

桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋 概率 S-N 曲线研究*

徐庆元[†], 段俊, 肖祖材, 娄平, 魏琪, 张泽, 方子匀

(中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘要:为研究桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋的疲劳特性,对 HRB500 钢筋标准试件进行对称循环荷载下轴向拉压疲劳试验,得到不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件的疲劳寿命及其累积失效概率.在此基础上,以相关系数 p 和 Theil 不等系数 u 作为估计精度评价指标,对 3 种常用的三参数威布尔分布参数估计方法进行对比研究,并用精度最高的灰色预测法对 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的威布尔分布参数进行估计,得到不同应力水平下 HRB500 钢筋疲劳寿命分布函数.最后,基于 Kohout-Vêchet 方程,建立全应力水平范围内可靠指标为 4.2 的 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线.本文的研究成果可为服役期间组合荷载下桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋疲劳寿命预测模型的建立提供试验依据.

关键词:HRB500 钢筋;疲劳试验;三参数威布尔分布;概率 S-N 曲线

中图分类号:U213

文献标志码:A

Research on Probabilistic S-N Curve of HRB500 Reinforcing Bar of Longitudinal Connected Slab Track on Bridge

XU Qingyuan[†], DUAN Jun, XIAO Zucui, LOU Ping, WEI Qi, ZHANG Ze, FANG Ziyun

(School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: To study the fatigue properties of HRB500 reinforcing bar in longitudinal connected slab track on bridge, fatigue tests under symmetric axial alternating tension-compression cyclic loads for standard specimens of HRB500 reinforcing bar were conducted, and then the fatigue life and its cumulative failure probability of standard HRB500 reinforcing bar at different stress levels were obtained. On this basis, the correlation coefficient p and Theil's inequality coefficient u were used as indexes of estimation accuracy to evaluate three methods which are widely used to estimate parameters of three-parameter Weibull distribution. And the grey prediction method, whose prediction accuracy is the highest among the three methods, was used to estimate the parameters of three-parameter Weibull distribution for the fatigue life of standard HRB500 reinforcing bar, and the distribution functions for the fatigue life of HRB500 reinforcing

* 收稿日期:2016-12-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51178469), National Natural Science Foundation of China(51178469); 中南大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2017ZZTS593), Fundamental Research Funds for the Central Universities of Central South University(2017ZZTS593); 国家自然科学基金-高速铁路基础研究联合基金资助项目(U1334203, U1134209), National Natural Science Joint High Speed Railway Foundation of China(U1334203, U1134209)

作者简介:徐庆元(1972-),男,湖北武汉人,中南大学教授,博士

[†] 通讯联系人, E-mail: xqingyuan1972@163.com

bar at different stress levels were obtained. Ultimately, the probabilistic S-N curve of HRB500 reinforcing bar in the longitudinal connected slab track on bridge with reliable index of 4.2 based on Kohout-Vêchet equation in the full stress range was established. The research can provide experimental basis for the establishment of fatigue life prediction model of HRB500 reinforcing bar in the longitudinal connected slab track on bridge under combined loads during service life.

Key words: HRB500 reinforcing bar; fatigue test; three-parameter Weibull distribution; probabilistic S-N curve

桥上纵连板式无砟轨道是一种主要的桥上无砟轨道结构型式,在我国高速铁路建设中得到了广泛使用.和其他类型桥上无砟轨道相比,桥上纵连板式无砟轨道具有更好的线路平顺性,其钢轨、扣件、桥梁墩台的纵向力学特性也更为优异^[1-2].但由于桥上纵连板式无砟轨道钢筋在纵向是连续的,混凝土则是按开裂设计的,不但列车垂向荷载、无砟轨道不均匀温差荷载、下部基础变形荷载对其受力有较大影响,而且对其他类型桥上无砟轨道力学特性影响较小的列车纵向荷载,无砟轨道均匀温度荷载、无砟轨道混凝土收缩荷载等,对桥上纵连板式无砟轨道也会产生较大影响^[3-5].且其一旦损坏,修复也更为困难.在服役期间复杂荷载组合作用下,桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋承受变幅拉压循环荷载.如何保证桥上纵连板式无砟轨道钢筋不发生疲劳断裂,以确保高速列车安全、高速运行,是工程界十分关注的问题.因此,对桥上纵连板式无砟轨道所用 HRB500 钢筋的疲劳特性进行研究具有重要的现实意义.

