

文章编号:1674-2974(2016)10-0148-07

## 基于张量秩校正的图像恢复方法<sup>\*</sup>

白敏茹<sup>†</sup>, 黄孝龙, 顾广泽, 赵雪莹

(湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**针对医学图像和视频图像的恢复问题,基于张量表示,研究有限样本下的低秩张量数据恢复问题,在张量奇异值分解(t-SVD)理论的基础上,提出了张量秩校正模型和两阶段张量秩校正方法,第一阶段是用张量核范数最小化模型求得预估解,第二阶段,根据预估解,求解张量秩校正模型,获得更高精度的解.构建了求解张量秩校正模型和张量核范数最小化模型的张量近似点算法,使得可以在实数域上对张量直接进行计算,并且从理论上证明了该算法的收敛性.通过对医学图像和视频图像的数值仿真实验,验证了本文所提出模型和方法的有效性,实验结果显示,张量秩校正模型和方法能够取得更高的恢复精度.

**关键词:**图像恢复;张量奇异值分解;张量秩校正;张量近似点算法

**中图分类号:**TP751

**文献标识码:**A

## Tensor Rank Corrected Procedure for Image Restoration

BAI Min-ru<sup>†</sup>, HUANG Xiao-long, GU Guang-ze, ZHAO Xue-ying

(College of Mathematics and Econometrics, Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China)

**Abstract:** Tensor-based restoration of medical images and video images was studied with limited samples. On the basis of the theory of tensor singular value decomposition (t-SVD), a tensor rank-correction model (CRTNN) was proposed to correct the tensor nuclear norm minimization model (TNN). A two-stage rank correction method is given as follows: the first stage is used to generate a pre-estimator by solving the TNN model, and the second stage is to solve the CRTNN model to generate a high-accuracy recovery by the pre-estimator. A tensor proximal point algorithm was proposed to solve the CRTNN model and the TNN model, making it possible to calculate tensor directly in the real field. The convergence of the algorithm was proved in theory. Numerical experiments of medical images and video images verify the efficiency of the proposed model and method. The experiment results show that tensor rank-correction model and method can achieve higher-accuracy recovery.

**Key words:** image restoration; t-SVD; tensor rank-correction model; tensor proximal point algorithm

随着电子技术和成像技术的发展,从医学图像到遥感图像,从导弹精确制导,到人脸识别及指纹识

别再到具有视觉功能的智能机器人,人类活动的方方面面都会产生或涉及到大量的高维图像.高维图

<sup>\*</sup> 收稿日期:2016-01-17

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(11571098), National Natural Science Foundation of China(11571098); 湖南省高校创新平台开放基金资助项目(14K018)

**作者简介:**白敏茹(1968-),女,江西宜春人,湖南大学博士生导师,副教授

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: minru-bai@163.com

像已经成为一种重要的多媒体形式,广泛存在于人们的日常生活中.图像在形成,传输和记录的过程中受多种因素的影响,图像的质量会有所下降,典型表现为色彩模糊和有噪声干扰等.这一降质的过程被称为图像的退化.图像恢复的目的就是尽可能地恢复退化了的高维图像的本来面目.

传统的图像处理方法是基于向量和矩阵的表示形式,往往破坏了这些数据原始空间结构,在分析过程中不能够很好地刻画这些数据的本质和充分挖掘其内部特性.张量作为向量和矩阵表示的高阶推广,能够更好地表达高阶数据复杂的本质结构,已被广泛应用于计算机视觉与图像、人脸识别、医学图像和统计信号处理等研究领域<sup>[1-6]</sup>.

高维图像数据往往具有低维属性,张量完备化问题就是利用张量数据的低秩结构,是一种在有限样本或测量数据下最小化张量的秩的优化问题.最小化张量的秩是 NP 难问题,通常的处理方法有:1) 将张量转化成矩阵,然后求解矩阵完备化问题<sup>[7]</sup>;2) 用特殊的张量分解方法来分解张量,如 CANDECOMP/PARA-FAC (CP) 分解, Tucker 分解等方法.

由于矩阵的核范数是矩阵秩的紧的凸逼近,因此对矩阵完备化问题的求解一般是将其转化为矩阵核范数最小化问题求解.对矩阵核范数最小化问题的求解有近似点算法 (PPA)<sup>[8]</sup>,交替方向方法 (ADM),加速近似梯度方法 (APG)<sup>[9]</sup>.虽然低秩矩阵完备化问题得到很好发展,但张量完备化问题研究还很不完善.不同于矩阵秩只有一种定义,张量秩有多种定义.传统上主要有两种张量秩的定义,CP 秩和 Tucker 秩,它们分别是基于 CP 分解和 Tucker 分解的.将张量展开成矩阵,利用展开矩阵性质近似逼近张量的秩,是常用的处理方法.例如:Gandy<sup>[2]</sup>等用各片分别展开矩阵的核范数的和作为张量秩的近似逼近;Liu<sup>[5]</sup>等进一步将各片分别展开矩阵的核范数通过加权来近似张量的秩,并提出了 HaLTRC 算法求解该松弛模型 (TSN).然而这两种逼近方法并不是张量秩函数的最紧的凸逼近<sup>[7]</sup>.

