阶频率系数随  $N$  值的变化情况.

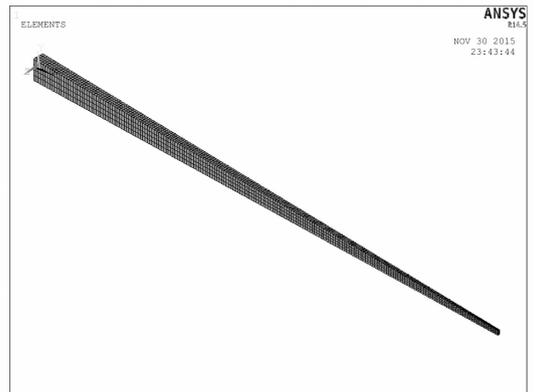


图3 变截面梁有限元模型  
Fig. 3 Finite element model for tapered beams

由表1计算结果可知,本文 SFPM 模型的频率解答与文献解<sup>[4]</sup>和 FEM 解答吻合良好.当取较小的样条离散节点数时( $N=5$ ),本文模型的1阶频率解答也可获得较高的计算精度.而对任意阶频率,当取  $N=15$  时,本文模型对不同截面变化率和旋转角速度下的旋转梁的各阶频率解答均可获得较高的计算精度(小数点后面3~4位有效数字).如图4所示,当  $N > 15$  时,增加样条离散节点数  $N$  对计算精度提高无影响,却需耗费更多的计算时间.故在本文其他算例分析中统一取  $N=15$ ,这说明, SFPM 具有比文献<sup>[4]</sup>模型和 FEM 模型更高的建模和计算效率.

#### 算例2 截面变化系数 $c_0$ 对旋转变截面 Euler 梁自振频率影响

本算例分析截面变化系数  $c_0$  对不同边界旋转变截面 Euler 梁的自振频率的影响.计算参数:  $\delta=0, \lambda=5, N=15$ .两种截面变化类型:1)截面高度线性变化:  $mr=1$ ;2)截面高度、宽度同时线性变化:  $mr=2$ .

表2和表3分别给出按照本文 SFPM 建模和计算得到的不同边界下旋转等截面梁和 C-F 边界旋转变截面梁的前三阶频率,并与文献<sup>[4]</sup>DQEM 解答和 FEM 解答相比较.表4分别给出简支边界(P-P)和固支边界(C-C)旋转变截面梁的前三阶频率的 SFPM 解和 FEM 解.图5给出了  $c_0$  取不同值时旋转变截面悬臂梁的前三阶频率值和归一化后的一阶振型模态曲线.

表 1 样条节点数  $N$  变化旋转变截面悬臂梁无量纲频率系数  $\bar{\omega}_i (mr = 2, \delta = 0)$

Tab. 1 Non-dimensional frequencies for rotating tapered cantilever beams with respect to variation of spline node number  $N$

$N$	$c_0 = 0, \lambda = 0$			$c_0 = 0.5, \lambda = 5$		
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
5	3.516 1	22.049 1	62.110 4	7.290 2	22.645 9	51.934 3
15	3.516 0	22.034 6	61.700 7	7.290 1	22.636 1	51.694 8
25	3.516 0	22.034 5	61.697 6	7.290 1	22.636 0	51.692 2
文献解 <sup>[4]</sup>	3.516 0	22.034 5	61.697 2	7.290 1	22.636 0	51.691 8
FEM	3.516 6	21.881 5	60.591 2	7.289 0	22.567 5	51.226 7
-----						
$N$	$c_0 = 0.5, \lambda = 10$			$c_0 = 0.8, \lambda = 10$		
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
5	11.941 7	30.034 0	60.211 6	13.055 0	28.081 5	50.729 5
15	11.941 5	30.030 0	60.042 4	13.055 0	28.075 3	50.498 2
25	11.941 5	30.029 9	60.040 2	13.055 0	28.075 2	50.496 0
文献解 <sup>[4]</sup>	11.941 5	30.029 9	60.039 9	13.055 0	28.075 2	50.495 6
FEM	11.936 5	29.964 7	59.613 9	13.049 9	28.034 4	50.285 3

