

移动荷载作用下结构弹塑性安定分析方法及其应用研究

庄妍^{1,2†}, 王孟², 王康宇²

(1. 东南大学 土木工程学院, 江苏 南京 210096;
2. 河海大学 岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098)

摘要:为了研究移动荷载作用下结构的安定性问题,以 Melan 静力型安定定理为基础,通过构造满足静力平衡条件的最佳残余应力场,并求解移动荷载作用下结构中的真实弹性应力场,发展了一种弹塑性安定性计算方法.该方法摆脱了传统安定性分析方法中的数学规划运算,解决了计算中维数障碍的问题.通过与前人研究结果对比,说明本方法的正确性.基于此方法,研究了列车荷载直接作用下路基的静力安定极限的第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} ,进行轮载间距 L 和铁轨间距 B 对路基安定极限的敏感性分析,发现当轮载间距 L 和铁轨间距 B 大于等于 $10a$ 时,轮载间距 L 和铁轨间距 B 对路基安定极限不再产生影响;通过分析材料泊松比 ν 和内摩擦角 φ 对安定极限的影响,表明安定极限随着路基泊松比的增大略有减小,但随着内摩擦角的增大而有明显增加;并提出了一种基于安定极限荷载包络图的路基安定性评价方法和设计方法,据此可对铁路路基进行设计指导和安全性评价.

关键词:安定分析;铁路;赫兹荷载;Melan 静力安定定理;移动荷载;弹塑性材料
中图分类号:TU4 **文献标志码:**A

Study on Shakedown Analysis Method of Elastic-plastic Structures under Moving Loads Structures and Its Application

ZHUANG Yan^{1,2†}, WANG Meng², WANG Kangyu²

(1. College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China;
2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: An elastic-plastic shakedown solution is established for the shakedown analysis of the structure under moving loads. On the basis of the Melan's static shakedown theorem, this method is developed by searching for the best residual stress field, and calculating the actual elastic stress field subjected to the moving loads. This method avoids the operation of mathematical programming in traditional method of shakedown analysis, and therefore obstruction due to large scale mathematical programming is overcome. The validity of this method is verified by comparing the results of the previous study. Based on this method, the upper bound type 1 shakedown limit k_1 and static shakedown limit k_{SD} of railway subgrade are presented. A sensitive analysis is also presented,

* 收稿日期:2017-05-10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478166), National Natural Science Foundation of China(51478166);“青蓝工程”资助, Financial Support Sponsored by Qing Lan Project; 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目, Fundamental Research Funds for the Central Universities; “111”计划项目(B13024), 111 Projects(B13024)

作者简介:庄妍(1982—),女,江苏邳州人,东南大学教授,博士生导师,博士

† 通讯联系人, Email:Joanna_zhuang@163.com

showing that the shakedown limit remains stable if the distance between the loads L and rails B is longer than $10a$, so that the upper bound type 1 shakedown limit k_1 is shown. Meanwhile, by means of investigation on the influence of Poisson's ratio and internal friction angle, it is found that the static shakedown limit k_{SD} diminish marginally with the increase of Poisson's ratio, while both the upper bound type 1 shakedown limit k_1 and static shakedown limit k_{SD} experience a steadily growth with the increase of internal friction angle. A design method for subgrade is finally proposed based on the envelope diagram of shakedown limits, which can provide guidelines for design and safety assessment of railway subgrade.

Key words: shakedown analysis; railways; Hertz load; Melan's lower-bound shakedown theorem; moving load; elastis plastic materials

高速铁路无砟轨道具有乘坐舒适、方便快捷、运输能力强等优势,因此成为铁路客运专线发展的必然选择^[1].随着经济社会的发展和“一带一路”战略的提出,我国高速铁路的建设得到了快速的发展.截至2016年底,中国高铁的运营里程已经达到2.2万公里,占世界高速铁路运营总里程60%多.国家发改委等部门出台的规划明确指出,到2025年,中国高速铁路通车里程将达到3.8万公里,并形成“八纵八横”的高铁网.2017年6月,具有完全自主知识产权的中国标准的动车组“复兴号”首发成功,最高时速达400 km/h.随着列车运行速度的不断提高,作为轨下基础的路基发挥着越来越重要的作用^[2],对铁路安全性、可靠性的要求日渐提高^[3].但是现行的设计方法仍以静态或准静态为主^[4],对于路基临界应力、破坏时机、塑性应变累积、永久变形的预测都是难以确定和定义的,而在研究道路结构性能时,这些都是必要因素.安定性是对结构在变化荷载作用下塑形行为的研究.通过安定分析可以确定结构的临界安定载荷和破坏机制,为工程设计和安全评估提供准确可靠的理论依据^[5].

