

对称荷载作用下弹性地基梁的傅里叶级数解*

杨成永¹,寇鼎涛²,程霖^{1†},马文辉¹

(1.北京交通大学 土木建筑工程学院,北京 100044;2.北京市轨道交通建设管理有限公司,北京 100068)

摘要:考虑地层位移荷载及梁与地基可能产生的脱空,针对长度在沉降槽内和长度延伸到沉降槽外的2种梁建立了弹性地基梁对称问题的数学模型.利用阶梯函数及脉冲函数,在所建数学模型基础上推导了求解弹性地基梁挠度的傅里叶级数系数的线性方程组,提出了计算方程组中脱空范围这一多余未知量的迭代步骤,利用有限元数值解对傅里叶级数解进行了验证.结果表明,傅里叶级数解精度高,可以作为带有脱空弹性地基梁问题的解析解,要达到相同的精度,傅里叶级数解的计算量远比有限元解的计算量小.此外,脱空范围的大小,不随级数项数的多寡而改变.傅里叶级数解法不但精度高,而且能够灵活处理不同形式的荷载,是求解复杂荷载条件下弹性地基梁问题的有效解析方法.

关键词:地下结构;弹性地基梁;地基沉降;脱空;傅里叶级数

中图分类号:U455

文献标志码:A

Fourier Series Solution for Elastic Foundation Beams under Symmetric Loads

YANG Chengyong¹, KOU Dingtao², CHENG Lin^{1†}, MA Wenhui¹

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Beijing MRT Construction Administration Corporation, Beijing 100068, China)

Abstract: Taking into account the load due to ground displacement and the detachment between a beam and ground, a mathematical model was presented for two kinds of elastic foundation beams under symmetric loads. A kind of beams has a length larger than the width of settlement trough, and another with less length than the width of the trough. Heaviside step function and impulse function were introduced, and their Fourier series expansions were given. According to the established model and making use of the step function and impulse function, an equation set for solving the coefficients of the series that represents the deflection of elastic ground beam was derived. An iteration process to find detachment interval, which is a redundant unknown in the equation set, was put forward. Lastly, verification was done to the proposed series solution by comprising with finite element method. The results show that Fourier series solution is of high accuracy of computation, and can be used as an analytical solution of the elastic foundation beams. To achieve the same accuracy, series solution needs much less amount of calculation. The computed value of detachment interval in the series solution doesn't change with the number of employed series items. In a whole, Fourier series solution offers high accuracy and convenience in dealing with different kinds of loads. It provides an analytical way to effectively solve the problems for an elastic foundation beam under complicated loads.

* 收稿日期:2016-12-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478032), National Natural Science Foundation of China(51478032)

作者简介:杨成永(1966-),男,贵州遵义人,北京交通大学教授,博士

† 通讯联系人, E-mail:bjd_chenglin@163.com

Key words: underground structures; elastic foundation beam; ground settlement; detachment; Fourier series

管线及轨道可以将其视为弹性地基梁进行受力和变形分析. 地下工程施工引起的地层沉降会对地下管线及铁路和地铁轨道施加土层位移荷载. 基坑工程施工中,土方开挖可能使地下管线悬空,导致管线与地层产生脱空;隧道穿越工程施工中,下伏隧道开挖引起地层沉降较大时,会导致上覆隧道中的轨道与其隧道底板的脱离^[1-2]. 管线由于悬吊需要承受集中荷载,轨道需要承受轮压作用. 因此,承受地层位移荷载并与地基产生脱空的弹性地基梁模型,具有实际需要和理论意义.