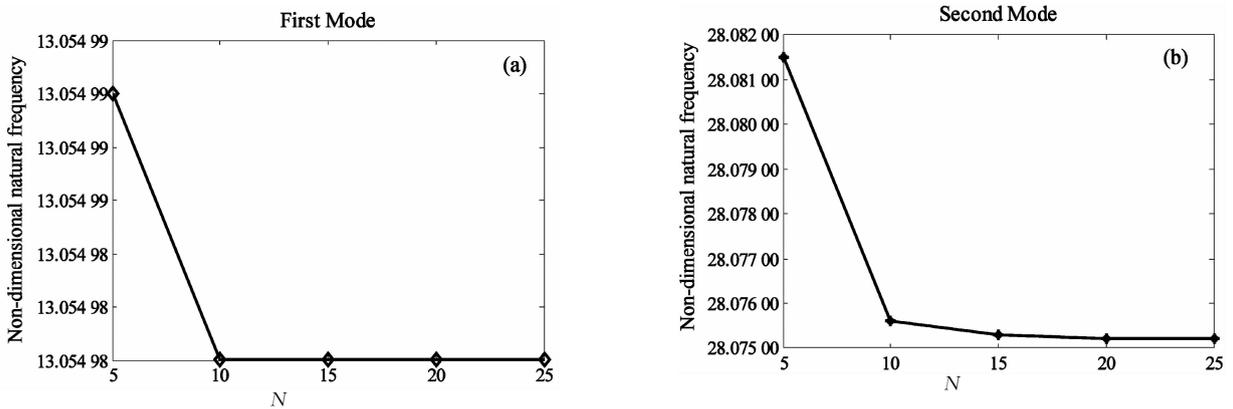


图 4 不同样条节点数  $N$  下旋转变截面悬臂梁无量纲频率系数  $\bar{\omega}_i (c_0 = 0.8, mr = 2, \delta = 0, \lambda = 10)$

Fig. 4 The variation of non-dimensional frequencies  $\bar{\omega}_i$  of rotating tapered cantilever beams with respect to spline node number  $N (c_0 = 0.8, mr = 2, \delta = 0, \lambda = 10)$

由表 2 和表 3 数据可知,C-F 边界下,旋转变截面悬臂梁的自振频率的 SFPM 解答与文献解和 FEM 解吻合良好,具有较高的计算精度.由表 3 数据和图 5(a)可知,保持  $\lambda = 5, \delta = 0$  不变,随着  $c_0$  的增大,旋转变截面悬臂梁的基频和高阶频率分别呈增大和减小趋势;根据图 5(b)可知,随系数  $c_0$  增大,旋转变截面悬臂梁的一阶振型模态曲率也随之明显增大,主要由于  $c_0$  增大导致变截面梁截面抗弯刚度沿轴线方向不断减小所造成的.

由表 4 可知,P-P 边界和 C-C 边界下,按本文 SFPM 模型计算得到的旋转变截面梁的自振频率解答与 FEM 解答吻合良好,各阶频率均随  $c_0$  的增大而减小,且同等截面旋转梁相比较,各阶频率的变化幅度基本相同;不同边界条件下的旋转变截面梁在  $mr = 2$  和  $mr = 1$  两种截面变化类型下的频率解答稍有差异,对 C-F 边界旋转梁,  $mr = 2$  条件下频率值要大于  $mr = 1$  的情况;对 P-P 和 C-C 边界旋转

梁,  $mr = 2$  条件下的频率值要稍微小于  $mr = 1$  的情况.