HRB500 钢筋具有优良的力学性能,广泛应用于桥上纵连板式无砟轨道底座板和轨道板中.目前,国内学者虽对 HRB500 钢筋的疲劳特性进行了一些研究^[6-8],但研究还存在很大的不足.如文献^[6]疲劳试验所用的应力比为 0.1,且只进行了 9 根试件的疲劳试验;文献^[7]只针对 HRB500 钢筋的低周疲劳特性进行了试验研究;文献^[8]根据英国《混凝土用碳素钢标准》(BS4449)规定的试验方法,仅验证了 HRB500 钢筋的疲劳性能符合我国规范要求.现有的研究成果都未能考虑可靠指标对 HRB500 钢筋疲劳寿命的影响,还不能满足服役期间随机变幅荷载组合作用下桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋疲劳可靠性评估及疲劳寿命预测的需要.

为此,本文对 HRB500 钢筋标准试件进行对称循环荷载下轴向拉压疲劳试验,得到不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件的疲劳寿命.在此基础上,以相关系数 p 和 Theil 不等系数 u 作为估计精度评价指标,对 3 种常用的三参数威布尔分布参数

估计方法进行对比研究,并用精度最高的灰色预测法对 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的威布尔分布参数进行估计,得到不同应力水平下 HRB500 钢筋疲劳寿命分布函数.最后,基于 Kohout-Vêchet 方程^[9],建立全应力水平范围内可靠指标为 4.2 的 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线.本文的研究成果可为服役期间组合荷载下桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋疲劳特性的研究和疲劳寿命预测模型的建立提供试验依据.

1 试验过程

试验材料选用安阳钢铁集团生产的直径 16 mm 的 HRB500 钢筋.首先参照国家标准 GB/T 228.1-2010《金属材料拉伸试验第 1 部分:室温试验方法》加工 HRB500 钢筋并进行轴向拉伸试验,以便为下文 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线的建立提供必要的参考数据.静力试验分 10 组进行,可得 HRB500 钢筋标准试件屈服强度为 601 MPa,极限强度为 780 MPa.此后进行疲劳试验,参照规范 GB/T 3075-2008《金属材料疲劳试验轴向力控制方法》加工 HRB500 钢筋标准试件以进行对称循环荷载下轴向拉压疲劳试验,加工后的 HRB500 钢筋标准试件如图 1 所示.试验中 HRB500 钢筋标准试件最大应力分别取 350 MPa、400 MPa、425 MPa、450 MPa 和 500 MPa,试验频率为 5 Hz,每种应力水平下进行 6 组平行试验.疲劳试验在室温环境下的 MTS 810 电液伺服材料试验机上进行,直至试件断裂或疲劳循环次数达到 200 万次时停止.

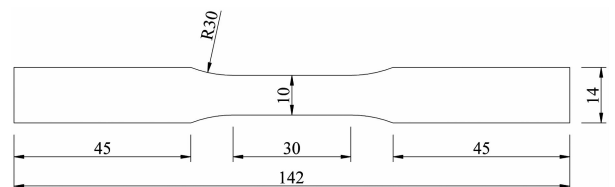


图 1 HRB500 钢筋疲劳试验标准试件(单位:mm)
Fig. 1 Standard specimen of HRB500 reinforcing bar for fatigue test (dimensions in mm)

2 试验结果

疲劳试验中,所有 HRB500 钢筋标准试件的断裂位置均在平行部分长度范围内的中部,试验数据符合要求,断裂后的钢筋标准试件如图 2 所示。

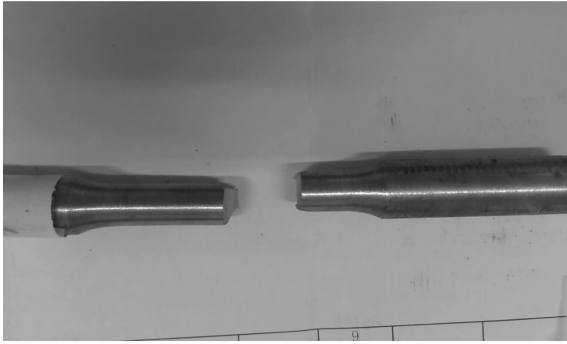


图 2 HRB500 钢筋标准试件疲劳破坏图
Fig. 2 Fatigue failure figure of standard specimen of HRB500 reinforcing bar