Hetenyi^[3]对弹性地基梁进行了较早的系统研究,提出了经典弹性地基梁微分方程的通解. 刘齐建^[4]在改进 Vlasov 双参数地基模型基础上,提出了考虑埋深影响的弹性地基梁计算模型. 夏桂云等^[5]考虑地基及梁的抗剪能力,建立了双参数地基 Timoshenko 梁的微分方程,给出了初参数解和传递矩阵法,并利用初参数解建立了有限元列式. 严宗达^[6]系统地讨论了梁(包括弹性地基梁)的傅里叶级数解法,但没有考虑土层位移荷载. 杨维加^[7]将地基反力表示为三角级数,采用配点法建立方程求解级数的系数,可以处理边荷载、变截面梁、有限深地基等问题,但不能处理地基与梁的脱空,也没有考虑土层位移荷载. Attewell 等^[8]采用弹性地基梁方法系统地分析了地下管线由于土层沉降产生的响应. 张坤勇等^[9]在文献[3]通解的基础上,假定土层的位移函数及管线位移的特解均可用多项式表达,然后根据边界条件及不同区段间的连续性条件确定积分系数. 姜玲等^[10]探讨了弹性地基无限长梁的初参数解法. 杨成永等^[11]研究了地下管线作为弹性地基梁的大变形问题. 文献[9-11]均可称为解析方法,均只能够求解无限长梁.

叙述梁变形的控制微分方程、右端荷载及梁端部的约束条件后,给出了阶梯函数及脉冲函数的傅里叶级数展开式. 把阶梯函数及脉冲函数引入到控制微分方程,推导了求解长梁及短梁挠度的傅里叶系数的线性方程组. 讨论了线性代数方程组的解法. 最后进行了傅里叶级数解与有限元数值解的对比计算和梁长度划分的讨论.

1 梁变形的数学模型

图1为梁受力和变形示意图. 参见图1,考虑置

于地基上的梁,受自重、对称的地基沉降、集中力和集中弯矩作用. 在中间区域,梁的挠度可能小于地基沉降,因此梁与地基将产生脱空.

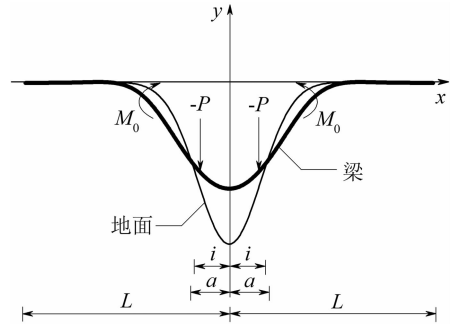


图1 梁受力和变形示意图

Fig. 1 Forces on a beam and deformation of the beam

梁的控制微分方程可以写为:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (1)$$

式中: w 为梁的挠度,m,向上为正; x 为梁轴线的坐标,m; E 为梁弹性模量,Pa; I 为梁横截面的惯性矩, m^4 ; q 为右端荷载.

只考虑一对集中力和一对集中弯矩作用,右端荷载可以写为:

$$q = \begin{cases} Kb(S-w) - g\gamma + P - M_0, & \text{接触区段}(x < -a \text{ 及 } x > a) \\ -g\gamma + P - M_0, & \text{脱开区段}(-a \leq x \leq a) \end{cases} \quad (2)$$

式中: K 为地基系数,Pa/m; b 为梁宽度,m; S 为地基沉降,m,向上为正; γ 为梁的线密度,kg/m; g 为重力加速度, m/s^2 ; P 为集中荷载,N,向上为正; M_0 为集中弯矩, $N \cdot m$,以图1中的弯曲方向为正; a 为梁与地基脱离范围的半宽,m.

如果考虑多个集中力或者弯矩,推导公式将有所不同,但并不造成困难.

地基沉降在级数解法中可以为任意形式. 为明确起见,假定其符合正弦曲线.

$$S = -S_0 e^{-x^2/2i^2} \quad (3)$$

式中: S_0 为地基最大沉降,m; i 为沉降槽参数,即地基沉降曲线反弯点距 $x=0$ 处的水平距离,m.

相对于沉降槽的宽度来说,梁可以分为“槽外梁”和“槽内梁”. 一般地(见图1),当梁长大于沉降槽参数的5倍时($L > 2.5i$),称为槽外梁;反之($L \leq 2.5i$)称为槽内梁.

梁两端的边界条件如下:

对于槽外梁,梁两端转角为0.

$$\omega'(\pm L) = 0 \quad (4)$$

对于槽内梁,梁两端弯矩为0.

$$\omega''(\pm L) = 0 \quad (5)$$

无论槽外梁和槽内梁,两端剪力均为0.

$$\omega'''(\pm L) = 0 \quad (6)$$

2 阶梯函数和脉冲函数

因为要分析梁与地基的脱空,需要用到 Heaviside 阶梯函数.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a, a] \\ 1, & x < -a \text{ 及 } x > a \end{cases} \quad (7)$$

进行傅里叶级数求解,需要把各个变量展成三角级数.由于对称,各变量均可展成余弦级数.