应注意到,对 C-C 边界旋转变截面梁的自振频率解答,随截面变化系数  $c_0$  的增大,FEM 模型解答与本文 SFPM 解答相比较,高阶频率吻合较好,而基频的相对误差却随  $c_0$  增大而明显增大(表 4 中括号内数值),当  $c_0 = 0.8, mr = 1$  时,基频的最大误差为 16%;在 FEM 模型中,通过增加单元数,并不能有效提高其计算精度,反而降低计算效率,而对本文 SFPM 模型,只需取  $N=15$ ,对任意截面变化率下的旋转梁,其频率解答均可获得较高的计算精度和效率.

本算例结果表明:截面变化系数  $c_0$  对旋转变截面梁的自振频率有重要影响,同时也验证了本文旋转变截面梁的 SFPM 分析模型可适用于不同边界、不同截面变化率下的旋转和非旋转变截面 Euler 梁的自由振动问题,且具有较高的计算效率和精度.

表 2 旋转等截面 Euler 梁无量纲频率系数  $\tilde{\omega}_i$  ( $c_0 = 0, \delta = 0, \lambda = 5$ )  
 Tab. 2 Non-dimensional frequencies  $\tilde{\omega}_i$  of rotating uniform beams ( $c_0 = 0, \delta = 0, \lambda = 5$ )

$\tilde{\omega}_i$	P-P			C-C			C-F		
	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM
$\tilde{\omega}_1$	13.095 4	13.095 3	13.074 2	24.544 3	24.544 2	23.467 7	6.449 5	6.449 4	6.448 1
$\tilde{\omega}_2$	43.352 1	43.351 3	42.978 8	64.804 4	64.801 2	63.877 7	25.446 2	25.446 1	25.304 1
$\tilde{\omega}_3$	92.866 1	92.856 1	90.936 9	124.392 8	124.366 7	122.858 3	65.208 3	65.205 0	64.146 8

表 3  $c_0$  变化对旋转变截面悬臂梁无量纲频率系数  $\tilde{\omega}_i$  的影响 ( $\delta = 0, \lambda = 5$ )  
 Tab. 3 Effect of taper ratio  $c_0$  on non-dimensional frequencies  $\tilde{\omega}_i$  for rotating tapered cantilever beams ( $\delta = 0, \lambda = 5$ )

$c_0$	$\tilde{\omega}_i$	$mr = 1$			$mr = 2$		
		$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$
0.2	SFPM	6.539 1	24.096 2	59.753 3	6.696 9	24.347 9	59.979 3
	文献解 <sup>[4]</sup>	6.539 1	24.096 1	59.750 4	6.696 9	24.347 8	59.976 3
	FEM	6.538 2	23.991 2	58.969 0	6.695 7	24.239 2	59.184 3
0.4	SFPM	6.662 1	22.661 3	53.981 8	7.049 8	23.209 0	54.525 9
	文献解 <sup>[4]</sup>	6.662 1	22.661 2	53.979 0	7.049 8	23.208 9	54.523 0
	FEM	6.661 5	22.587 5	53.433 5	7.048 8	23.128 9	53.959 1
0.6	SFPM	6.845 4	21.120 8	47.750 7	7.597 2	22.080 4	48.782 8
	文献解 <sup>[4]</sup>	6.845 4	21.120 7	47.747 8	7.597 2	22.080 3	48.779 7
	FEM	6.845 1	21.072 0	47.398 8	7.596 0	22.022 9	48.404 6
0.8	SFPM	7.162 8	19.484 9	40.775 6	8.570 0	21.252 3	42.759 3
	文献解 <sup>[4]</sup>	7.162 8	19.484 8	40.772 6	8.570 0	21.252 1	42.755 8
	FEM	7.162 6	19.455 1	40.580 9	8.567 8	21.211 3	42.533 4

表 4  $c_0$  变化对旋转变截面简支梁和固支梁无量纲频率系数  $\tilde{\omega}_i$  的影响 ( $\delta = 0, \lambda = 5$ )  
 Tab. 4 Effect of taper ratio  $c_0$  on non-dimensional frequencies  $\tilde{\omega}_i$  for rotating tapered P-P and C-Cbeams ( $\delta = 0, \lambda = 5$ )

