

## 非均质和各向异性土质浅埋隧道支护力研究\*

谢晓锋,陶明<sup>†</sup>,吴秋红,刘恺

(中南大学资源与安全工程学院,湖南长沙 410083)

**摘要:**针对土体的非均质和各向异性,以土质浅埋隧道为例,采用极限分析上限法和可靠度方法研究隧道支护力的大小.结果表明,土体非均质和各向异性对支护力的影响程度取决于隧道的埋深.当埋深小于15 m时,围岩的自稳能力较差,土体非均质和各向异性的影响不能明显地体现出来,支护力主要随埋深的增大而增大;当埋深大于20 m时,围岩的自稳能力较强,支护力随土体非均质和各向异性的增大发生明显变化,埋深越大,土体非均质和各向异性对支护力的影响越强.可靠度研究表明,非均质和各向异性参数的分布及变异系数的大小对支护力的影响较大,对数正态分布时影响更为明显.建议在土质浅埋隧道设计时,务必考虑土体的非均质和各向异性,防止保守支护增加工程成本或支护力不足引起隧道坍塌.

**关键词:**隧道工程;支护力;极限分析法;非均质;各向异性

**中图分类号:**TU451

**文献标志码:**A

## Supporting Pressure of Shallow Tunnels in Nonhomogeneous and Anisotropic Soils

XIE Xiaofeng, TAO Ming<sup>†</sup>, WU QiuHong, LIU Kai

(School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** The upper bound theorem and reliability method were utilized to investigate the stability of shallow tunnels excavated in nonhomogeneous and anisotropic soils. The result shows that the effect degree of soil nonhomogeneity and anisotropy is governed by the buried depth of tunnel. When the buried depth is less than 15 m, the self-stabilization capacity of the surrounding rock is poor. As a result, the influence of nonhomogeneity and anisotropy is not obvious, and the supporting pressure tends to increase with the increase of buried depth. However, when the tunnel is deeply buried, greater than 20 m, the self-stabilization capacity of the surround rock is strong. In this circumstance, the supporting pressure varies greatly as the parameters of nonhomogeneity and anisotropy increase. It is also found that the distribution of nonhomogeneity and anisotropy parameters and the variable coefficient have a great effect on the supporting pressure through reliability research, especially when the parameters obey the logarithmic normal distribution. It is

\* 收稿日期:2016-04-08

基金项目:国家自然科学基金青年基金资助项目(51404303), National Natural Science Foundation of China(51404303); 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2015zzts084), Fundamental Research Funds for the Central Universities of Central South University(2015zzts084)

作者简介:谢晓锋(1988—),男,湖南宁乡人,中南大学博士研究生

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: mingtao@csu.edu.cn

suggested that more attention should be paid to the nonhomogeneity and anisotropy of soil mass in the design of shallow tunnel, which would prevent either the increase of construction costs or the collapse of tunnel.

**Key words:** tunnel engineering; supporting pressure; limit analysis method; nonhomogeneity; anisotropy

大量试验研究表明,受天然沉积及后期加载等因素影响的土体,其黏聚力往往表现出显著的非均质性和各向异性<sup>[1-4]</sup>.土体的非均质性一般与埋深有关,各向异性则与主应力的方向和破坏面的位置有关.岩土工程的稳定性与土体的抗剪强度指标息息相关,因此,非均质和各向异性对土体的影响成为研究热点.针对岩土工程的稳定性问题,研究土体的非均质与各向异性,对实际工程的设计和施工具有重要的现实意义.

目前,有关非均质和各向异性的研究主要集中在地基承载力和边坡稳定性问题中.徐干成等<sup>[5]</sup>结合极限分析理论及变分法,讨论了非均质和各向异性的有关参数对地基承载力的影响.Kuo等<sup>[6]</sup>针对多层黏性土上的刚性基础,利用极限分析有限元法计算了其承载力的上下限.杨峰等<sup>[7]</sup>基于一种网格状多刚性块破坏机制,对非均质和各向异性黏土粗糙地基的承载力进行了分析.王栋和金霞<sup>[8]</sup>通过有限元建模分析,研究了强度各向异性对边坡稳定性的影响,并计算得相应的安全系数.方薇等<sup>[9]</sup>引入变异因子,对非均质边坡进行了上限分析,并与极限平衡法所得的结果进行对比.肖锐铎等<sup>[10]</sup>基于强度折减理论,提出了一种非均质边坡的评价方法,并对非均质边坡的稳定性进行了系统的评价.

目前,关于非均质和各向异性对隧道稳定性影响的研究较少.周维祥等<sup>[11]</sup>采用弹塑性有限元对非均质黏土中隧道开挖面的破坏过程进行了模拟,继而得到了不同工况下保证围岩稳定所需的最小支护力.宋春霞等<sup>[12]</sup>基于平面应变隧道刚体平动破坏模式,推导了极限支护压力的计算公式,并讨论了非均质参数对极限支护压力的影响.这些研究仅考虑了土体材料的非均质特性,而没有考虑各向异性对土体材料的影响.

因此,本文基于土质浅埋隧道,同时考虑非均质和各向异性,采用极限分析法和可靠度法求解支护力大小,为土质浅埋隧道的设计与施工提供指导.