阶梯函数 H 在 $[-L, +L]$ 上的余弦级数展开为:

$$H(x) = \frac{H_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} H_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (8)$$

$$H_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x) dx = \frac{2(L-a)}{L} \quad (9)$$

$$H_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L H(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = -\frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi a}{L} \quad (10)$$

式中: H_0 和 H_k 为级数的系数.

由于梁上有集中力和集中弯矩作用,需要用到脉冲函数(δ 函数)及其一阶导数.脉冲函数可表示为:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = \pm x_0 \\ 0, & x \neq \pm x_0 \end{cases} \quad (11)$$

式中: x_0 为集中力或弯矩作用的位置.

脉冲函数的级数展开为^[6]:

$$\delta(x) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (12)$$

$$\delta_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x) dx = \frac{2}{L} \quad (13)$$

$$\delta_k = \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \cos \frac{k\pi x_0}{L} \quad (14)$$

脉冲函数一阶导数的级数展开为:

$$\delta'(x) = \frac{\delta'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta'_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (15)$$

$$\delta'_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \delta'(x) dx = 0 \quad (16)$$

$$\delta'_k = \frac{2}{L} \int_0^L \delta'(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2k\pi}{L^2} \sin \frac{k\pi x_0}{L} \quad (17)$$

3 傅里叶级数解法

把式(2)代入式(1),并引入阶梯函数及脉冲函数,得

$$EI \frac{d^4 \omega}{dx^4} - Kb(S - \omega)H + g\gamma - P\delta + M_0 \delta' = 0 \quad (18)$$

式(18)中阶梯函数及脉冲函数如前述已展开成三角级数,下面把其他各项也用三角级数表示.

地基沉降 S 在 $[-L, +L]$ 上的级数展开为:

$$S(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (19)$$

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L S(x) dx \quad (20)$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L S(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \quad (21)$$

式中: b_0 和 b_k 为级数的系数.

在槽内梁情况下,难于找到被积函数式(3)的原函数,式(20)和(21)需要进行数值积分.对于槽外梁,有

$$b_0 \approx \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} S(x) dx = -\sqrt{2\pi} \frac{i}{L} S_0 \quad (22)$$

$$b_k \approx \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = -\sqrt{2\pi} \frac{i}{L} S_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2} \quad (23)$$

关于梁挠度 ω 的级数展开,对于槽内梁,需要在傅里叶级数上添加补充项,可写为:

$$\omega(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} - \theta_0 \frac{L}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad (24)$$

式中: a_0 和 a_k 为待求的系数; θ_0 为梁两端的转角, rad. 为讨论方便,记

$$W(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (25)$$

$$R(x) = -\frac{L}{2} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad (26)$$

式中: $W(x)$ 为梁挠度的级数部分; $R(x)$ 为梁挠度的补充项部分.对于槽外梁,可令 $\theta_0 = 0$,式(24)中便无补充项.下同.

应注意到,公式(24)已满足梁端条件式(4)、(5)和式(6).由式(24)可知,梁挠度的各阶导数为:

$$\omega'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{k\pi}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} + \theta_0 \frac{x}{L} \quad (27)$$

$$\omega''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \cos \frac{k\pi x}{L} + \theta_0 \frac{1}{L} \quad (28)$$

$$w''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^3 \sin \frac{k\pi x}{L} \quad (29)$$

$$w'''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (30)$$

阶梯函数 H 与补充项 R 的乘积 $R(x)H(x)$ 在 $[-L, +L]$ 上的级数展开为:

$$v(x) = \frac{v_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (31)$$

$$v_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L R(x)H(x)dx = a - \frac{2}{3}L - \frac{a^3}{3L^2} \quad (32)$$

$$v_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L R(x)H(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{2L}{k^2 \pi^2} (-1)^k + f(a) \quad (33)$$

$$f(a) = \left(\frac{L}{k\pi} + \frac{2L}{k^3 \pi^3} - \frac{a^2}{k\pi L}\right) \sin \frac{k\pi a}{L} - \frac{2a}{k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi a}{L} \quad (34)$$

下面计算阶梯函数 H 与地基沉降 S 及梁挠度级数项 W 的乘积. S 与 H 乘积 $S(x)H(x)$ 的傅里叶级数为:

$$G(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (35)$$

根据傅里叶级数相乘的法则^[6], 利用式(8)和式(19), 有

$$\beta_0 = \frac{b_0 H_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m H_m \quad (36)$$

$$\beta_k = \frac{b_0 H_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m (H_{m+k} + H_{|m-k|}) \quad (37)$$

式中: $|\cdot|$ 表示绝对值, 下同.