在获得不同应力水平对称循环荷载下 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的基础上,按递增顺序对定应力水平下的疲劳寿命进行排序,然后按 GB/T 24176—2009《金属材料疲劳试验数据统计方案与分析方法》中的中位秩公式(1)计算定应力水平下疲劳寿命的累积失效概率。

$$F(N_{Li}) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \quad (1)$$

式中: $F(N_{Li})$ 为累积失效概率; n 为该应力水平下的样本数; i 为样本数据从小到大排列后的序号。

HRB500 钢筋标准试件对称循环荷载下轴向拉压疲劳寿命及其累积失效概率见表 1。

3 桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线研究

3.1 疲劳寿命三参数威布尔分布的参数估计

威布尔分布是描述机械系统及其零部件寿命数据分布规律最常用的一种分布形式^[10]。三参数威布尔分布增加了位置参数,限定了试件的最小寿命,较好地适用于各类金属试件的疲劳试验。此外,正态分布、指数分布等都可以看作是威布尔分布的特例。因此,本文使用三参数威布尔分布来描述 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的分布情况。三参数威布尔分布的累积概率分布函数和可靠度函数见文献[10],分别如式(2)和式(3)所示。

$$F(N) = 1 - e^{-[(N-\gamma)/\eta]^\beta}, N \geq \gamma \quad (2)$$

表 1 HRB500 钢筋标准试件
疲劳寿命和累积失效概率

Tab. 1 The fatigue life of standard specimens of HRB500 reinforcing bar and its cumulative failure probability

试件序号	最大应力 σ_{\max}/MPa	最小应力 σ_{\min}/MPa	疲劳寿命 N/次	累积失效 概率
1-1	500	-500	4 569	0.109
1-2	500	-500	5 033	0.266
1-3	500	-500	7 288	0.422
1-4	500	-500	8 803	0.578
1-5	500	-500	8 998	0.734
1-6	500	-500	12 361	0.891
2-1	450	-450	21 238	0.109
2-2	450	-450	23 949	0.266
2-3	450	-450	28 727	0.422
2-4	450	-450	30 440	0.578
2-5	450	-450	32 485	0.734
2-6	450	-450	46 518	0.891
3-1	425	-425	24 287	0.109
3-2	425	-425	34 651	0.266
3-3	425	-425	39 780	0.422
3-4	425	-425	50 550	0.578
3-5	425	-425	56 824	0.734
3-6	425	-425	91 527	0.891
4-1	400	-400	60 791	0.109
4-2	400	-400	66 779	0.266
4-3	400	-400	90 734	0.422
4-4	400	-400	95 788	0.578
4-5	400	-400	157 115	0.734
4-6	400	-400	359 297	0.891
5-1	350	-350	119 452	0.109
5-2	350	-350	146 059	0.266
5-3	350	-350	189 554	0.422
5-4	350	-350	211 349	0.578
5-5	350	-350	325 807	0.734
5-6	350	-350	584 604	0.891

$$P(N) = e^{-[(N-\gamma)/\eta]^\beta}, N \geq \gamma \quad (3)$$

式中: N 为试验所得钢筋疲劳寿命; β 为形状参数, η 为尺度参数; γ 为位置参数。

三参数威布尔分布的参数估计相比两参数威布尔分布要复杂得多,其常用的参数估计方法有极大似然法^[11]、相关系数法^[12]、灰色预测法^[13]等。极大似然法具有较高的预测精度,尤其是处理不完全寿命的情况时,具有明显的优势。相关系数法算法简单,且兼有较高的精度,被广泛应用于参数估计问题。