## 1 非均质和各向异性

土体的非均质性是指其黏聚力随着埋深而变

化,且该变化以线性居多<sup>[13-15]</sup>.本文考虑如图1所示的黏聚力线性变化模式,某一深度 $z$ 处土体的黏聚力可表示为:

$$c(z) = c_{h0} + \rho z. \quad (1)$$

式中: $c_{h0}$ 为地表土体的初始水平黏聚力; $\rho$ 为黏聚力变化曲线的斜率,又称为非均质系数.

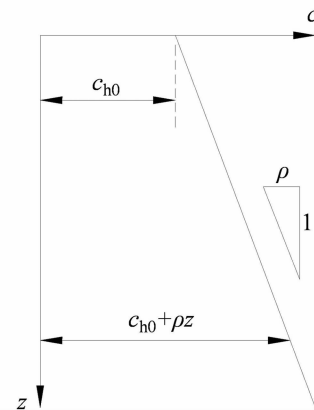


图1 黏聚力随深度变化模式

Fig.1 Variation pattern of cohesion with depth

土体的各向异性是指其黏聚力随主应力方向而变化,根据 Casagrande 和 Carillo 的研究<sup>[1]</sup>,黏聚力方向的变化可近似用图2所示的曲线表示.

当主应力与竖直方向的夹角为 $i$ 时,土体的黏聚力可由式(2)计算得到.

$$c_i = c_h + (c_v - c_h) \cos^2 i. \quad (2)$$

式中: $c_h$ 为土体水平方向的黏聚力; $c_v$ 为竖直方向的黏聚力;角度 $i$ 的几何意义如图2所示<sup>[16-17]</sup>.

引入各向异性系数 $k = c_h/c_v$ ,则式(2)可表示为:

$$c_i = c_h [1 + (1 - k)/k \cdot \cos^2 i]. \quad (3)$$

## 2 支护力求解

### 2.1 破坏机制

土质浅埋隧道的破坏机制一直是研究的热点,准确合理的破坏机制是求解支护力的关键<sup>[18-19]</sup>.Davis等<sup>[20]</sup>在1980年假定了浅埋隧道的4种破坏机制,随后在浅埋隧道稳定性的研究中得到了推广,如杨峰等<sup>[21]</sup>在此机制的基础上加以改进,提出

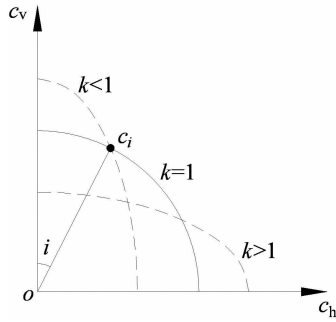


图 2 黏聚力的各向异性

Fig.2 Anisotropy of the cohesion

了 2 种适用于浅埋隧道的破坏机制,计算结果更真实,但过于复杂,不利于解决实际工程问题.Zhang 等<sup>[22]</sup>基于前人的研究成果,得到了较为简单而准确的破坏机制,并且根据实际的重力场构建了浅埋隧道破坏时的速度场,由上限定理可知,速度场符合闭合条件,如图 3 所示.图中:\$C\$ 为隧道埋深,\$D\$ 为洞径,\$\sigma\_T\$ 为支护力,\$v\_0\$ 为块体 \$AMNB\$ 的速度,\$v\_1\$ 是块体 \$MGE\$ 和 \$NGF\$ 的速度,\$v\_{01}\$ 是邻近块体间的相对速度,\$\varphi\$ 为速度与模型界线的夹角.

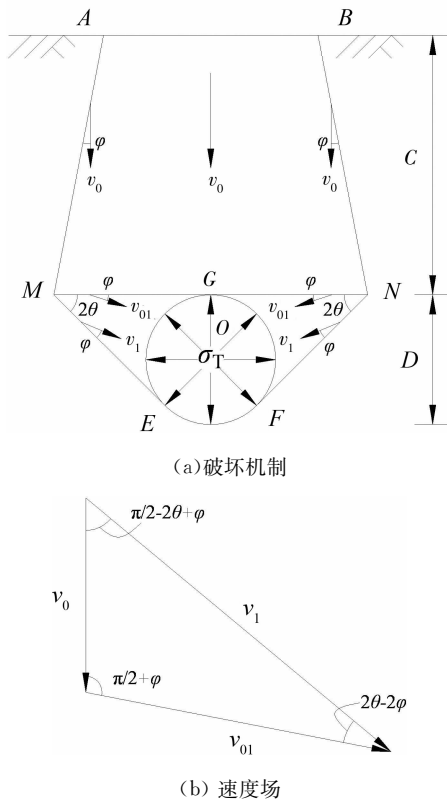


图 3 浅埋隧道破坏机制和速度场

Fig.3 Collapse mechanism and corresponding velocity field of shallow circular tunnel

### 2.2 基本假设

为求解浅埋隧道在临界破坏时的支护力,做如

下假定:

- 1)浅埋隧道的破坏机制为二维平面应变问题;
- 2)围岩为理想弹塑性材料,服从相关联的流动法则,夹角 \$\varphi\$ 与内摩擦角相等;
- 3)破坏机制中的土体为刚性块体,内能耗散只发生在破坏面上.