自安定理论20世纪30年代开始建立以来,安定分析方法得到了迅速的发展^[6].1962年,Johnson^[7]利用静力安定定理(Melan定理)求解出一个Tresca半无限空间体在移动竖向赫兹荷载作用下的安定极限.1984年,Sharp等^[8]首次把安定理论引入到了道路工程领域,他们把道路问题简化为一种平面应变问题,运用静力安定定理对Mohr-Coulomb材料在循环移动荷载下的变形趋势问题进行安定分析.其后,国内外许多专家学者提出,利用安定理论分析交通荷载引起的公路和铁路结构动态响应以及永久变形,可改进设计方法,从而达到降低维修成本的目的.1995年,刘启跃^[9]提出应以钢轨的安定极限值代

替钢轨的弹性极限值作为钢轨的许用极限值.2010年,Francois等^[10]研究了交通荷载引起的小幅循环荷载对道路结构产生的永久变形和破坏.2014年,Fang等^[11]将道路结构简化为层状饱和半空间上的薄板,揭示了路面柔性和支撑层特性对路面系统响应的影响.2016年,Li等^[12]基于安定理论建立计算有砟轨道永久变形的数值模型.

目前通用的安定性计算方法是采用数学规划技术,用这种方法,当单元比较多或载荷空间顶点比较多时,规划问题的约束条件就很多.这样就形成大规模非线性规划问题,出现所谓的维数障碍现象,使得计算量呈指数上升,内存量急剧膨胀,即使对现代计算机来说,也是件十分困难的工作,使得问题实际上不可求解^[13].

以Melan静力型安定定理为基础,本文发展了一种弹塑性安定性计算方法,该方法通过求移动荷载作用下结构中的真实弹性应力场,并构造满足静力平衡条件的最佳残余应力场,获得静力安定极限的第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} ,摆脱了传统安定性分析方法中的数学规划运算,解决了计算中维数障碍的问题.基于所发展的安定分析方法,将荷载简化为单个赫兹荷载时,本文的结果与Shiau^[14]和Ponter等^[15]接近,说明本文的方法是正确的.对铁路结构进行简化,研究了列车荷载直接作用下路基的静力安定极限的第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} ,进行轮载间距 L 和轨距 B 对路基安定极限的敏感性分析;分析了材料泊松比 ν 和内摩擦角 φ 对安定极限的影响,并绘制了不同摩擦角材料的安定荷载包络线.

1 经典的Melan安定性分析下限定理

Melan于1938年提出了静力安定定理(下限定

理):如果能够找到一个自相平衡的残余应力场 σ_{ij}^r ,它与由外荷载所引起的弹性应力场共同构成一个处于屈服极限之内的应力系统,则结构是安定的^[16].若外部荷载用 λ_p 表示,其中 p 是单位荷载, λ 是无量纲因子(又称安定乘子),则静力安定理论可表示为:

$$f(\lambda\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \quad (1)$$

式中: $\lambda\sigma_{ij}^e$ 是由于外部静力荷载 λ_p 所产生的弹性应力场; $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ 是材料的屈服准则.通过静力安定定理可以计算出安定极限值的下限,因此,它也被称为下限安定定理.

根据 Melan 定理,安定分析的问题可以转化为一个数学规划的问题:

$$\lambda_{SD} = \max \lambda \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} n_i \sigma_{ij}^r = 0, \sigma_{ij,j}^r = 0 \\ f(\sigma_{ij}^r) \leq 0 \\ f(\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中, λ_{SD} 称为“静力安定极限”,第一个条件保证了残余应力场满足自平衡的条件,第二、三个条件保证了残余应力场和总应力场为安定应力,即未发生屈服^[17].