灰色预测法是邓聚龙^[13]最早于 1982 年在国际上提出,是一种对含有不确定信息的系统进行预测的方法。灰色系统理论建模的主要任务是根据具体灰色系统的行为特征数据,充分开发并利用为数不多的数据中的显信息和隐信息,寻找因素间或因素本身的数学关系。灰色预测法具有精度高,能充分利用已有信息等优点,已成为一种重要的参数估计方法。

为了选择一种适用于 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命三参数威布尔分布参数估计的方法,首先要选定合适的精度评价指标。随着统计学理论的发

展,平均误差、残差平方和、均方根误差等单一评价指标已逐渐退出使用. 本文采用文献[14]中的相关系数 p 和文献[15]中的 Theil 不等系数 u 作为估计精度评价指标,从相关性和不等性两个方面对极大似然法、相关系数法和灰色预测法 3 种参数估计方法进行了对比. 其表达式分别如式(4)和式(5)所示.

$$p = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \hat{x}_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \hat{x}_i}{\sqrt{\left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n \hat{x}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \hat{x}_i \right)^2 \right]}} \quad (4)$$

$$u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - x_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (5)$$

式中: \hat{x}_i 为疲劳寿命预测值; x_i 为疲劳寿命实测值; n 为该应力水平下疲劳试验的试件数量.

用 3 种估计方法分别对 HRB500 钢筋标准试件在如表 1 所示的各个应力水平下的疲劳寿命三参

表 2 不同应力水平下 3 种估计方法的参数估计精度对比表

Tab. 2 Comparison table for parameter estimation accuracy with three methods at different stress levels

最大应力 σ_{\max} /MPa	极大似然法		相关系数法		灰色预测法	
	相关系数 p	Theil 不等系数 u	相关系数 p	Theil 不等系数 u	相关系数 p	Theil 不等系数 u
500	0.968 7	0.091 7	0.973 6	0.090 9	0.980 4	0.062 7
450	0.981 5	0.068 8	0.978 5	0.052 8	0.980 3	0.050 5
425	0.990 4	0.092 4	0.985 4	0.069 0	0.989 6	0.057 2
400	0.955 5	0.263 7	0.995 7	0.064 0	0.997 8	0.040 0
350	0.983 4	0.179 3	0.995 4	0.058 9	0.998 0	0.032 2

表 3 不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命三参数威布尔分布参数估计值

Tab. 3 Estimated parameters values of three-parameter Weibull distribution for fatigue life of standard specimens of HRB500 reinforcing bar at different stress levels

最大应力 σ_{\max} /MPa	尺度参数 η	形状参数 β	位置参数 γ
500	5 517	1.563	3 085
450	7 971	0.733	22 670
425	23 326	0.788	27 230
400	57 662	0.486	61 193
350	134 360	0.644	120 152

3.2 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命预测值

根据 GB 50153—2008《工程结构可靠性设计统一标准》,高速铁路桥上纵连板式无砟轨道疲劳破坏属于安全等级为一级的脆性破坏,其可靠指标要求达到 4.2. 因此,建立桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线时,需得到 HRB500 钢筋可靠指标为 4.2 时的疲劳寿命预测值.

当三参数威布尔分布函数的参数 β 、 η 和 γ 值已知时,由式(2)可得不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的分布函数,由式(3)可求得不同

数威布尔分布进行参数估计,并计算出各个应力水平下的相关系数 p 和 Theil 不等系数 u . 不同应力水平下 3 种估计方法的参数估计精度对比如表 2 所示.

相关系数 p 的值介于 0 到 1 之间,Theil 不等系数 u 的值介于 0 到 ∞ 之间. p 越接近于 1, u 越接近于 0,表示预测精度越高. 由表 2 可得,在选用的 3 种参数估计方法中,综合考虑相关系数 p 和 Theil 不等系数 u ,采用灰色预测法进行 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命三参数威布尔分布参数估计时能获得最高的估计精度. 因此,采用灰色预测法估计 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命三参数威布尔分布的参数是合适的.

采用灰色预测法,对 5 组应力水平下 HRB500 钢筋标准试件的疲劳寿命进行三参数威布尔分布拟合,所得不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命三参数威布尔分布的参数估计值见表 3.