边界	$c_0$	$mr = 1$			$mr = 2$			
		$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	
P-P	0.2	SFPM	12.075 6	39.280 2	83.724 1	11.903 0	39.043 8	83.473 9
		FEM	12.060 0	39.015 8	82.336 5	11.887 9	38.776 2	82.080 0
	0.4	SFPM	10.955 5	34.983 7	74.039 1	10.561 6	34.566 9	73.630 5
		FEM	10.945 5	34.806 9	73.102 9	10.550 6	34.384 7	72.679 7
	0.6	SFPM	9.679 7	30.338 2	63.513 1	9.015 1	29.836 4	63.091 0
		FEM	9.673 1	30.230 7	62.939 4	9.007 3	29.72 2	62.496 2
0.8	SFPM	8.115 4	25.024 8	51.400 5	7.174 5	24.652 5	51.263 0	
	FEM	8.110 7	24.967 4	51.097 9	7.168 0	24.584 3	50.928 0	
C-C	0.2	SFPM	22.254 1	58.479 3	111.972 0	22.144 2	58.302 3	111.767 0
		FEM	21.064 6	57.556 9	111.111 8	21.119 5	57.607 6	111.154 0
	0.4	SFPM	19.812 5	51.732 5	98.714 5	19.636 0	51.436 9	98.373 3
		FEM	18.462 0	50.671 5	98.198 0	18.645 6	50.860 5	98.380 6
	0.6	SFPM	17.133 7	44.329 4	84.156 5	16.971 5	44.017 3	83.797 5
		FEM	15.521 7	42.894 3	83.531 2	15.978 7	43.380 9	84.012 5
	0.8	SFPM	14.004 2	35.688 6	67.157 7	14.062 4	35.619 3	67.098 4
		FEM	11.752 9	33.190 0	65.354 2	12.911 7	34.424 8	66.571 0
			(-5.35%)	(-1.58%)	(-0.77%)	(-4.63%)	(-1.19%)	(-0.55%)
			(-6.82%)	(-2.05%)	(-0.52%)	(-5.04%)	(-1.12%)	(0.01%)
			(-9.41%)	(-3.24%)	(-0.74%)	(-5.85%)	(-1.45%)	(0.26%)
			(-16.08%)	(-7.00%)	(-2.69%)	(-8.18%)	(-3.35%)	(-0.79%)

注:表中括号内数值为 FEM 与 SFPM 的误差比较,计算公式:(FEM-SFPM)/SFPM×100%.