Kilmer 等<sup>[10]</sup>基于快速傅里叶变换可以将块循环矩阵对角化的思想,提出了张量奇异值分解 (T-SVD) 方法,使得张量可以在傅里叶变换下实现快速分解.基于 T-SVD, Semerci 等<sup>[6]</sup>提出张量核范数概念,对于 3 阶张量,利用张量核范数近似逼近张量的秩,建立了张量核范数最小化模型 (TNN),构建了交替方向方法 (ADMM) 求解该模型,并应用于多

线性数据的图像压缩和恢复,通过对比, TNN 逼近比 TSN 逼近效果更好.但是该文没有给出 ADMM 方法的收敛性结果,文中的 ADMM 算法一部分在实数域上计算,一部分在复数域上计算.与以往模型不一样, TNN 模型的目标变量是定义在复数域即傅里叶域内的矩阵,约束变量是定义在实数域的.因此,根据这个问题的特点,设计更加有效的具有收敛性的优化算法,是亟需解决的一个问题.另外,文献<sup>[11]</sup>指出,矩阵核范数在某些情况下不是矩阵秩的最紧凸逼近,如对角元素被高度样本化,则矩阵核范数最小化模型求解低秩恢复问题的能力就会高度弱化,而矩阵核范数是张量核范数 (TNN) 的二阶形式.本文针对以上两个问题开展研究,主要贡献有两个:一是提出了张量秩校正模型 (CRTNN) 和两阶段张量秩校正方法,二是构建了张量近似点算法,用于求解 CRTNN 模型和 TNN 模型,从理论上证明了该算法的收敛性.仿真实验验证了本文所提出模型和方法的有效性.结果显示,在医学图像以及视频图像的恢复问题中,张量秩校正方法能够取得更高的恢复精度.

## 1 张量基本概念

张量即为多维数组,其元素所在位置需要 3 个或 3 个以上的变量来表示,可以记为  $\mathbf{A} = a_{n_1 n_2 \dots n_N}$ ,其中  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times \dots \times n_N}$ ,这里  $n_i, i = 1, 2, \dots, n_N$ ,称为维数,  $N$  为阶数.特别地,向量为 一维张量,矩阵为二维张量.张量  $\mathbf{A}$  的片是只有两个指标没有固定的矩阵形式,例如 3 阶张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的前片表示为  $\mathbf{A}(:, :, i), i = 1, 2, 3$ .针对彩色图像的数据结构,本文主要讨论 3 阶张量.本节简要介绍与张量奇异值分解有关的基本知识,更多详细的介绍见文献<sup>[10]</sup>.

首先介绍由张量的前片构成的块循环矩阵,对张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,其前片为  $n_1 \times n_2$  的矩阵  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  其中  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(:, :, i)$ ,则有:

$$\text{circ}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_{n_3} & \dots & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n_3} & \mathbf{A}_{n_3-1} & \dots & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

而快速傅里叶变换 (FFT) 可以将块循环矩阵转化成块对角矩阵,有如下形式:

$$(\mathbf{F}_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \text{circ}(\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{F}_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_2}) = \Lambda(\hat{\mathbf{A}}). \quad (2)$$

其中  $F_{n_3}$  为离散的快速傅里叶矩阵,  $\mathbf{I}_{n_1}$  和  $\mathbf{I}_{n_2}$  分别为  $n_1 \times n_1$  和  $n_2 \times n_2$  的单位矩阵,  $\otimes$  表示矩阵的 Kronecker 乘积,  $\Lambda(\hat{\mathbf{A}})$  为块对角矩阵, 张量  $\hat{\mathbf{A}}$  是张量  $\mathbf{A}$  在傅里叶变换下的形式,  $\hat{\mathbf{A}}_i$  为张量  $\hat{\mathbf{A}}$  的第  $i$  个前片, 有如下定义:

$$\Lambda(\hat{\mathbf{A}}) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{A}}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\mathbf{A}}_{n_3} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

相反地, 对式(2)应用逆傅里叶变换, 即  $(F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1})$  乘以左边,  $(F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$  乘以右边, 则会有如下结果:

$$\text{circ}(\mathbf{A}) = (F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{A}}) \cdot (F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}). \quad (4)$$

取 MatVec 变换作用于张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的每一个前片, 则 MatVec( $\mathbf{A}$ ) 将张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  作用成  $n_1 n_3 \times n_2$  的矩阵:

$$\text{MatVec}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n_3} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

将 MatVec( $\mathbf{A}$ ) 返回张量则用 *fold* 变换:

$$\text{fold}(\text{MatVec}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}. \quad (6)$$

**定义 1.1**<sup>[10]</sup> 张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和  $\mathbf{B} \in R^{n_2 \times l \times n_3}$ , 则  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的张量积定义如下:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} * \mathbf{B} = \text{fold}(\text{circ}(\mathbf{A}) \cdot \text{MatVec}(\mathbf{B})). \quad (7)$$

其中  $\mathbf{C} \in R^{n_1 \times l \times n_3}$ .