### 2.3 速度场

由图 3(b)所示的速度场,可计算得浅埋隧道破坏时的有关速度如下:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)}{\sin(2\theta - 2\varphi)} v_0, \\ v_{01} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta + \varphi)}{\sin(2\theta - 2\varphi)} v_0. \end{cases} \quad (4)$$

### 2.4 外功率和内能耗散率

浅埋隧道发生破坏时,外功率为土体重力功率和支护力功率,内能耗散发生在破坏面上,依据图 3(a)所示的破坏机制,可计算破坏面的长度和刚性块体的面积:

$$AM = C / \cos\varphi, \quad (5)$$

$$MG = ME = D / (2 \tan\theta), \quad (6)$$

$$S_0 = \frac{1}{2} S_{ABNM} = \frac{1}{2} (2MG - C \tan\varphi) C, \quad (7)$$

$$S_1 = S_{OEMG} - S_{崩OEG} = MG \cdot \frac{D}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{D}{2} \right]^2 (\pi - 2\theta). \quad (8)$$

计算土体重力功率:

$$P_\gamma = S_0 \cdot \gamma \cdot v_0 + S_1 \cdot \gamma \cdot v_1 \cdot \cos(\pi/2 - 2\theta + \varphi). \quad (9)$$

临界破坏时的支护力功率为:

$$P_T = -2\sigma_T \cdot MG \cdot \sin\theta \cdot v_1 \cdot \cos(\theta - \varphi). \quad (10)$$

内能耗散功率分 \$AM, MG\$ 和 \$ME\$ 三段计算:

$$P_{v1} = [1 + (1 - k) / k \cdot \cos^2 i] \cdot v_0 \cos\varphi \cdot [c_{h0} AM + 0.5\gamma(AM)^2 \cos\varphi], \quad (11)$$

$$P_{v2} = [1 + (1 - k) / k \cdot \cos^2 i] (c_{h0} + \gamma C) \cdot MG v_{01} \cos\varphi, \quad (12)$$

$$P_{v3} = [1 + (1 - k) / k \cdot \cos^2 i] \cdot v_1 \cos\varphi \cdot [(c_{h0} + \gamma C) ME + 0.5\gamma(ME)^2 \sin 2\theta]. \quad (13)$$

内能耗散功率为:

$$P_v = P_{v1} + P_{v2} + P_{v3}. \quad (14)$$

### 2.5 支护力

根据上限定理,浅埋隧道在临界破坏状态时,外功率和内能耗散功率相等,由式(9)(10)(14)计

算临界支护力为:

$$\sigma_T = \frac{P_\gamma - P_v}{2MG \cdot \sin\theta \cdot v_1 \cdot \cos(\theta - \varphi)}. \quad (15)$$

约束条件为:

$$\begin{cases} \pi/2 - 2\theta + \varphi > 0, \\ 2\theta - 2\varphi > 0. \end{cases} \quad (16)$$

求解满足约束条件(16)下的临界支护力最值,即临界支护力的最优上限解.

### 2.6 失效概率与可靠指标

前面根据极限分析法求解了浅埋隧道破坏时需要的最小支护力,在进行隧道支护设计时,会引入安全系数而得到最终的支护力.假设支护设计时的安全系数为  $F_s$ ,则实际支护力为:

$$\sigma_{T0} = F_s \cdot \sigma_T. \quad (17)$$

极限状态方程为:

$$g(X) = \sigma_{T0} - \sigma_T. \quad (18)$$

可靠度模型为:

$$R_s = P(G(X) > 0) = \int_0^\infty f(G(X))dG(X) = P\{g(X) > 0\}. \quad (19)$$

失效概率为:

$$P_f = 1 - R_s. \quad (20)$$

可靠指标为:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f). \quad (21)$$

## 3 结果分析

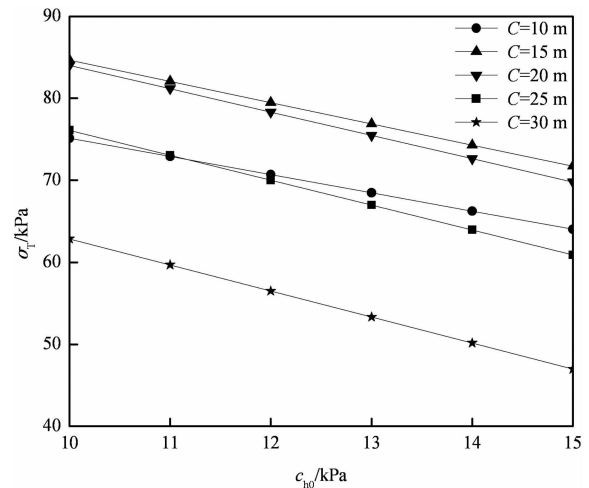
### 3.1 定值法分析

#### 3.1.1 土体非均质的影响

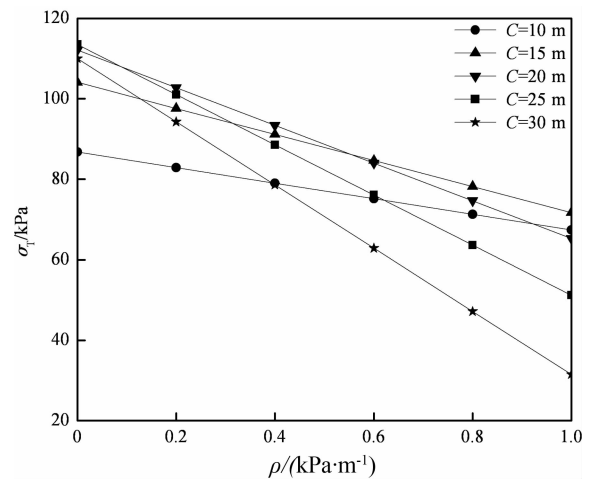
不考虑土体的各向异性,即各向异性系数  $k=1$ ,单独研究非均质对浅埋隧道支护力的影响.土体的相关参数为:隧道洞径  $D=10\text{ m}$ ,土体重度  $\gamma=20\text{ kN/m}^3$ ,夹角  $\varphi=18^\circ$ .土体初始水平黏聚力和非均质系数对浅埋隧道支护力的影响如图4所示.

随着埋深  $C$  的递增,支护力先增大后减小,图4(a)中,埋深  $C=15\text{ m}$  时支护力最大,图4(b)中,埋深  $C=15\sim 20\text{ m}$  时支护力最大.当非均质系数  $\rho \geq 0.4\text{ kPa/m}$  时,两图结果一致,这表明埋深  $C \leq 15\text{ m}$  时,支护力随埋深的增大而增大,围岩的自稳能力较差;埋深  $C > 20\text{ m}$  时,支护力随埋深的增大而减小,围岩的自稳能力较强,同时非均质系数越大,此现象越明显.

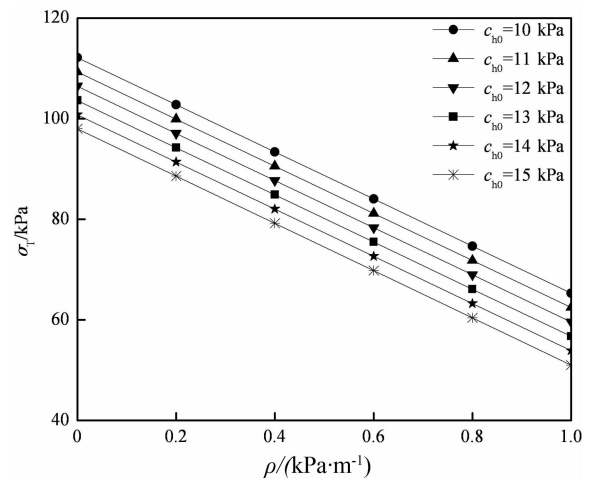
图4(c)说明,埋深一定时,支护力随非均质系数和初始水平黏聚力的增大而呈线性减小,这正好体现了土体非均质的特点.若按照均质来分析,则求



(a)初始水平黏聚力的影响



(b)非均质系数的影响



(c)埋深一定时非均质系数的影响

图4 初始水平黏聚力和非均质系数对支护力的影响

Fig.4 Effects of initial horizontal cohesion and nonhomogeneity coefficient on the supporting pressure

解的支护力偏大, 偏保守的工程设计, 势必增加工程成本.

### 3.1.2 土体各向异性的影响

不考虑土体的非均质, 即非均质系数  $\rho=0$ , 单独研究各向异性系数对浅埋隧道支护力的影响. 土体相关参数为: 隧道洞径  $D=10\text{ m}$ , 土体重度  $\gamma=20\text{ kN/m}^3$ , 黏聚力  $c=10\text{ kPa}$ , 夹角  $\varphi=18^\circ$ . 土体各向异性系数对浅埋隧道支护力的影响如图 5 所示, 随着埋深  $C$  的递增, 支护力先增大后减小, 且埋深  $C=15\sim 20\text{ m}$  时支护力最大. 这表明埋深  $C\leq 15\text{ m}$  时, 围岩的自稳能力较差, 支护力随埋深的增加而增大, 当埋深  $C>20\text{ m}$  时, 围岩的自稳能力较强, 支护力随埋深的增加而减小, 此结论与上文一致, 同时, 支护力随着各向异性系数  $k$  的增大而增大. 对于超固结土,  $k>1$ , 若不考虑各向异性则所求解的支护力偏小, 低估了隧道破坏时的围岩压力; 对于正常固结或欠固结土, 若不考虑各向异性则所求解的支护力偏大, 高估了隧道破坏时的围岩压力.