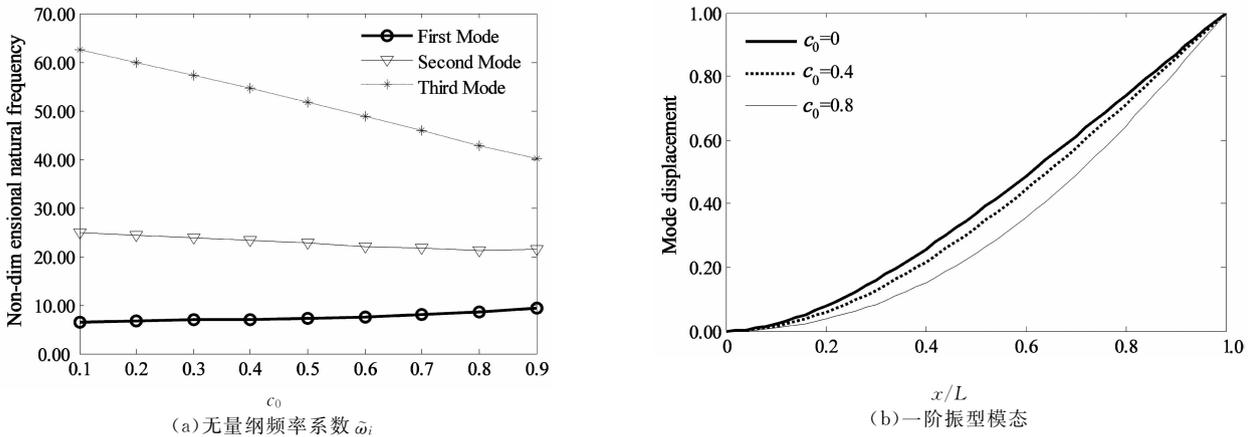


图 5  $c_0$  变化对旋转变截面悬臂梁动力特性影响 ( $mr = 2, \delta = 0, \lambda = 5$ )

Fig. 5 Effect of taper ratio  $c_0$  on dynamic properties of rotating tapered cantilever beams ( $mr = 2, \delta = 0, \lambda = 5$ )

**算例 3 旋转角速度系数  $\lambda$  变化对旋转变截面 Euler 梁自振频率的影响**

本算例分析旋转角速度系数  $\lambda$  对旋转变截面 Euler 梁的自振频率的影响. 计算参数:  $c_0 = 0.5, \delta = 0, N = 15$ . 表 5 给出按 SFPM 计算得到系数  $\lambda$  变化时 C-F 边界旋转变截面梁的前三阶频率的变化值, 并给出文献<sup>[4]</sup> DQEM 解答和 FEM 解答作为比较验证. 图 6 给出不同系数  $\lambda$  取值下旋转变截面悬臂梁的自振频率值和一阶振型模态曲线.

由表 5 计算结果可知, 不同  $\lambda$  条件下, 本文 SFPM 模型的频率解答与文献解<sup>[4]</sup> 和 FEM 解吻合良好, 计算精度高. 由图 6(a) 可知, 保持  $c_0$  不变, 随  $\lambda$  增大, 由旋转运动产生的离心刚化效应逐渐增强, 几何刚度  $[K_g]$  不断增大, 使得总刚度  $[K]$  不断增大, 导致旋转变截面梁的各阶频率特别是低阶频率明显增大, 由图 6(b) 可知, 旋转梁 1 阶振型模态曲率随  $\lambda$  增大而明显减少. 本算例结果表明: 系数  $\lambda$  变化对旋转变截面梁的振动动力特性有重要影响, 必须予以重视.

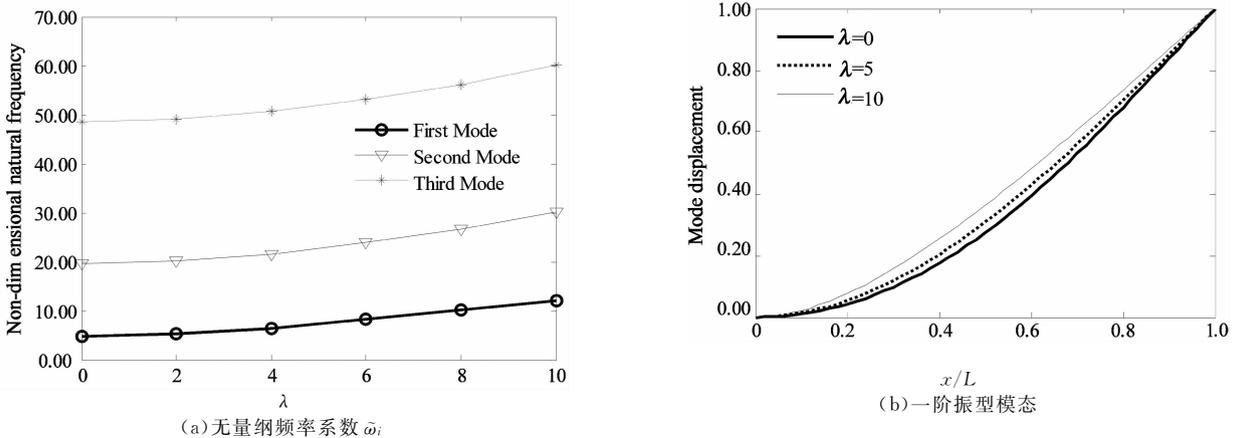


图 6  $\lambda$  变化对旋转变截面悬臂梁动力特性影响 ( $mr = 2, c_0 = 0.5, \delta = 0$ )