W 与 H 的乘积 $W(x)H(x)$, 利用式(8)和式(25)可得:

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \frac{k\pi x}{L} \quad (38)$$

$$\alpha_0 = \frac{a_0 H_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m H_m \quad (39)$$

$$\alpha_k = \frac{a_0 H_k}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (H_{m+k} + H_{|m-k|}) \quad (40)$$

将式(12)、(15)、(30)、(31)、(35)、(38)代入方程(18)后, 有

$$\begin{cases} \alpha_0 + v_0 \theta_0 = \beta_0 - \frac{2g\gamma - P\delta_0 + M_0 \delta'_0}{Kb} \\ EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 a_k + Kb\alpha_k + Kb v_k \theta_0 = \\ Kb\beta_k + P\delta_k - M_0 \delta'_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (41)$$

式(41)为无穷线性代数方程组. 把式(39)和

(40)的 α_0 和 α_k 代入式(41), 只取前 n 项, 最终得到:

$$\begin{cases} \frac{H_0 a_0}{2} + \sum_{m=1}^n H_m a_m + v_0 \theta_0 = \\ \beta_0 - \frac{2g\gamma - P\delta_0 + M_0 \delta'_0}{Kb} \\ \frac{Kb}{2} H_k a_0 + EI \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 a_k + \frac{Kb}{2} \sum_{m=1}^n (H_{m+k} + \\ H_{|m-k|}) a_m + Kb v_k \theta_0 = Kb\beta_k + \\ P\delta_k - M_0 \delta'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (42)$$

式(42)即为确定式(24)中待定系数 a_0 、 a_k 及梁端转角 θ_0 的方程组.

4 方程组的求解

式(42)有 $n+1$ 个方程, $n+3$ 个未知量, 分别是 a_0 至 a_n ; 脱空范围 a , 含在 H_k ($k=0 \sim 2n$) 中; 梁端部转角 θ_0 .

对于槽外梁, 式(42)中无 θ_0 项. 对于槽内梁, 为了确定 θ_0 , 需要利用梁端弯矩为 0 的条件. 由式(38)可补充 1 个方程:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 a_k + \frac{1}{L} \theta_0 = 0 \quad (43)$$

对脱空范围 a , 可采用迭代方法确定, 确定方法如下:

首先假设梁全长与地基接触, 没有脱空, 即 $a=0$, 然后计算得到挠曲线 $w(x)$. 若全长均有 $w(x) > S(x)$, 表示无脱空, 那么该解即为所求之解. 如果有脱空, 即若存在 $w(x) \leq S(x)$ 的区域, 则从 $x=0$ 处往两侧寻求脱空点 $w(x) = S(x)$ 的坐标, 记为 $x^{(1)}$, 该坐标即为 a 的第 1 次近似值. 令 $a = x^{(1)}$ 进行第 2 次求解, 得到 $x^{(2)}$. 以此类推直到 $x^{(k)}$ 和 $x^{(k-1)}$ 足够接近为止. 最后一轮计算得到的 $x^{(k)} = a$ 及 $w(x)$ 即为该问题的傅里叶级数解.

确定待定系数 a_0 、 a_k 及梁端转角 θ_0 后, 梁挠度曲线式(24)就完全确定了. 梁的弯矩及剪力可以根据挠度曲线计算.

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (44)$$

$$Q = EI \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (45)$$

式中: M 为弯矩, $N \cdot m$; Q 为剪力, N .

5 模型验证

5.1 级数解与数值解的比较

为验证傅里叶级数解答的正确性, 采用 AN-

SYS 有限元软件对同一个算例进行计算.