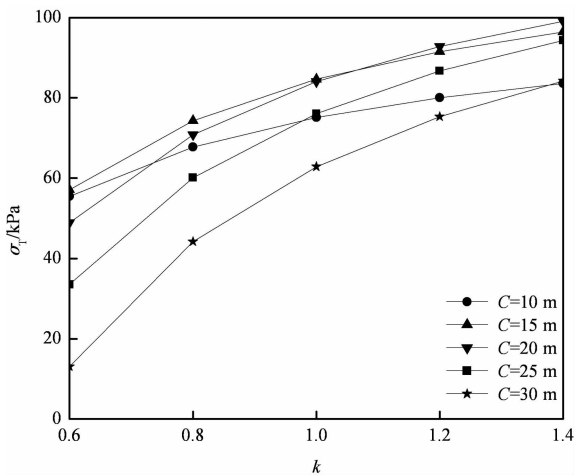


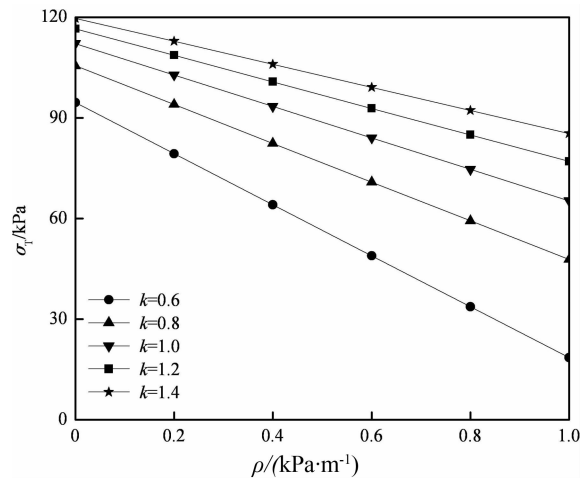
图 5 各向异性系数对支护力的影响

Fig.5 Effect of anisotropy coefficient on the supporting pressure

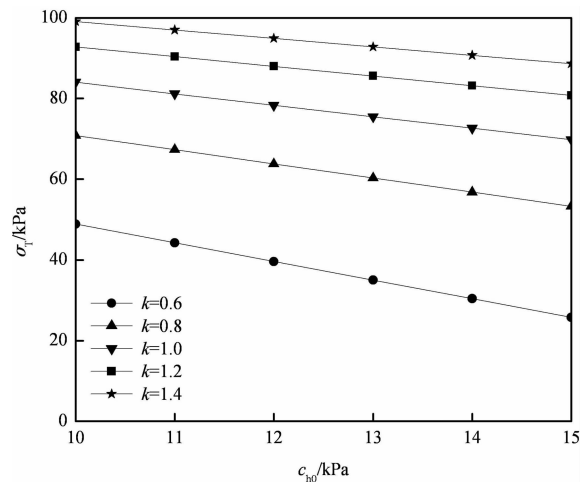
### 3.1.3 非均质和各向异性对浅埋隧道支护力的影响

同时考虑土体的非均质和各向异性, 研究其参数变化对浅埋隧道支护力的影响. 土体的相关参数为: 隧道埋深  $C=20\text{ m}$ , 洞径  $D=10\text{ m}$ . 土体非均质和各向异性对浅埋隧道支护力的影响如图 6 所示. 由图 6 可知, 各向异性系数  $k$  一定时, 随着非均质系数  $\rho$  或初始水平黏聚力  $c_{h0}$  的增大, 支护力  $\sigma_T$  减小, 降低率可达到 80%. 当其他参数不变时, 支护力  $\sigma_T$

随各向异性系数  $k$  的增大而增大, 但  $k$  越大, 增幅越小. 此外, 土体重度和内摩擦角对浅埋隧道支护力的影响如图 7 所示, 支护力随重度的增大而增大, 增长率为 11%, 支护力随内摩擦角的增大而减小, 降低率为 9%.



(a)非均质系数的影响



(b)初始水平黏聚力的影响

图 6 土体非均质和各向异性对支护力的影响

Fig.6 Effects of nonhomogeneity and anisotropy on the supporting pressure

### 3.2 敏感性与变异系数分析

土体自身离散性与外部因素随机性对浅埋隧道的可靠度有一定的影响, 不同因素对可靠度影响程度不同, 通过敏感性分析可以确定各个因素对隧道可靠度影响的显著程度. 根据文献[23]的研究成果, 假定浅埋隧道土体的相关参数和支护力呈正态分布, 统计分布特征如表 1 所示, 其中安全系数  $F_s=1.5$ .

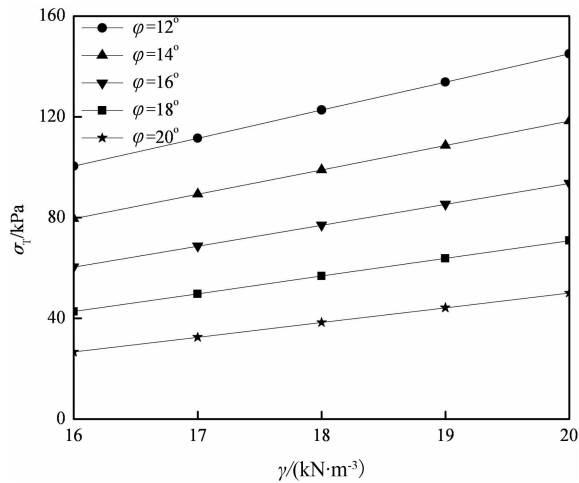


图7 土体重度和内摩擦角对支护力的影响

Fig.7 Effects of unit weight and internal angle of friction on the supporting pressure