这里张量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  张量积在 Matlab 中操作, 可以直接通过对  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  做快速傅里叶变换 (FFT) 得到  $\hat{\mathbf{A}}$  和  $\hat{\mathbf{B}}$ , 然后  $\hat{\mathbf{A}}$  和  $\hat{\mathbf{B}}$  的对应前片分别做乘积即可获得  $\hat{\mathbf{C}}$ , 然后再对  $\hat{\mathbf{C}}$  做逆快速傅里叶变换即可得到结果, 详细过程见文献[10].

接下来介绍单位张量, 张量的转置, 张量奇异值分解 (t-SVD).

**定义 1.2**<sup>[10]</sup> 张量  $\mathbf{I}_{n \times n \times l} \in R^{n \times n \times l}$  为单位张量当它的第一个前片为  $n \times n$  的单位矩阵, 剩余两前片的元素均为 0.

**定义 1.3**<sup>[10]</sup> 张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 则张量  $\mathbf{A}$  的张量转置  $\mathbf{A}^T \in R^{n_2 \times n_1 \times n_3}$ , 是通过保持第 1 个前片位置不变, 第 2 个前片和第 3 个前片位置互换, 并且分别对张量  $\mathbf{A}$  每一个前片做转置得来.

**定义 1.4**<sup>[10]</sup> 张量  $\mathbf{A} \in R^{n \times n \times l}$  为  $f$ - 对角化张

量当且仅当其每一个前片矩阵均为对角矩阵.

**定义 1.5**<sup>[10]</sup> 张量  $\mathbf{A} \in R^{n \times n \times l}$  为正交张量当且仅当它满足:

$$\mathbf{A}^T * \mathbf{A} = \mathbf{A} * \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_{n \times n \times l}. \quad (8)$$

**定理 1.6**<sup>[10]</sup> (张量奇异值分解 (t-SVD)) 张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 则  $\mathbf{A}$  可以分解为:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} * \mathbf{S} * \mathbf{V}^T. \quad (9)$$

其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  为正交张量, 其中  $\mathbf{U} \in R^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ ,  $\mathbf{V} \in R^{n_2 \times n_2 \times n_3}$ ,  $\mathbf{S} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  为  $f$ - 对角化张量.

最后介绍三阶张量的多线性秩和张量核范数 (TNN) 以及它们之间的联系.

**定义 1.7**<sup>[4]</sup> 张量  $\mathbf{A} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的张量多线性秩是向量  $\mathbf{p} \in R^{n_3}$ ,  $\mathbf{p}$  的第  $i$  个元素为对  $\mathbf{A}$  做快速傅里叶变换得到的  $\hat{\mathbf{A}}$  的第  $i$  个前片的秩.

**定理 1.8**<sup>[12]</sup> 张量核范数 (TNN) 记为  $\|\mathbf{A}\|_{\text{TNN}}$  为张量  $\mathbf{A}$  的范数, 它是对  $\mathbf{A}$  做快速傅里叶变换得到的  $\hat{\mathbf{A}}$  的每一个前片的奇异值之和, 为张量多线性秩的  $l_1$  范数的紧凸松弛.

在一定条件下, 矩阵核范数是矩阵的秩的凸松弛, 同理, 张量核范数 (TNN) 是张量多线性秩的凸松弛<sup>[13]</sup>.

## 2 张量完备化的秩校正方法

在图像采集过程中, 由于各种原因, 可能会出现图像数据损失的情况, 即图像序列组成的张量  $\mathbf{X}$  中有部分元素的值缺失. 张量数据恢复问题即为张量完备化问题, 就是利用张量数据的低秩结构, 在有限样本或测量数据下最小化张量的秩的优化问题. Liu<sup>[5]</sup> 等将张量按照不同方向分别展开成矩阵的核范数通过加权来近似张量的秩, 建立了张量完备化的如下凸松弛模型 (TSN):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} & \sum_{i=1}^n \alpha_i \|\mathbf{X}_{(i)}\|_* \\ \text{s. t.} & \mathbf{X}_\Omega = \mathbf{T}_\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{X}_{(i)}$  是张量  $\mathbf{X}$  的  $i$  模矩阵, 并提出了 HaLTRC 算法求解该 TSN 模型.

Semerci 等<sup>[6]</sup> 则基于张量核范数 TNN, 提出了张量核范数最小化模型 (TNN):

$$\begin{aligned} \min & \|\mathbf{X}\|_{\text{TNN}} \\ \text{s. t.} & \mathbf{X}_\Omega = \mathbf{M}_\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

这里张量  $\mathbf{X}, \mathbf{M} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ,  $\mathbf{M}$  在集合  $\Omega$  里的元素是给定的,不在  $\Omega$  里的元素则是 0,即:

$$\mathbf{X}(i, j, k) := \begin{cases} \mathbf{M}(i, j, k), & (i, j, k) \in \Omega; \\ 0, & (i, j, k) \notin \Omega. \end{cases}$$

从前文定理 1.8 中,不难得出  $\|\mathbf{X}\|_{\text{TNN}}$  就是  $\sum_{i=1}^{n_3} \|\hat{\mathbf{X}}(:, :, i)\|$ ,  $\hat{\mathbf{X}}(:, :, i)$  为  $\mathbf{X}$  在快速傅里叶变化下的第  $i$  个前片,则式(11)等价于:

$$\min \sum_{i=1}^{n_3} \|\hat{\mathbf{X}}(:, :, i)\|, \text{ s. t. } \hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}} = \hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}}. \quad (12)$$

其中  $\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}$ ,  $\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}}$  和  $\hat{\Omega}$  分别表示  $\mathbf{X}_{\Omega}$ ,  $\mathbf{M}_{\Omega}$  和  $\Omega$  在快速傅里叶域变换下的结果.