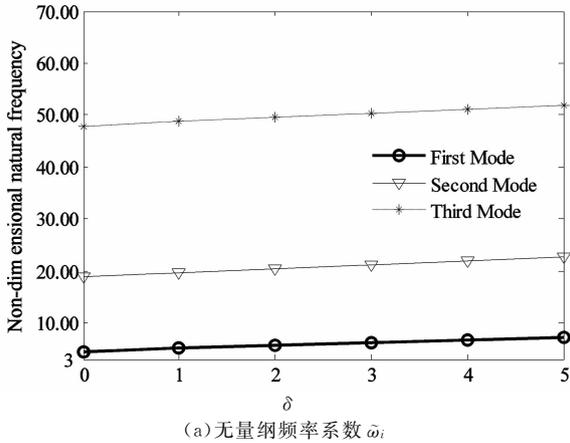
Fig. 6 Effect of rotational speed parameter  $\lambda$  on dynamic properties of rotating tapered cantilever beams ( $mr = 2, \delta = 0, \lambda = 5$ )

**表 5  $\lambda$  变化对旋转变截面悬臂梁无量纲频率系数  $\bar{\omega}_i$  的影响 ( $c_0 = 0.5, \delta = 0$ )**  
**Tab. 5 The effect of rotational speed parameter  $\lambda$  on non-dimensional frequencies  $\bar{\omega}_i$  for rotating tapered cantilever beams ( $c_0 = 0.5, \delta = 0$ )**

$\bar{\omega}_i$	$\lambda = 0$			$\lambda = 4$			$\lambda = 8$			
	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM	SFPM	文献解 <sup>[4]</sup>	FEM	
$mr = 1$	$\bar{\omega}_1$	3.823 8	3.823 8	3.824 2	5.878 8	5.878 9	5.878 8	9.554 0	9.554 0	9.551 6
	$\bar{\omega}_2$	18.317 4	18.317 3	18.250 9	20.685 3	20.685 2	20.622 4	26.543 8	26.543 7	26.485 1
	$\bar{\omega}_3$	47.267 9	47.264 8	46.796 1	49.648 5	49.645 6	49.195 0	56.162 1	56.159 5	55.744 8
$mr = 2$	$\bar{\omega}_1$	4.625 2	4.625 2	4.624 6	6.472 6	6.472 6	6.471 8	10.019 3	10.019 3	10.016 4
	$\bar{\omega}_2$	19.547 8	19.547 6	19.474 1	21.575 0	21.574 9	21.505 7	26.745 5	26.745 4	26.680 3
	$\bar{\omega}_3$	48.582 1	48.578 9	48.092 2	50.596 9	50.593 9	50.121 7	56.196 8	56.194 1	55.753 3

**算例 4 轮毂半径系数  $\delta$  变化对旋转变截面 Euler 梁自振频率的影响**

本算例分析轮毂半径系数  $\delta$  变化对旋转变截面梁的自振频率的影响. 计算参数:  $mr = 1, c_0 = 0.5, \lambda = 2, N = 15$ . 表 6 给出按 SFPM 计算得到 C-F 边界旋转变截面梁的前三阶频率随系数  $\delta$  的变化值, 并给出文献<sup>[2]</sup>DTM 解答和 FEM 解答相比较. 图 7 给出  $\delta$  不同时的变截面旋转悬臂梁的前三阶频率值



和归一化一阶模态曲线.