表1 围岩参数及荷载的统计特征

Tab.1 Statistical characteristic of the parameters of surrounding rock and load

变量	均值	标准差	变异系数/%	分布
$C/m$	20	0.6	3	正态分布
$D/m$	10	0.3	3	正态分布
$\gamma/(kN \cdot m^{-3})$	20	1	5	正态分布
$\varphi/(\circ)$	18	1.8	10	正态分布
$\sigma_T/kPa$	70.8	10.62	15	正态分布
$c_{t0}/kPa$	10	2	20	正态分布
$\rho/(kPa \cdot m^{-1})$	0.6	0.12	20	正态分布
$k$	0.8	0.16	20	正态分布

随机变量对浅埋隧道可靠度影响的敏感性因子直方图如图8所示.由图8可知,隧道可靠度对非均质系数 $\rho$ 和各向异性系数 $k$ 的变化非常敏感,对其他因素的变化不太敏感.可知,非均质系数 $\rho$ 和各向异性系数 $k$ 的变化对隧道可靠度的影响显著.

变异系数是衡量随机变量变异程度的参数,可以反映土体自身的离散性和外部因素的随机性.变异系数的大小影响随机变量的统计特性,从而影响隧道的可靠度.因此,分析随机变量变异系数对隧道可靠度的影响规律可以判断各个因素离散性影响隧道稳定性的显著程度.

随机变量变异系数对可靠度的影响如图9所示,随着变异系数的增大,可靠度均呈降低趋势,但降低幅度不同.内摩擦角 $\varphi$ 的变异系数增大时,可靠度减小最快,其次是土体重度 $\gamma$ ;地表黏聚力 $c_{t0}$ ,非均质系数 $\rho$ 和各向异性系数 $k$ 的变异系数增大时,可靠度的变化最为平缓.可知,非均质与各向异性的变异系数对浅埋隧道可靠度的影响不显著.

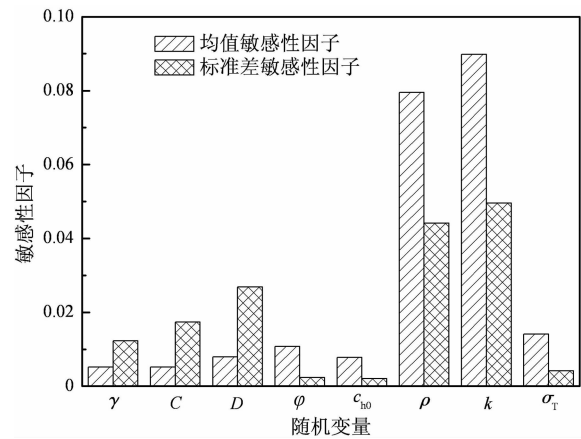


图8 可靠度随机变量的敏感性因子

Fig.8 Sensitivity factors of the reliability random variables

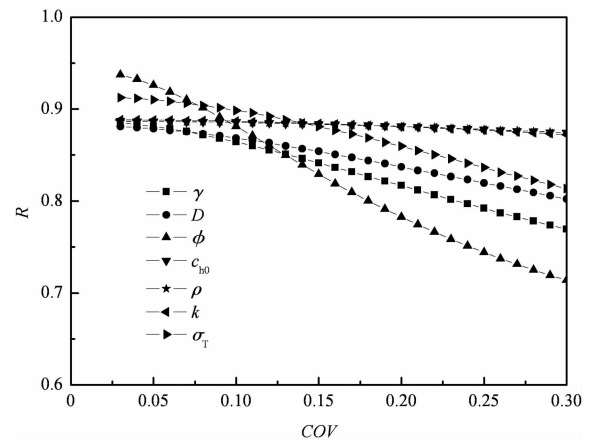


图9 随机变量变异系数对可靠度的影响

Fig.9 Effects of random variable coefficient on reliability

### 3.3 可靠度分析

考虑土体物理力学参数和支护力的离散性质,利用可靠度原理来分析土体非均质和各向异性对浅埋隧道稳定性的影响.

根据 Mollon 等<sup>[23]</sup>的研究成果,将浅埋隧道围岩的相关参数和支护力假设为正态分布或对数正态分布,并根据非均质和各向异性的离散情况分为理想、一般和不理想3类.统计特征见表2.

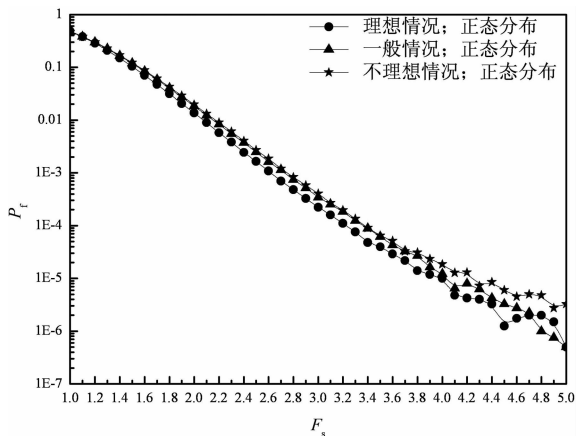
针对非均质和各向异性的3类离散情况,研究安全系数对浅埋隧道失效概率的影响,如图10所示.图10(a)中随机变量属于正态分布,图10(b)中随机变量属于对数正态分布.由图知,无论哪种分布,失效概率都随安全系数的增大而减小.区别在于,基于正态分布得到的失效概率较大,基于对数正态分布所得到的失效概率较小,安全系数较大时更为明显.当随机变量属于正态分布时,浅埋隧道发