计算参数为:梁底面宽 15 cm,截面面积 77.45 cm²,弹性模量 2.1×10⁵ MPa,惯性矩 3 217 cm⁴.地基系数 20 MPa/m.地基沉降槽宽度参数 $i=3$ m,最大沉降 $S_0=50$ mm.槽外梁的计算范围取 36 m.槽内梁长度取 10 m.

槽内梁计算时,式(20)和式(21)的积分采用自适应辛普生法^[12].级数解中取级数项数分别为 20 项、50 项、100 项、150 项和 200 项进行计算,得出计算结果,发现第 100 项后,结果变化很小.因此,取 100 级数项的解作为级数解结果.

有限元计算中,地基对梁的作用通过弹簧单元(单元号 LINK180)模拟,地基与梁间的脱空由弹簧

单元的不抗拉特性并经 ANSYS 软件自行迭代实现.槽外梁两端轴向位移及转动被约束,槽内梁只约束中点的轴向位移.梁承受自身重力,地基对梁的位移荷载施加到弹簧单元连接地基的一端.

槽外梁和槽内梁均剖分为单元号为 BEAM188 的梁单元.单元长度分别为 50 cm、20 cm、10 cm、5 cm 和 2.5 cm 的有限元计算结果表明,当单元长度小于 5 cm 时,计算结果变化很小.因此,取 5 cm 的计算值作为有限元计算结果.此时槽外梁划分单元 720 个,槽内梁划分单元 200 个.

计算结果列于表 1.级数解的部分梁挠度曲线见图 2.

表 1 级数解与数值解计算结果
Tab. 1 Results by series method and numerical method

工况编号	梁承受荷载	梁长度 /m	梁脱空范围 a /m		梁中点沉降 /mm		梁中点弯矩 /(kN·m)		集中荷载作用点梁沉降/mm		集中荷载作用点梁弯矩/(kN·m)	
			级数解	数值解	级数解	数值解	级数解	数值解	级数解	数值解	级数解	数值解
1	梁自重、地基沉降	36	5.68	5.68	21.96	21.96	7.30	7.32	—	—	—	—
2		10	4.40	4.43	25.67	25.69	6.80	6.84	—	—	—	—
3	梁自重、地基沉降、集中力—20 kN 作用于 $x=0$ m 处	36	2.40	2.43	47.98	47.88	35.53	35.78	—	—	—	—
4		10	1.33	1.38	49.49	49.50	36.55	36.74	—	—	—	—
5	梁自重、地基沉降、集中力—10 kN 作用于 $x=\pm 3$ m 处	36	3.30	3.48	38.80	38.65	15.39	15.31	28.85	28.79	12.51	12.70
6		10	2.87	2.88	41.35	41.32	16.40	16.45	30.72	30.72	13.67	13.76
7	梁自重、地基沉降、集中力—50 kN 作用于 $x=\pm 12$ m 处	36	5.70	5.88	21.28	21.17	7.19	7.19	4.87	4.89	20.36	21.28
8	梁自重、地基沉降、集中弯矩 10 kN·m 作用于 $x=\pm 3$ m 处	36	5.10	5.18	31.16	31.05	13.18	13.08	22.73	22.67	11.44	10.43
9		10	3.85	3.78	38.27	38.29	16.09	16.19	27.84	27.85	14.24	13.49
10	梁自重、地基沉降、集中弯矩—10 kN·m 作用于 $x=\pm 3$ m 处	36	6.10	6.08	11.72	11.77	1.15	1.27	11.19	11.22	9.05	8.57
11		10	4.50	4.48	11.71	11.73	-2.95	-2.99	13.99	14.00	-6.32	-5.69
12	梁自重、地基沉降、集中弯矩—10 kN·m 作用于 $x=\pm 12$ m 处	36	5.60	5.58	22.15	22.47	7.31	7.47	0.32	0.35	-5.80	-5.70