由表 6 计算结果可知, 不同  $\delta$  条件下, 本文 SF-PM 模型的频率解答与文献解、FEM 解非常逼近. 由图 7 可知, 随系数  $\delta$  增加, 旋转变截面梁的各阶频率的增加幅度有限, 且不同系数  $\delta$  下的归一化的一阶振型曲线基本保持不变, 表明轮毂半径  $R$  的变化对旋转变截面梁动力特性影响不大.

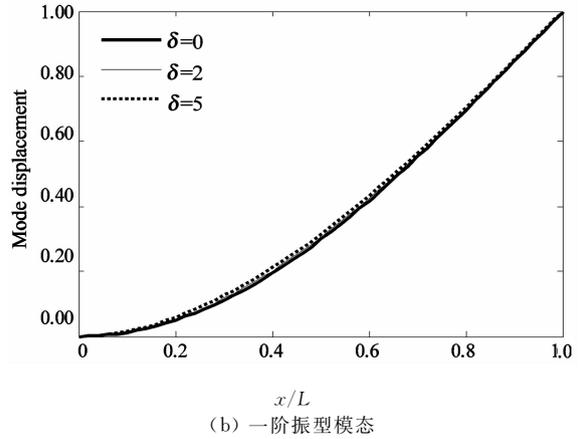


图 7  $\delta$  变化对旋转变截面悬臂梁动力特性影响 ( $mr = 1, c_0 = 0.5, \lambda = 2$ )

Fig. 7 Effect of hub radius parameter  $\delta$  on dynamic properties of rotating tapered cantilever beams ( $mr = 1, c_0 = 0.5, \lambda = 2$ )

**表 6  $\delta$  变化对旋转变截面悬臂梁无量纲频率系数  $\tilde{\omega}_i$  的影响 ( $mr = 1, c_0 = 0.5, \lambda = 2$ )**  
**Tab. 6 The effect of hub radius parameter  $\delta$  on non-dimensional frequencies  $\tilde{\omega}_i$  for rotating tapered cantilever beams ( $mr = 1, c_0 = 0.5, \lambda = 2$ )**

$\tilde{\omega}_i$	$\delta = 0$			$\delta = 2$			$\delta = 5$	
	SFPM	文献解 <sup>[2]</sup>	FEM	SFPM	文献解 <sup>[2]</sup>	FEM	SFPM	FEM
$\tilde{\omega}_3$	4.436 8	4.436 8	4.437 2	5.742 6	5.742 6	5.797 4	7.261 8	7.405 9
$\tilde{\omega}_2$	18.936 8	18.936 6	18.871 5	20.473 1	20.473 0	20.701 5	22.577 0	23.246 1
$\tilde{\omega}_1$	47.874 6	47.871 6	47.408 3	49.489 6	49.486 6	49.814 6	51.808 6	53.326 9

**4 结 论**

本文建立旋转变截面 Euler 梁振动分析的 SF-PM 计算格式并进行动力特性分析.

1) 基于 SFPM 推导出旋转变截面 Euler 梁的振动分析模型, 模型考虑矩形变截面梁截面高宽度沿轴向线性变化情况, 推导考虑截面尺寸变化效应和绕轴旋转产生的离心刚度效应影响下的旋转变截面梁的结构总刚度矩阵和总质量矩阵表达式, 并编制相关计算程序进行模型验证分析.

2) 与有限元模型相比较, 本文模型具有边界条件简单、程序编制方便、计算精度和效率高的优点, 可适用于不同边界、不同截面变化率、不同旋转角速

度和轮毂半径条件下的旋转变截面 Euler 梁的振动分析.

3) 旋转变截面梁的动力特性主要受到截面变化系数和旋转角速度的影响, 轮毂半径变化对其特性影响不大.