可靠指标下 HRB500 钢筋标准试件的疲劳寿命预测值 N . 可靠指标为 4.2 时不同应力水平下的 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命预测值见表 4.

表 4 可靠指标为 4.2 时不同应力水平下 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命预测值

Tab. 4 Predicted fatigue life of standard specimens of HRB500 reinforcing bar with reliable index of 4.2 at different stress levels

可靠指标	最大应力 σ_{\max} /MPa	疲劳寿命 N /次
4.2	500	3 089
4.2	450	22 670
4.2	425	27 230
4.2	400	61 193
4.2	350	120 152

3.3 HRB500 钢筋概率 S-N 曲线拟合

对于钢筋疲劳寿命方程的建立,常用的方法是对表 4 中不同应力水平下的疲劳寿命采用 Basquin^[16] 方程的双对数直线形式 $\lg S = \lg a + b \lg N$ (a 、 b 为 Basquin 方程参数)进行拟合. 但 Basquin 方程的精度受到循环破坏次数的影响,只适用于循环破坏次数在 $10^3 \sim 10^6$ 之间的中等应力水平情形^[9],对于桥上纵连板式无砟轨道钢筋可能

承受的高应力水平和低应力水平, Basquin 方程并不能很好地适用. 因此本文采用文献[9]提出的 Kohout-Vêchet 方程, 建立全应力水平范围内 HRB500 钢筋的概率 $S-N$ 曲线. 该方程具有形式简单、参数含义明确、外推和内插性能好等诸多优点, 适合钢筋疲劳曲线的拟合. 其表达式如式(6)所示.

$$S = a \left[\frac{(N+B)C}{N+C} \right]^b \quad (6)$$

式中: a 和 b 为 Basquin 方程参数; B 和 C 为 Kohout-Vêchet 方程参数.

根据表 4 中的数据, 按式(6)计算 Kohout-Vêchet 方程的各个参数, 可得可靠指标为 4.2 时拟合优度为 0.912 2 的 HRB500 钢筋 $S-N$ 方程, 如式(7)所示.

$$S = 1079 \times \left[\frac{(N+34) \times 8.3298 \times 10^{10}}{N+8.3298 \times 10^{10}} \right]^{-0.092} \quad (7)$$

由式(7)可作可靠指标为 4.2 时桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋的 $S-N$ 曲线, 如图 3 所示.

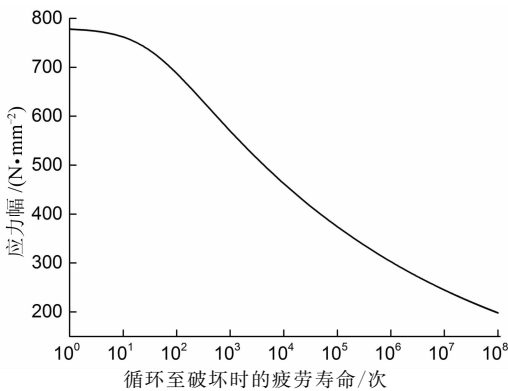


图 3 可靠指标为 4.2 时 HRB500 钢筋 $S-N$ 曲线

Fig. 3 The $S-N$ curve of HRB500 reinforcing bar with reliable index of 4.2

4 结 论

1) 采用灰色预测法对 HRB500 钢筋标准试件疲劳寿命的三参数威布尔分布进行参数估计, 可获得较高的估计精度.

2) 建议采用基于 Kohout-Vêchet 方程建立的全应力水平范围概率 $S-N$ 曲线预测 HRB500 钢筋的疲劳寿命.

3) 本文的研究成果可为桥上纵连板式无砟轨道 HRB500 钢筋力学特性的研究和疲劳寿命预测模型的建立提供试验依据.