表 2 不同离散情况下的统计特征

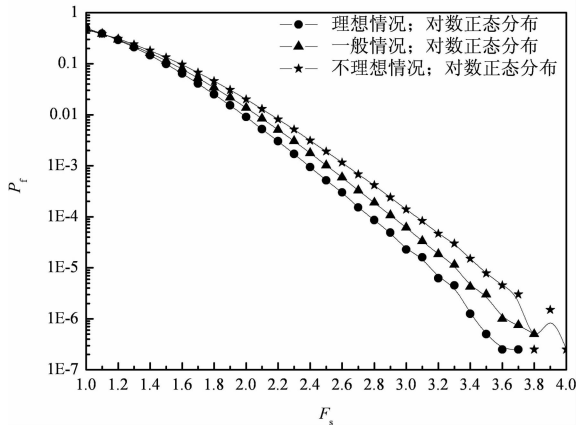
Tab.2 Statistical characteristic of different discrete condition

变量	均值	变异系数/%			分布
		理想	一般	不理想	
		C/m	20	3	
D/m	10	3	3	3	正态或对数正态
$\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	20	5	5	5	正态或对数正态
$\varphi/(\text{°})$	18	10	10	10	正态或对数正态
$\sigma_T/\text{kPa}$	70.8	15	15	15	正态或对数正态
$c_{b0}/\text{kPa}$	10	10	20	30	正态或对数正态
$\rho/(\text{kPa} \cdot \text{m}^{-1})$	0.6	10	20	30	正态或对数正态
$k$	0.8	10	20	30	正态或对数正态

生破坏的风险较大,属于对数正态分布时,发生破坏的风险较小.对 3 类离散情况,无论哪种分布,理想类的失效概率最小,其次为一般类,不理想类的失效概率最大.可知,非均质和各向异性的变异系数对失效概率有较大影响,对数正态分布更为明显.针对土体的非均质和各向异性,根据可靠度设计标准,可得到浅埋隧道满足不同安全等级所需的安全系数和支护力,具体结果见表 3.



(a) 正态分布



(b) 对数正态分布

图 10 安全系数对失效概率的影响

Fig.10 Effects of safety factor on failure probability

表 3 不同安全等级下浅埋隧道的安全系数和支护力

Tab.3 Safety factors and surrounding pressure of shallow tunnel with respect to different safety levels

分布	变异系数类别	安全等级					
		1		2		3	
		$F_s$	$\sigma_{T0}/\text{kPa}$	$F_s$	$\sigma_{T0}/\text{kPa}$	$F_s$	$\sigma_{T0}/\text{kPa}$
正态	理想	3.9	276.3	3.2	226.7	2.8	198.4
	一般	4.0	283.4	3.4	240.9	2.9	205.4
	不理想	4.1	290.4	3.4	240.9	2.9	205.4
对数正态	理想	3.2	226.7	2.8	198.4	2.5	177.1
	一般	3.3	233.8	2.9	205.4	2.6	184.2
	不理想	3.5	247.9	3.1	219.6	2.7	191.3

### 4 结 论

1) 针对土体的非均质和各向异性,采用极限分析上限法求解土质浅埋隧道支护力的理论解,利用序列二次迭代法计算约束下支护力的最优上限解.

2) 仅考虑土体非均质,埋深小于 15 m 时,围岩的自稳能力较差,支护力随埋深的增加而增大;埋深大于 20 m 时,围岩的自稳能力较强,支护力随埋深的增加而减小.仅考虑土体各向异性时,结论相同,验证了结果的正确性.

3) 同时考虑土体非均质和各向异性,浅埋隧道支护力随非均质系数或初始水平黏聚力的增大而呈线性减小,随各向异性系数的增大而增大.若不考虑非均质性,则求解的支护力偏大;若不考虑各向异性,对超固结土,求解的支护力偏小,对正常固结或欠固结土,求解的支护力偏大.总之,忽视土体的非均质和各向异性,会高估或低估隧道破坏时产生的围岩压力,不利于工程的设计、施工和运营.

4) 非均质和各向异性的变异系数对浅埋隧道支护力有较大影响,随机变量属于对数正态分布时更为明显.随机变量属于正态分布时,满足不同安全等级所需的安全系数和支护力都较大.

### 参考文献

[1] CASAGRANDE A, CARILLO N. Shear failure of anisotropic materials[J]. Journal of Boston Society of Civil Engineers, 1944, 31(4): 74-81.

[2] LO K Y. Stability of slopes in anisotropic soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1965, 91(4): 85-106.

[3] REDDY A S, SRINIVASAN R J. Bearing capacity of footings on layered clays[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, 1967, 93(2): 83-99.

[4] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975: 16-20.