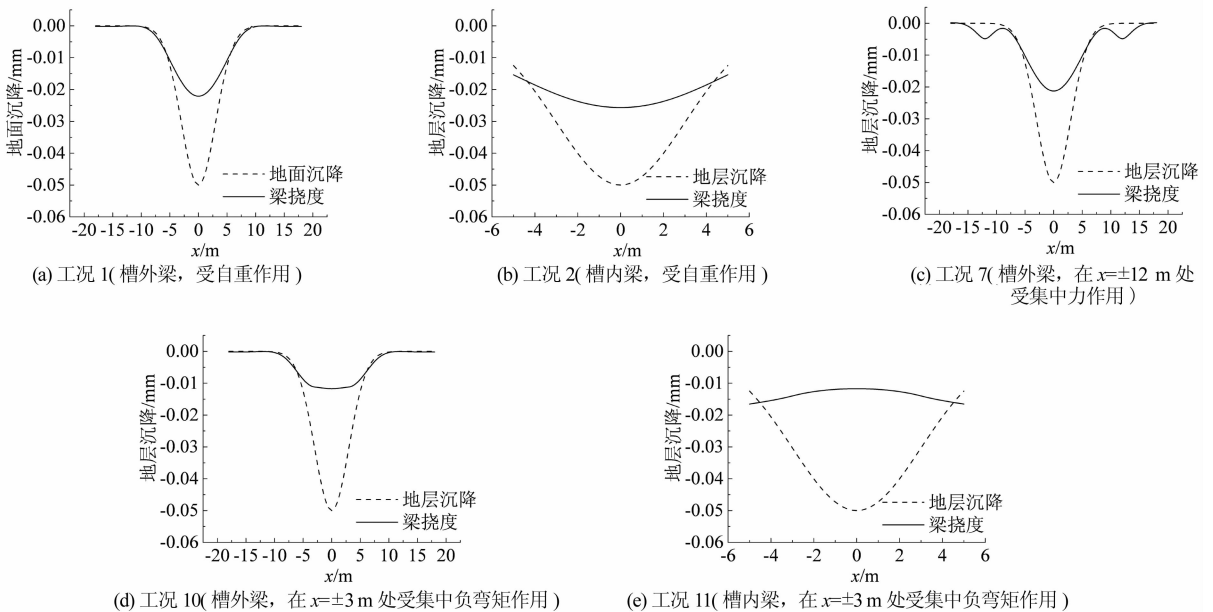


图 2 不同工况下的梁挠度曲线
Fig. 2 Deflection of a beam upon different conditions

由表1可以看出,级数解与有限元解的计算结果十分接近,表明傅里叶级数解具有相当高的精度,求解结果正确,可以作为带有脱空弹性地基梁问题的解析解.从计算过程来看,级数解比有限元解具有如下优点:

1) 级数解脱空范围的大小,不随级数项数的增减而变;有限元解脱空范围是根据受拉弹簧单元的位置确定的,将随划分单元的长短而变.

2) 级数解和有限元解都需要解线性方程组,但级数解的方程组比有限元要小得多.在上述算例中,槽外梁和槽内梁的级数解的方程个数分别为101个和102个,而有限元解则分别为2159个($719 \times 3 + 2 \times 1$)和601个($199 \times 3 + 2 \times 2$).

5.2 槽外梁和槽内梁的划分长度

前述是以梁长是否大于5倍沉降槽参数来划分槽外梁和槽内梁的.为了验证这一划分长度的正确性,选择3种梁长30 m($L=5i$)、24 m($L=4i$)及18 m($L=3i$),考虑梁自重及地基沉降作用,分别按槽外梁和槽内梁进行计算.结果列于表2.

表2 不同梁端条件的计算结果

Tab.2 Results with different boundary conditions

工况编号	梁长度/m	梁端约束条件	梁脱空范围 a/m	梁中点沉降/mm	梁中点弯矩/(kN·m)
1	30	弯矩为0	5.64	21.958	7.297
		转角为0	5.64	21.958	7.297
2	24	弯矩为0	5.58	21.945	7.288
		转角为0	5.58	21.978	7.300
3	18	弯矩为0	5.14	23.501	7.659
		转角为0	5.67	21.385	7.197

从表2可以看出,在梁长 $L=5i$ 时,按槽外梁和槽内梁的计算结果完全相同;当梁长 $L=4i$ 时,梁中点沉降及弯矩开始有区别,但区别不大;当梁长为 $L=3i$ 时,脱空范围、梁中点沉降及弯矩的区别就很明显了.根据这个计算结果可得出,按 $L=5i$ 来划分槽外梁和槽内梁是合理的;在计算精度要求不高时,可以 $L=4i$ 作为槽外梁和槽内梁的分界.