注意到矩阵核范数在某些情况下不是矩阵秩的最佳凸逼近,如对角元素被高度样本化,则矩阵核范数最小化模型求解低秩恢复问题的能力会高度弱化<sup>[11]</sup>.为了获得更高精度解,针对张量核范数最小化模型(TNN),本文提出了一个张量秩校正模型(CRTNN):

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^{n_3} \|\hat{\mathbf{X}}(:, :, i)\|_* - \sum_{i=1}^{n_3} \langle \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}(:, :, i)), \hat{\mathbf{X}}(:, :, i) \rangle \\ \text{ s. t. } \mathbf{X}_{\hat{\Omega}} = \mathbf{M}_{\hat{\Omega}}. \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\bar{\mathbf{X}}$  作为预估解,  $\sum_{i=1}^{n_3} \langle \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}(:, :, i)), \hat{\mathbf{X}}(:, :, i) \rangle$  为秩校正项,  $\hat{\mathbf{X}}$  为  $\mathbf{X}$  在快速傅里叶变换下维数是  $n_1 \times n_2 \times n_3$  的张量,  $\mathbf{F}$  为文献[11]定义下的谱算子:

$$\mathbf{F}(\mathbf{D}) = \mathbf{U} \text{Diag}(f(\sigma(\mathbf{D}))) \mathbf{V}^T.$$

$\sigma(\mathbf{D})$  为矩阵  $\mathbf{D}$  的奇异值,对称函数  $f: R^n \rightarrow R$  定义如下:

$$f_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}\|_{\infty}}\right), & \mathbf{x} \in R^n \setminus \{0\}; \\ 0, & \mathbf{x} = 0. \end{cases}$$

对于  $\tau > 0$ ,  $\epsilon > 0$ , 标量函数  $\varphi: R \rightarrow R$  表示如下:

$$\varphi(t) := \text{sgn}(t) (1 + \epsilon^t) \frac{|t|^\tau}{|t|^\tau + \epsilon^t}, \forall t \in R.$$

其中  $\text{sgn}(t)$  为符号函数,定义如下:

$$\text{sgn}(t) := \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t = 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

由块对角矩阵定义知:  $\sum_{i=1}^{n_3} \|\hat{\mathbf{X}}(:, :, i)\|_* = \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}})\|_*$ , 同理  $\sum_{i=1}^{n_3} \langle \bar{\mathbf{X}}(:, :, i), \hat{\mathbf{X}}(:, :, i) \rangle$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}$  和  $\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}}$  对应转化为  $\langle \Lambda(\mathbf{F}), \Lambda(\hat{\mathbf{X}}) \rangle$ ,  $\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}})$  及  $\Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}})$ . 于是张量秩校正模型(CRTNN)式(13)可以改写成如下形式:

$$\begin{aligned} \min \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}})\|_* - \langle \Lambda(\mathbf{F}), \Lambda(\hat{\mathbf{X}}) \rangle \\ \text{ s. t. } \Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}) = \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}}). \end{aligned} \quad (14)$$

针对张量秩校正模型,下面给出两阶段张量秩校正方法:

- 1) 求预估解. 通过模型(11)得到解  $\bar{\mathbf{X}}$  作为预估解;
- 2) 进行秩校正. 求解张量秩校正模型(CRTNN)(13)得到解  $\mathbf{X}$ .

### 3 算法求解及收敛性分析

#### 3.1 算法求解

在本节中,应用近似点算法(PPA)求解式(11)和式(13).

问题(13)通过转化为式(14),应用近似点算法(PPA)求解.

式(14)的拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L(\Lambda(\hat{\mathbf{X}}), \Lambda(\hat{\mathbf{Y}})) = \\ \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}})\|_* - \Lambda(\hat{\mathbf{Y}})^T (\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}) - \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}})) - \\ \langle \Lambda(\mathbf{F}), \Lambda(\hat{\mathbf{X}}) \rangle. \end{aligned}$$

则近似点算法(PPA)求解:

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}^k) = \\ \arg \min_{\Lambda(\hat{\mathbf{Y}})} \{ L(\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k), \Lambda(\hat{\mathbf{Y}})) - \frac{s}{2} \|\Lambda(\hat{\mathbf{Y}}) - \\ \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^k)\|^2 \} \Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k) = \\ \arg \min_{\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}) = \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}})} \{ \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}})\|_* + \frac{r}{2} \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}}) - \\ [\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) + \frac{1}{r} (\Lambda(2\tilde{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k) - (\hat{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k) + \mathbf{F})]\|^2 \}, \\ \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}) = \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) - \gamma (\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) - \Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k)), \\ \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1}) = \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^k) - \gamma (\Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^k) - \Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}^k)). \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\gamma \in (0, 2)$ ,  $r \cdot s > 1$ .