**参考文献**

[1] SHAHBA A, RAJASEKARAN S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials [J]. Applied Mathematical Modeling, 2012, 36(7): 3094-3111.  
 [2] OZGUMUS O O, KAYA M O. Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 289(1): 413-420.  
 [3] OZGUMUS O O, KAYA M O. Flapwise bending vibration a-

- analysis of double tapered rotating Euler-Bernoulli beam by using the differential transform method[J]. *Meccanica*, 2006, 41(6):661-670.
- [4] RAJASEKARAN S. Differential transformation and differential quadrature methods for centrifugally stiffened axially functionally graded tapered beams[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013,74(3):15-31.
- [5] ZARRINZADEH H, ATTARNEJAD R, SHAHBA A. Free vibration of rotating axially functionally graded tapered beams [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G Journal of Aerospace Engineering*, 2011, 226: 363-379.
- [6] ATTARNEJAD R, SHAHBA A. Dynamic basic displacement functions in free vibration analysis of centrifugally stiffened tapered beams; a mechanical solution [J]. *Meccanica*, 2011,46(6):1267-1281.
- [7] BANERJEE J R, JACKSON D R. Free vibration of a rotating tapered Rayleigh beam; A dynamic stiffness method of solution [J]. *Computers & Structures*, 2013,124:11-20.
- [8] BANERJEE J R, JACKSON D R. Free vibration of rotating tapered beams using the dynamic stiffness method[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2006,298(4/5):1034-1054.
- [9] 朱由锋, 朱由国. 基于有限差分法的变截面旋转梁弯曲振动 [J]. *噪声与振动控制*, 2014, 34(3):6-10.  
ZHU You-feng, ZHU You-guo. Analysis of bending vibration of rotating tapered beams base on finite difference method[J]. *Noise and Vibration Control*, 2014, 34(3):6-10. (In Chinese)
- [10] HUANG Y, LI X. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010,329(11):2291-2303.
- [11] TANG A Y, LI X F, WU J X, *et al.* Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2015,112:1-9.
- [12] 陈小波, 李静, 陈健云. 考虑离心刚化效应的旋转风力机叶片动力特性分析[J]. *地震工程与工程振动*, 2009,29(1):117-122.  
CHEN Xiao-bo, LI Jing, CHEN Jian-yun. Analysis of dynamic characteristic of turbine blade with centrifugal stiffening effect[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2009,29(1):117-122. (In Chinese)
- [13] 盛国刚, 彭献, 赵冰. 变速旋转梁的建模与运动稳定性分析 [J]. *湖南大学学报:自然科学版*, 2003,30(2):16-19.  
SHENG Guo-gang, PENG Xian, ZHAO Bing. Vibration of rotating beam with varying angular velocity and subjected to base excitation [J]. *Journal of Hunan University: Natural Sciences*, 2003,30(2):16-19. (In Chinese)
- [14] 秦荣. 结构力学中的样条函数方法[M]. 南宁: 广西人民出版社, 1985:1-152.  
QIN Rong. Spline functional method on structural mechanics [M]. Nanning: Guangxi People Press, 1985:1-152. (In Chinese)
- [15] 秦荣. 样条有限点法[J]. *广西大学学报:自然科学版*, 1981, 5(2):18-35.  
QIN Rong. Spline finite point method [J]. *Journal of Guangxi University: Natural Sciences*, 1981, 5(2):18-35. (In Chinese)
- [16] 李秀梅, 李萍, 黄幸, 等. 连续梁分析的样条有限点法及程序设计[J]. *广西大学学报:自然科学版*, 2014, 39(4):732-739.  
LI Xiu-mei, LI Ping, HUANG Xing, *et al.* Spline finite point method for continuous beam analysis and program design[J]. *Journal of Guangxi University: Natural Sciences*, 2014, 39(4):732-739. (In Chinese)
- [17] LI S, HUANG L, JIANG L, *et al.* A bidirectional B-spline finite point method for the analysis of piezoelectric laminated composite plates and its application in material parameter identification[J]. *Composite Structures*, 2014,107:346-362.
- [18] 秦荣. 计算结构动力学[M]. 桂林: 广西师范大学出版社, 1997:1-101.  
QIN Rong. Computational dynamics [M]. Guilin: Guangxi Normal University Press, 1997:1-101. (In Chinese)