6 结束语

对承受地层位移荷载并可能产生脱空的弹性地基梁的对称问题进行了傅里叶级数求解,经过与有限元数值解对比,得到了满意的结果,认为傅里叶级数解法是求解弹性地基梁复杂问题的有效方法.

下列问题还有待今后继续开展研究:

1) 没有讨论反称荷载.有反称荷载时,级数展开式中需要有正弦项,推导过程会稍繁琐,但不存在困难.

2) 没有讨论地层上鼓变形的情况.地层上鼓起时,梁与地基的脱空区与沉降时相比将有所不同.

参考文献

- [1] 张成平,张顶立,吴介普,等.暗挖地铁车站下穿既有地铁隧道施工控制[J].中国铁道科学,2009,30(1):69-73.
ZHANG C P,ZHANG D L,WU J P,*et al.* Construction control of a newly-built subway station undercrossing the existing subway tunnel [J]. China Railway Science,2009,30(1):69-73. (In Chinese)
- [2] 张成平,张顶立,王梦恕.大断面隧道施工引起的上覆地铁隧道结构变形分析[J].岩土工程学报,2009,31(5):805-810.
ZHANG C P,ZHANG D L,WANG M S. Structural deformation of overlying subway tunnels induced by tunneling [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2009,31(5):805-810. (In Chinese)
- [3] HETENYI M. Beams on elastic foundation[M]. Ann Arbor: The University of Michigan Press,1946.
- [4] 刘齐建.考虑埋深效应的弹性地基中梁分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2009,36(9):12-15.
LIU Q J. An analytical method for beams embedded in an elastic foundation[J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences),2009,36(9):12-15. (In Chinese)
- [5] 夏桂云,李传习,曾庆元.考虑双重剪切的弹性地基梁分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2011,38(11):19-24.
XIA G Y,LI C X,ZENG Q Y. Analysis for elastic foundation beam with double shear effect[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2011,38(11):19-24. (In Chinese)
- [6] 严宗达.结构力学中的傅里叶级数解法[M].天津:天津大学出版社,1989:80-147.
YAN Z D. Fourier series solutions in structural mechanics [M]. Tianjin: Tianjin University Press,1989:80-147. (In Chinese)
- [7] 杨维加.弹性地基梁的三角级数解法[M].北京:水利水电出版社,2005:19-94.
YANG W J. Trigonometric series solutions for a beam on elastic foundation[M]. Beijing: China Water & Power Press,2005:19-94. (In Chinese)
- [8] ATTEWELL P B, YEATES J, SELBY A R. Soil movements induced by tunnelling and their effects on pipelines and structures[M]. London: Blackie and Son Ltd,1986:127-166.
- [9] 张坤勇,王宇,艾英钵.任意荷载下管土相互作用解答[J].岩土工程学报,2010,32(8):1189-1193.
ZHANG K Y,WANG Y,AI Y B. Analytical solution to interaction between pipelines and soils under arbitrary loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2010,32(8):1189-1193. (In Chinese)
- [10] 姜玲,汪中卫,王旭东.隧道开挖引起地下管线竖向位移的初参数法求解[J].南京工业大学学报(自然科学版),2010,32(4):72-76.
JIANG L,WANG Z W,WANG X D. Initial parameter method for solving vertical displacement of buried pipelines caused by tunnel excavation[J]. Journal of Nanjing University of Technology(Natural Science Edition),2010,32(4):72-76. (In Chinese)
- [11] 杨成永,张彦斌,张伦政.匀质地下管线大变形的控制微分方程及其近似解[J].中国铁道科学,2014,35(1):42-46.
YANG C Y,ZHANG Y B,ZHANG L Z. Governing differential equation and approximate solution for large deformation of jointless underground pipeline [J]. China Railway Science,2014,35(1):42-46. (In Chinese)
- [12] 刘德贵,费景高,于泳江,等. FORTRAN 算法汇编(第一分册)[M].北京:国防工业出版社,1980:152-157.
LIU D G,FEI J G,YU Y J,*et al.* FORTRAN algorithm collection (Volume 1) [M]. Beijing: National Defense Industry Press,1980:152-157. (In Chinese)