对于  $\Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k)$ , 对给定  $\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k)$  和  $\Lambda(\hat{\mathbf{Y}})$ , 容易算得:

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k) = \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k) - \frac{1}{s} (\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}^k) - \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}})). \quad (16)$$

对于  $\Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k)$ , 容易化简得:

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k) = \arg \min_{\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_{\hat{\Omega}}) = \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_{\hat{\Omega}})} \{ \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}})\|_* + \frac{r}{2} \|\Lambda(\hat{\mathbf{X}}) - \\ [\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) + \frac{1}{r} (\Lambda(2\tilde{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k) - (\hat{\mathbf{Y}}_{\hat{\Omega}}^k))]\|^2 \}. \end{aligned}$$

(17)

取  $\Lambda(\hat{\mathbf{Z}}^k)$  替换  $\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) + \frac{1}{r}(\Lambda(2(\tilde{\mathbf{Y}}_\Omega^k) - (\hat{\mathbf{Y}}_\Omega^k) + F))$ ,

则由  $\Lambda(\cdot)$  定义知  $\Lambda(\hat{\mathbf{Z}}^k)$  为块循环矩阵,且式(17)为矩阵优化问题,则由 Cai<sup>[13]</sup> 定理 2.1 易知,求解  $\Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k)$ ,需要对  $\Lambda(\hat{\mathbf{Z}}^k)$  的每一个对角块做矩阵奇异值分解,用  $\hat{\mathbf{Z}}_1^k, \hat{\mathbf{Z}}_2^k, \dots, \hat{\mathbf{Z}}_{n_3}^k$  表示,每一个  $\hat{\mathbf{Z}}_i^k$  的形式如下:

$$\hat{\mathbf{Z}}_i^k = \hat{\mathbf{U}}_i^k \hat{\Sigma}_i^k (\hat{\mathbf{V}}_i^k)^T, i = 1, 2, 3, \dots, n_3. \quad (18)$$

其中  $\hat{\Sigma}_i^k = \text{Diag}(\{\sigma_j^k\}_{1 \leq j \leq r})$ ,  $\hat{\mathbf{S}}_i^k = \text{diag}\{(\sigma_j^k - \tau_j)_+\}$ ,  $(t)_+ = \max(0, t)$ , 则  $\Lambda(\hat{\mathbf{Z}}^k)$  可由下式得到:

$$\Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k) = \Lambda(\hat{\mathbf{U}}^k) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{S}}^k) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{V}}^k). \quad (19)$$

由于式(15)是在傅里叶域里求解式(14)矩阵核范数最小化问题,然而原问题式(13)是在实数域里的结果,并且变量都是以张量形式计算.考虑到逆傅里叶变换和张量奇异值分解(t-SVD)的思想,在每一步迭代中应用如下步骤:

1) 每一步式子中左边乘以  $(F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1})$ , 右边乘以  $(F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$  即得到块循环矩阵;

2) 取  $\text{MatVec}(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}), \text{MatVec}(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1})$ , 及  $\text{MatVec}(\tilde{\mathbf{Y}}^k)$  对应的第一列块矩阵做 fold 变换.

通过上述变换,则可以把矩阵迭代过程转换为张量迭代过程:

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}_\Omega^k) &= \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}_\Omega^k) - \frac{1}{s}(\Lambda(\hat{\mathbf{X}}_\Omega^k) - \Lambda(\hat{\mathbf{M}}_\Omega)), \\ \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}) &= \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) - \gamma(\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^k) - \Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k)), \\ \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1}) &= \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^k) - \gamma(\Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^k) - \Lambda(\tilde{\mathbf{Y}}^k)). \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)里的矩阵形式转化为张量形式,并还回实数域:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_\Omega^k &= \mathbf{Y}_\Omega^k - \frac{1}{s}(\mathbf{X}_\Omega^k - \mathbf{M}_\Omega), \\ \mathbf{X}^{k+1} &= \mathbf{X}^k - \gamma(\mathbf{X}^k - \tilde{\mathbf{X}}^k), \\ \mathbf{Y}^{k+1} &= \mathbf{Y}^k - \gamma(\mathbf{Y}^k - \tilde{\mathbf{Y}}^k). \end{aligned} \quad (21)$$

由 Kilmer<sup>[10]</sup> 定理 4.1 知,应用逆傅里叶变换和张量奇异值分解的思想,同时应用上面的步骤 1 和 2,即可将  $\Lambda(\tilde{\mathbf{X}}^k)$  还回实数域并且转化成张量的形式,如式(22)所示:

$$\tilde{\mathbf{X}}^k = \mathbf{U}^k * \mathbf{S}^k * (\mathbf{V}^k)^T. \quad (22)$$

其中  $\mathbf{U}^k = \text{ifft}(\hat{\mathbf{U}}^k, [], 3)$ ,  $\mathbf{V}^k = \text{ifft}(\hat{\mathbf{V}}^k, [], 3)$ .