根据 Krabbenhoft 等^[18]和 Zhao 等^[19],当放开式(2)中的一些条件时,可以得到静力安定极限的不同上限.例如,将式(2)简化为:

$$\lambda_I = \max \lambda \quad \text{s.t.} \quad f(\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \quad (3)$$

Krabbenhoft 等和 Zhao 等将 λ_I 定义为静力安定极限的第一类上限.同样可以放松其他条件得到静力安定极限的第二类上限 λ_{II} 和第三类上限 λ_{III} .

$$\lambda_{II} = \max \lambda \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} f(\sigma_{ij}^r) \leq 0 \\ f(\lambda\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_{III} = \max \lambda \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} n_i \sigma_{ij}^r = 0, \sigma_{ij,j}^r = 0 \\ f(\lambda\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据求解所需的条件,易知 $\lambda_{SD} \leq (\lambda_{II}, \lambda_{III}) \leq \lambda_I$. 第二类上限 λ_{II} 和第三类上限 λ_{III} 不考虑残余应力的屈服条件,因此对残余应力没有一个上下界的约束,求解将会变得特别困难.所以本文仅对 λ_{SD} 和 λ_I 进行求解.

2 基于静力安定定理的弹塑性安定分析方法

根据 Melan 定理,要求解静力安定极限,就必须找到一个符合条件的残余应力场.Hills & Sackfield^[20] 提出,可能存在不同的符合条件的残余应力场,这些

不同残余应力场都可以得出同样的安定极限.而求解的安定极限的精确度便取决于所构造的残余应力场与真实残余应力场的差值.根据勒沙特里(Henri Louis Le Chatelier)平衡原理^[21],结构总是以一种最佳的方式去抵抗外界的作用,所以,在屈服后的变形过程中完全有可能塑造出最佳的残余应力场,而关键在于如何分离出这个最佳的残余应力场.

2.1 荷载定义

交通荷载是常见的移动荷载,工程上对单个车辆轮载的模拟常采用赫兹荷载分布形式^[9](如图 1 所示):

$$\begin{cases} p = \frac{p_0}{a}(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \\ q = \frac{q_0}{a}(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} \\ (x^2 + y^2 \leq a^2) \end{cases} \quad (6)$$

式中, p_0 表示中心($x = y = 0$)处的分布荷载; q_0 为切向荷载,根据摩擦系数 μ 的关系有 $q_0 = \mu p_0$; $2a$ 为荷载宽度.

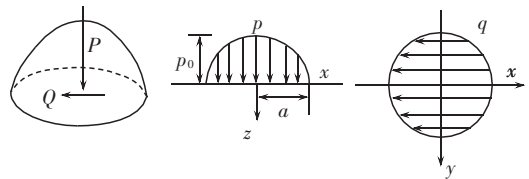


图 1 赫兹荷载
Fig.1 Hertz load

2.2 弹性应力场求解

Hamilton^[22]给出了赫兹荷载作用下半无限空间任意一点(x, y, z)应力的解析公式,因此,半空间体表面受 N 个轮载作用时,空间中每一点的弹性应力由每个赫兹荷载产生的应力叠加而得到.

假设第 i 个荷载作用点($x_i, y_i, 0$)空间三维结构中每一点(x, y, z)的弹性应力分别由竖向荷载和切向荷载独立作用并相互叠加,即:

$$\sigma_{ij}^e = (\sigma_{ij}^e)_p + (\sigma_{ij}^e)_q \quad (7)$$

$$\text{令} \begin{cases} x'_i = x - x_i \\ y'_i = y - y_i \end{cases}$$

则竖向荷载产生的弹性应力为:

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx}^e)_p = & \sum_{i=1}^{40} \frac{p_0}{a} \left[(1+v)z\varphi + \frac{1}{r^2} \left\{ -N(x_i'^2 + 2vy_i'^2) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{Mx_i'^2za}{S} + \frac{y_i'^2 - x_i'^2}{r^2} [(1-v)Nz^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1-2v}{3} (NS+2AN+a^3) - vMza] \right\} \right] \end{aligned}$$

$$(\sigma_{zz}^e)_p = \sum_{i=1}^{40} \frac{p_0}{a} \left[-N + \frac{azM}{S} \right]$$

$$(\sigma_{xz}^e)_p = \sum_{i=1}^{40} \frac{p_0}{a} \left[-z \left(\frac{x_i'N}{S} - \frac{x_i'zH}{G^2 + H^2} \right) \right]$$