参 考 文 献

[1] 徐庆元, 张旭久. 高速铁路博格纵连板桥上无砟轨道纵向力学特性[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2009, 40(2): 526-532.
XU Q Y, ZHANG X J. Longitudinal forces characteristic of Bögl lon-

gitudinal connected ballastless track on high-speed railway bridge[J]. Journal of Central South University(Science and Technology), 2009, 40(2): 526-532. (In Chinese)

[2] 戴公连, 龙绿军, 刘文硕. 纵连板式无砟轨道简支梁桥动力响应试验研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(9): 105-112.
DAI G L, LONG L J, LIU W S. Experimental study on the dynamic response of continuous slab tracks and simply supported bridges[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2016, 43(9): 105-112. (In Chinese)

[3] 德国博格公司. 博格板式无砟轨道设计培训资料[R]. 巴伐利亚: 德国博格公司, 2005.
Bögl Company of Germany. Training materials for design of Bögl longitudinal connected ballastless track[R]. Bavaria: Bögl Company of Germany, 2005. (In Chinese)

[4] 赵磊, 孙璐, 孙伟, 等. 无黏结支撑的轨道板板角离缝研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2016, 43(7): 75-81.
ZHAO L, SUN L, SUN W, et al. Research on the warp of CRTSII slab track on the support layer without bonding[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2016, 43(7): 75-81. (In Chinese)

[5] 戴公连, 苏海霆, 闫斌. 秋季桥上纵连板式无砟轨道竖向温差试验研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2015, 42(3): 94-99.
DAI G L, SUN H T, YAN B. Experimental study on the vertical temperature gradient of longitudinally connected slab ballastless track on bridge in autumn[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2015, 42(3): 94-99. (In Chinese)

[6] 陆鹏雁, 刘煜, 吴华杰, 等. HRB500 高强钢筋拉压疲劳性能研究及断口分析[J]. 机械强度, 2015, 37(2): 248-253.
LU P Y, LIU Y, WU H J, et al. Research on tension fatigue performance of HRB500 high-strength rebar and fractography analysis [J]. Journal of Mechanical Strength, 2015, 37(2): 248-253. (In Chinese)

[7] 吕品. HRB500 高强钢筋低周疲劳性能研究[D]. 大连: 大连理工大学土木工程学院, 2011: 47-48.
LV P. Research on low cycle fatigue behavior of high strength steel HRB500[D]. Dalian: School of Civil Engineering, Dalian University of Technology, 2011: 47-48. (In Chinese)

[8] 吕王彪. 细晶高强钢筋的组织及性能研究[D]. 沈阳: 东北大学材料与冶金学院, 2010: 58-60.
LV W B. Microstructure and properties of fine grains for high strength hot rolled bars[D]. Shenyang: School of Materials and Metallurgy, Northeastern University, 2010: 58-60. (In Chinese)

[9] KOHOUT J, VÊCHET S. A new function for fatigue curves characterization and its multiple merits[J]. International Journal of Fatigue, 2001, 23(2): 175-183.

[10] DNP M, XIE M, JIANG R Y. Weibull models[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2004, 9-13.

[11] 杨谋存, 聂宏. 三参数 Weibull 分布参数的极大似然估计数值解法[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(1): 22-25.
YANG M C, NIE H. Advanced algorithm for maximum likelihood estimation of three parameter Weibull distribution[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007, 39(1): 22-25. (In Chinese)

[12] 胡恩平, 罗兴柏, 刘国庆. 三参数 Weibull 分布几种常用的参数估计方法[J]. 沈阳工业学院学报, 2000, 19(3): 88-94.
HU E P, LUO X B, LIU G Q. Parameter estimating methods for the three parameters Weibull distribution[J]. Journal of Shenyang Institute of Technology, 2000, 19(3): 88-94. (In Chinese)

[13] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2005: 2-4.
DENG J L. The primary methods of grey system theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 2005: 2-4. (In Chinese)

[14] 郑荣跃, 秦子增. Weibull 分布参数估计的灰色方法[J]. 强度与环境, 1989(2): 34-40.
ZHENG R Y, QIN Z Z. Grey estimations for the three parameters Weibull distribution[J]. Structure & Environment Engineering, 1989(2): 34-40. (In Chinese)

[15] LEUTHOLD R M. On the use of Theil's inequality coefficients[J]. American Journal of Agricultural Economics, 1975, 57(2): 344-346.

[16] BASQUIN O H. The exponential law of endurance tests[C]// Proceedings of the American Society for Testing and Materials. Pennsylvania: American Society for Testing and Materials, 1910: 625-630.