综上,得出求解问题(12)的近似点算法(PPA)如下:

**算法 3.1**

任取  $\gamma \in (0, 2)$ , 及  $r \cdot s > 1$ , 对给定  $(\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k)$ ,

1) PPA 步: 由下迭代获得  $(\tilde{\mathbf{X}}^k, \tilde{\mathbf{Y}}^k)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_\Omega^k &= \mathbf{Y}_\Omega^k - \frac{1}{s}(\mathbf{X}_\Omega^k - \mathbf{M}_\Omega), \\ \tilde{\mathbf{X}}^k &= \mathbf{U}^k * \mathbf{S}^k * (\mathbf{V}^k)^T. \end{aligned} \quad (23)$$

2) 松弛步: 新的迭代步,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{k+1} &= \mathbf{X}^k - \gamma(\mathbf{X}^k - \tilde{\mathbf{X}}^k), \\ \mathbf{Y}^{k+1} &= \mathbf{Y}^k - \gamma(\mathbf{Y}^k - \tilde{\mathbf{Y}}^k). \end{aligned} \quad (24)$$

对于问题(11),即为问题(13)的特例,取秩校正项  $\sum_{i=1}^{n_3} \langle F(\mathbf{X}(:, :, i)), \hat{\mathbf{X}}(:, :, i) \rangle$  中谱算子  $F$  为 0 即可.

**3.2 收敛性分析**

**定理 3.1** 设  $\{\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k\}$  为由算法 3.1 产生的迭代序列,若  $\gamma \in (0, 2)$ , 及  $rs > 1$ , 则序列  $\{\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k\}$  收敛到问题(13)的鞍点.

**证明** 对于矩阵求解问题,由 He<sup>[8]</sup> 定理 3.7 分析,当  $k \rightarrow \infty$  时,易知:

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}) &\rightarrow \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^*) \\ \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1}) &\rightarrow \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^*) \end{aligned} \quad (25)$$

这里  $\{\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^*), \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^*)\}$  为问题(14)的鞍点. 对块对角矩阵  $\Lambda(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}), \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1}), \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^*), \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^*)$  应用逆快速傅里叶变换,即每个式子左右两边分别乘以  $(F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1})$ , 和  $(F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2})$ , 即将计算过程从傅里叶域转化到实数域:

$$\begin{aligned} \text{circ}(\mathbf{X}^{k+1}) &= (F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^{k+1}) \cdot (F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}), \\ \text{circ}(\mathbf{X}^*) &= (F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{X}}^*) \cdot (F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}), \\ \text{circ}(\mathbf{Y}^{k+1}) &= (F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^{k+1}) \cdot (F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}), \\ \text{circ}(\mathbf{Y}^*) &= (F_{n_3}^T \otimes \mathbf{I}_{n_1}) \cdot \Lambda(\hat{\mathbf{Y}}^*) \cdot (F_{n_3} \otimes \mathbf{I}_{n_2}). \end{aligned} \quad (26)$$

由于快速傅里叶变换和逆快速傅里叶变换均为连续有界算子,故有:

$$\begin{aligned} \text{circ}(\mathbf{X}^{k+1}) &\rightarrow \text{circ}(\mathbf{X}^*), \\ \text{circ}(\mathbf{Y}^{k+1}) &\rightarrow \text{circ}(\mathbf{Y}^*). \end{aligned} \quad (27)$$

取  $\text{MatVec}(\mathbf{X}^{k+1}), \text{MatVec}(\mathbf{X}^*), \text{MatVec}(\mathbf{Y}^{k+1})$  以及  $\text{MatVec}(\mathbf{Y}^*)$  分别表示  $\text{circ}(\mathbf{X}^{k+1}), \text{circ}(\mathbf{X}^*), \text{circ}(\mathbf{Y}^{k+1})$ , 和  $\text{circ}(\mathbf{Y}^*)$  的第一列块循环矩阵,并作 fold 变换,则得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{k+1} &\rightarrow \mathbf{X}^*, \\ \mathbf{Y}^{k+1} &\rightarrow \mathbf{Y}^*. \end{aligned} \quad (28)$$

$\mathbf{X}^*$  和  $\mathbf{Y}^*$  为(13)的鞍点.

证毕.

**4 仿真实验**

本文针对医学图像和视频图像的恢复问题,分别对张量核范数加权和模型(TSN 模型)式(10)、张量核范数最小化模型(TNN 模型)式(11)以及张量

秩校正模型(CRTNN 模型)式(13)进行仿真实验, TSN 模型采用 HaLRTC 方法求解, TNN 模型和 CRTNN 模型采用近似点算法(PPA)求解, 并给出仿真结果, 所有结果都是在 Core i5 的 CPU 及 4G 内存的 Windows 7 系统下的 ASUS 笔记本中运行 MATLAB R2012b 计算得出. 图像恢复的数值评价指标通常由相对误差和峰值信噪比(PSNR)计算, 相对误差计算公式:

$$\text{reler} = \frac{\| \mathbf{X} - \mathbf{M} \|_F}{\| \mathbf{X} \|_F} \tag{29}$$