水平荷载产生的弹性应力为:

$$(\sigma_{xx}^e)_q = \sum_{i=1}^{40} \frac{q_0}{a} \left[\frac{ax_i'M}{r^4} \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{2x_i'^2}{r^2} \right) (Sv - 2Av + z^2) + \frac{x_i'^2 z^2}{S} + \frac{7vr^2}{4} - 2vx_i'^2 + r^2 \right\} + \frac{x_i'zN}{r^4} \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{2x_i'^2}{r^2} \right) \left[-\frac{S}{6} (1-2v) - \frac{A}{3} (1-2v) - \frac{1}{2} (z^2 + 3a^2) \right] + \frac{a^2 x_i'^2}{S} - \frac{vr^2}{4} - \frac{7r^2}{4} \right\} - x_i' \left(\frac{v}{4} + 1 \right) \varphi + \frac{4a^3 x_i' z}{3r^4} \left(\frac{3}{2} - \frac{2x_i'^2}{r^2} \right) (1-2v) \right]$$

$$(\sigma_{zz}^e)_q = \sum_{i=1}^{40} \frac{q_0}{a} \left[\frac{x_i'zN}{2r^2} \left(1 - \frac{r^2 + z^2 + a^2}{S} \right) \right]$$

$$(\sigma_{xz}^e)_q = \sum_{i=1}^{40} \frac{q_0}{a} \left[\frac{3z\varphi}{2} + \frac{azM}{r^2} \left\{ 1 + \frac{x_i'^2}{r^2} - \frac{x_i'^2}{S} \right\} + \frac{N}{r^2} \left\{ -\frac{3}{4} (S+2A) + z^2 - \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} r^2 + \frac{z^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2x_i'^2}{r^2} \right) \right\} \right]$$

其中:

$$A = r^2 + z^2 - a^2; S = (A^2 + 4a^2 z^2)^{1/2}; r^2 = x_i'^2 + y_i'^2;$$

$$M = \left(\frac{S+A}{2} \right)^{1/2}; N = \left(\frac{S-A}{2} \right)^{1/2}; \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{a}{M} \right);$$

$$G = M^2 - N^2 + 2M - aN; H = 2MN + aM + zN$$

2.3 残余应力场

假设材料是均匀且各向同性的,因此沿着移动荷载前进方向(x -方向)的残余应力和塑性变形分量应与坐标位置无关.Yu等^[23]假设在运动荷载作用下的临界面为 $x-z$ 平面(即与 $y = \text{常数}$),在这样的平面上,对静力安定极限有影响的残余应力分量只有 σ_{xx}^r .Johnson^[24]、Kapoor & Johnson^[25]、Collins & Boulbibane^[26]等指出,在对称荷载作用下,切应力 σ_{xz}^r 关于 x 轴是反对称的,因此在 $x = 0$ 处, $\sigma_{xz}^r = 0$,而切应力 σ_{xz}^r 又与 x 坐标位置无关,所以切应力 σ_{xz}^r 对安定极限没有影响.当然, y -方向存在不为零的应力分量 σ_{yy}^r .Shiau^[14]利用数值模拟的方法,考虑 σ_{xx}^r 和 σ_{yy}^r 的残余应力场计算得到了静力安定极限.Wang等^[27]

利用Mohr-Coulomb屈服准则时,将 $\sigma_{yy} = \lambda \sigma_{yy}^e + \sigma_{yy}^r$ 考虑为中主应力,从而只考虑了残余应力场分量 σ_{xx}^r 对安定极限的影响,得到了与Shiau相似的结果.

因此,列车荷载作用下路基中总应力场由式(8)给出:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^r \\ \sigma_{zz} = \lambda \sigma_{zz}^e \\ \sigma_{xz} = \lambda \sigma_{xz}^e \end{cases} \quad (8)$$

2.4 弹塑性安定性分析方法

应用Mohr-Coulomb屈服准则,结构中各点的屈服方程为:

$$f = [(\lambda \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^r - \lambda \sigma_{zz}^e)^2 + 4(\lambda \sigma_{xz}^e)^2]^{1/2} + (\lambda \sigma_{xx}^e + \sigma_{xx}^r + \lambda \sigma_{zz}^e) \sin \varphi - 2c \cdot \cos \varphi \leq 0$$

整理得:

$$f = (\sigma_{xx}^r + M)^2 + N \leq 0 \quad (9)$$

式中,

$$M = \lambda \sigma_{xx}^e - \lambda \sigma_{zz}^e + 2 \tan \varphi (c - \lambda \sigma_{zz}^e \tan \varphi)$$

$$N = 4(1 + (\tan \varphi)^2)[(\lambda \sigma_{zz}^e)^2 - (c - \lambda \sigma_{zz}^e \tan \varphi)^2]$$