- [5] 徐干成,李成学,刘平.各向异性和非均质地基土上浅基础的极限承载力[J].岩土工程学报,2007,29(2):164-168.  
XU Gancheng, LI Chengxue, LIU Ping. Ultimate bearing capacity of shallow footing on anisotropic and nonhomogeneous clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical and Engineering, 2007, 29(2): 164-168. (In Chinese)
- [6] KUO Y L, JAKSA M B, LYAMIN A V, *et al.* ANN-based model for predicting the bearing capacity of strip footing on multi-layered cohesive soil[J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36(3): 503-516.
- [7] 杨峰,赵炼恒,阳军生.各向异性和非均质黏土粗糙地基承载力上限计算[J].岩土力学,2010,31(9):2958-2966.  
YANG Feng, ZHAO Lianheng, YANG Junsheng. Upper bound ultimate bearing capacity of rough footing on anisotropic and nonhomogeneous clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(9): 2958-2966. (In Chinese)
- [8] 王栋,金霞.考虑强度各向异性的边坡稳定有限元分析[J].岩土力学,2008,29(3):667-672.  
WANG Dong, JIN Xia. Slope stability analysis by finite elements considering strength anisotropy[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(3): 667-672. (In Chinese)
- [9] 方薇,杨果林,刘晓红,等.非均质边坡稳定性极限分析上限法[J].中国铁道科学,2010,31(6):14-20.  
FANG Wei, YANG Guolin, LIU Xiaohong, *et al.* The upper-bound limit analysis of the inhomogeneous slope stability[J]. China Railway Science, 2010, 31(6): 14-20. (In Chinese)
- [10] 肖锐铨,王思敬,贺小黑,等.非均质边坡多级稳定性分析方法[J].岩土工程学报,2013,35(6):1062-1068.  
XIAO Ruihua, WANG Sijing, HE Xiaohei, *et al.* Multi-level stability analysis of inhomogeneous slopes[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6): 1062-1068. (In Chinese)
- [11] 周维祥,黄茂松,吕玺琳.非均质黏土地基中平面应变隧道最小支护压力数值模拟[J].岩土力学,2010,31(S2):418-421.  
ZHOU Weixiang, HUANG Maosong, LV Xilin. Numerical simulation of minimal support pressure of plane strain tunnel in non-homogeneous clay[J]. Rock and Mechanics, 2010, 31(S2): 418-421. (In Chinese)
- [12] 宋春霞,黄茂松,吕玺琳.非均质地基中平面应变隧道开挖面稳定上限分析[J].岩土力学,2011,32(9):2645-2662.  
SONG Chunxia, HUANG Maosong, LV Xilin. Upper bound analysis of plane strain tunnel in nonhomogeneous clays[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(9): 2645-2662. (In Chinese)
- [13] DAVIS E H, BOOKER J R. The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays[J]. Geotechnique, 1973, 23(4): 551-563.
- [14] UGAI K. A new admissible velocity field for bearing capacity calculations of strip footings[J]. Journal of the Japanese Society of SMFE, 1986, 26(2): 133-142.
- [15] TANI K, CRAIG W H. Bearing capacity of circular foundations on soft clay of strength increasing with depth[J]. Soils and Foundations, 1995, 35(4): 21-35.
- [16] 陈希有,曾国熙,龚晓南.各向异性和非均质地基上条形基础承载力的滑移场解法[J].浙江大学学报:自然科学版,1988,22(3):60-69.  
CHEN Xiyu, ZENG Guoxi, GONG Xiaonan. Characteristics solution of bearing capacity on anisotropic and nonhomogeneous clays[J]. Journal of Zhejiang University: Natural Science, 1988, 22(3): 60-69. (In Chinese)
- [17] LEE K M, ROWE R K. Effects of undrained strength anisotropy on surface subsidences induced by the construction of shallow tunnels[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1986, 26(3): 279-291.
- [18] 康石磊,杨峰,张箭,等.基于强度折减和上限有限元的椭圆形毛洞隧道围岩稳定性分析[J].湖南大学学报:自然科学版,2015,42(9):104-109.  
KANG Shilei, YANG Feng, ZHANG Jian, *et al.* Finite element upper bound analysis of stability of unlined elliptical tunnel based on strength reduction method[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2015, 42(9): 104-109. (In Chinese)
- [19] 苏永华,梁斌,伍文国.越岭浅埋偏压隧道支护系统承载特性分析[J].湖南大学学报:自然科学版,2012,39(2):1-6.  
SU Yonghua, LIANG Bin, WU Wenguo. Analysis on load-bearing characteristics of supporting system of the servants and shallow tunnel under asymmetrical pressure[J]. Journal of Hunan University: Natural Sciences, 2012, 39(2): 1-6. (In Chinese)
- [20] DAVIS E H, GUNN M J, MAIR R J, *et al.* The stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material[J]. Geotechnique, 1980, 30(4): 397-416.
- [21] 杨峰,阳军生.浅埋隧道围岩压力确定的极限分析方法[J].工程力学,2008,25(7):179-184.  
YANG Feng, YANG Junsheng. Limit analysis method for determination of earth pressure on shallow tunnel[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(7): 179-184. (In Chinese)
- [22] ZHANG J H, WANG C Y. Energy analysis of stability on shallow tunnels based on non-associated flow rule and non-linear failure criterion[J]. Journal of Central South University, 2015, 22(3): 1070-1078.
- [23] MOLLON G, DIAS D, SOUBRA A H. Range of the safe retaining pressures of a pressurized tunnel face by a probabilistic approach[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2013, 139(11): 1954-1967.