式中:  $\mathbf{M}$  为实值张量;  $\mathbf{X}$  为预估张量, 峰值信噪比计算公式:

$$\text{PSNR} = 10 * \log_{10} \left( \frac{n_1 * n_2 * n_3}{\| \mathbf{X} - \mathbf{M} \|_F^2} \right) \tag{30}$$

式中:  $n_1, n_2, n_3$  为张量  $\mathbf{M} \in R^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的维数, 同时终止条件为:

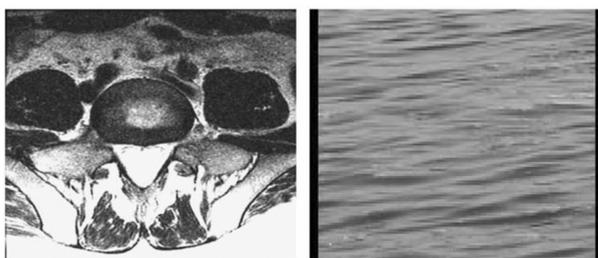
$$\frac{\| \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k \|_F}{\| \mathbf{X}^k \|_F} \leq \text{tol} \tag{31}$$

tol 为终止参数, 取  $\text{tol} = 10^{-3}$ , 主要是小于这个值之后, 变化特别微小.

文中选取的图像为大小  $415 \times 477 \times 3$  的医学图像, 视频图像为大小  $112 \times 160 \times 3$  的视频的其中一帧, 进行仿真实验, 并比较 TSN 模型, TNN 模型, CRTNN 模型的恢复效果.

图 1 为医学图像和视频图像原始图像. 图 2, 图 3 分别为医学图像和视频图像在样本率为 20% (即有效信息只有 20%) 的情况时用 TSN 模型, TNN 模型, CRTNN 模型视觉恢复效果对比, 从图 2, 图 3 的 PSNR 值对比和视觉恢复效果对比中, 可以发现本文提出的 CRTNN 模型能得到更好的恢复效果.

图 4 分别为医学图像和视频图像在 TSN 模型, TNN 模型, CRTNN 模型下对不同样本率得到的相对误差曲线对比. 从中可以明显看出: 本文提出的张量秩校正方法对不同的样本率得到的恢复图像的相对误差曲线都是最低的, 表明本文提出的 CRTNN 模型能够取得更高精度的恢复效果.



(a) 医学图像 (b) 视频图像

图 1 原始图像  
Fig. 1 Original images

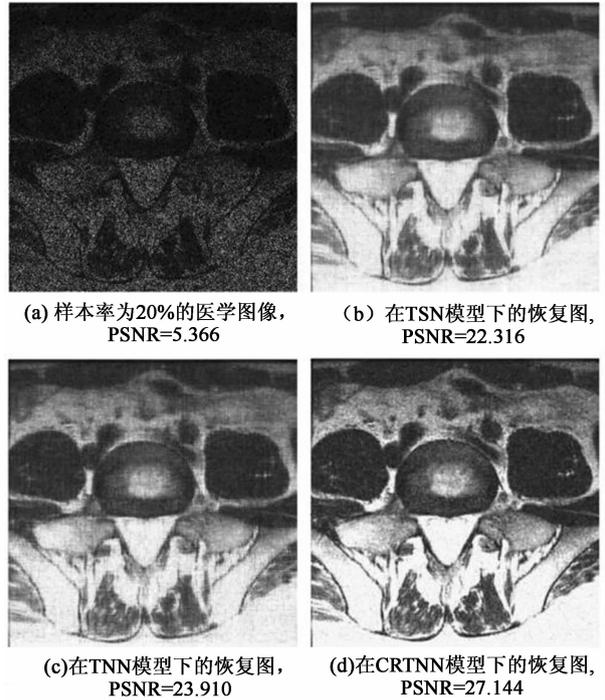


图 2 样本率为 20% 的医学图像及其分析在 TSN 模型, TNN 模型和 CRTNN 模型下的恢复图  
Fig. 2 Recovery results on a medical image with 20% sample ratio by models TSN, TNN and CRTNN, respectively

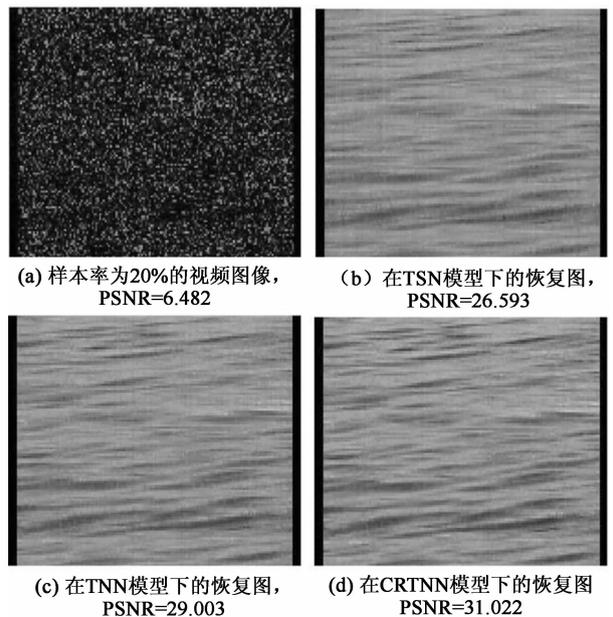
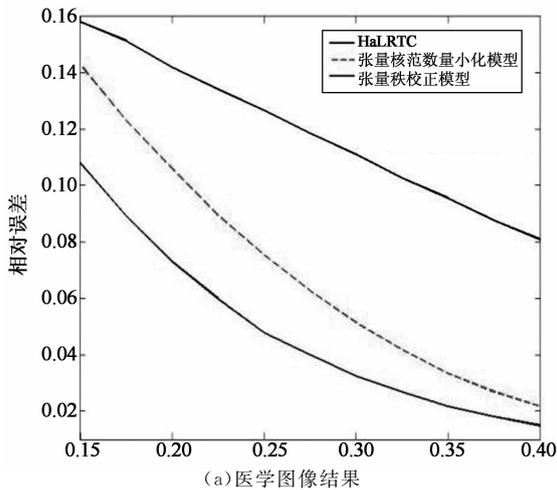
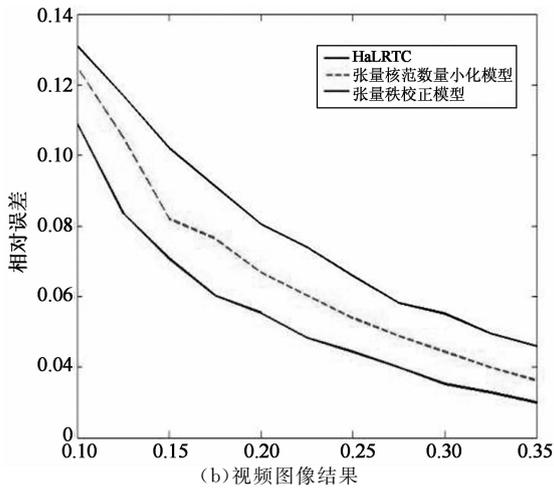


图 3 样本率为 20% 的视频图像及其分别在 TSN 模型, TNN 模型和 CRTNN 模型下的恢复图  
Fig. 3 Recovery results on a video image with 20% sample ratio by models TSN, TNN and CRTNN, respectively



(a) 医学图像结果



(b) 视频图像结果

图4 视频图像和医学图像在 TSN 模型, TNN 模型和 CRTNN 模型下对同样本率得到的相对误差

Fig. 4 The relative error recovered by TSN, TNN, CRTNN versus sample ratio for medical image

## 5 结论

针对高维图像恢复问题,本文提出了张量秩校正模型和两阶段张量秩校正方法,并提出了求解张量秩校正模型的张量近似点算法,从理论上分析了该算法的收敛性.仿真结果验证了本文所提出模型和方法的有效性,结果表明,张量秩校正方法模型能够取得更高的恢复精度.能否将该模型和算法推广到四阶及以上的图像恢复问题?这个问题值得进一步研究.

## 参考文献

[1] ELY G, AERON S, MILLER E L. Exploiting structural complexity for robust and rapid hyper spectral imaging [C]//Pro-

ceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2013:2193-2197.

[2] GANDY S, RECHT B, YAMADA I. Tensor completion and low-n-rank tensor recovery via convex optimization [J]. Inverse Problems, 2011, 27(2): 025010.

[3] HAO N H, KILMER M E, BRAMAN K, *et al.* Facial recognition with tensor-tensor decompositions [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2013, 6(1): 437-463.

[4] KILMER M, BRAMAN K, HAO N, *et al.* Third-order tensors as operators on matrices: A theoretical and computational framework with applications in imaging [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2013, 34(1):148-172.

[5] LIU J, MUSIALSKI P, WONKA P, *et al.* Tensor completion for estimating missing values in visual data [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 208-220.

[6] SEMERCI O, HAO N, KILMER M E, *et al.* Tensor-based formulation and nuclear norm regularization for multienergy computed tomography [J]. IEEE Transaction on Image Processing, 2014, 23(4): 1678-1693.

[7] MU C, HUANG B, WRIGHT J, *et al.* Square deal: Lower bounds and improved relaxations for tensor recovery [C]// Proceedings of the 31st International Conference on Machine Learning (ICML-14), 2014, 32(1): 73-81.

[8] HE B S, YUAN X M, ZHANG W X. A customized proximal point algorithm for convex minimization with linear constraints [J]. Computational Optimization and Applications, 2013, 56(3): 559-572.

[9] TOH K C, YUN S. An accelerated proximal gradient algorithm for nuclear norm regularized least squares problems [J]. Pacific Journal of Optimization, 2010, 6(3): 615-640.

[10] KILMER M E, MARTIN C D. Factorization strategies for third-order tensors[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 435(3):641-658.

[11] MIAO W, PAN S, SUN D. A rank-corrected procedure for matrix completion with fixed basis coefficients [J]. Math. Programming, 2016, 159(1):289-338.

[12] ZHANG Z, ELY G, AERON S, *et al.* Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on tensor-SVD [C]// In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2014, 3842-3849.

[13] CAI J F, CANDES E J, SHEN Z. A singular value thresholding algorithm for matrix completion [J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.