因此, λ_1 可以简化为:

$$\lambda_1 = \max \lambda \text{ s.t. } f(\sigma_{xx}^r + M)^2 + N \leq 0$$

只要 $N \leq 0$,则必然存在 λ_1 使得 $f \leq 0$.

$$N \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 \leq \frac{c}{|\sigma_{xx}^e| + \sigma_{zz}^e \tan \varphi} \quad (10)$$

搜索整个结构中 $|\sigma_{xx}^e| + \sigma_{zz}^e \tan \varphi$ 最大的点,从而可以得到使每一点都满足式(10)的 λ_1 .

根据式(9),当 $N \leq 0$ 时,可以解得:

$$(-M_i - \sqrt{-N_i}) \leq \sigma_{xx}^r \leq (-M_i + \sqrt{-N_i})$$

又因为残余应力分量只有 σ_{xx}^r 与 x 坐标位置无关,所以,对于某一深度($z = j$) σ_{xx}^r 保持不变.因此:

$$\max_{z=j} (-M_i - \sqrt{-N_i}) \leq \sigma_{xx}^r \leq \min_{z=j} (-M_i + \sqrt{-N_i}) \quad (11)$$

式(11)有可能出现 $\min_{z=j} (-M_i + \sqrt{-N_i}) \leq$

$\max_{z=j} (-M_i - \sqrt{-N_i})$ 的情况,表示代入计算的 λ 值过大,需减小重新计算.

从而可以将静力安定求解转化为如下的问题:

$$\lambda_{SD} = \max \lambda \text{ s.t. } \begin{cases} \sigma_{xx}^r = \max(-M_i - \sqrt{-N_i}) \\ \text{或 } \sigma_{xx}^r = \min(-M_i + \sqrt{-N_i}) \\ f(\sigma_{xx}^r, \lambda \sigma^e) \leq 0 \\ f(\sigma_{xx}^r, \lambda \sigma^e) \leq 0 \end{cases} \quad (12)$$

又因为 $0 \leq \lambda_{SD} \leq \lambda_1$,所以采用式(12)对 λ_{SD} 进行优化计算,直到找到满足条件的静力安定极限 λ_{SD} .

3 应用研究

选择不同 p_0 作为单位荷载可以得到不同形式的安定极限乘子 λ , 但对于同一结构, 不同安定极限乘子所指的是同一个安定极限荷载, 为了消除这一影响, 引入另一个量 k (静力安定极限的第一类上限 $k_1 = \lambda_1 p_0 / c$; 静力安定极限 $k_{SD} = \lambda_{SD} p_0 / c$.) 从而将安定极限乘子进行归一化.

3.1 单个赫兹荷载作用下半无限空间体安定性分析

Shiau^[14]利用数值模拟的有限元方法计算了单个赫兹荷载作用下路基结构的静力安定荷载 (见图 2), Ponter 等^[15]基于上限定理, 计算单个赫兹荷载作用下半无限体的安定极限. 利用本文提出的弹塑性分析方法, 同样将荷载简化为单个赫兹荷载, 将计算的到安定极限与前人的研究结果对比.

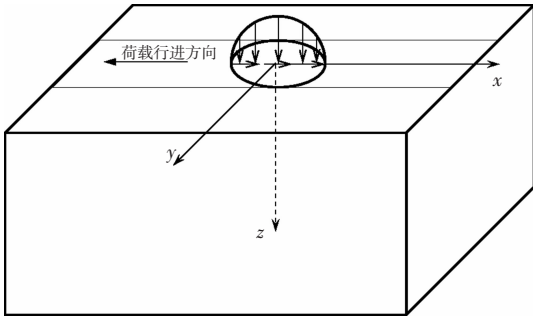


图 2 单个赫兹荷载作用示意图

Fig.2 Half-space under one Hertz load

图 3 显示本文方法计算的安定极限与 Shiau^[14]和 Ponter 等^[15]的结果 ($\mu = 0$) 均比较接近. 从图中可以看出, Ponter 等^[15]计算的安定极限最大, 是因为采用了动力安定定理(上限定理), 而本文和 Shiau^[14]均是基于静力安定定理(下限定理).

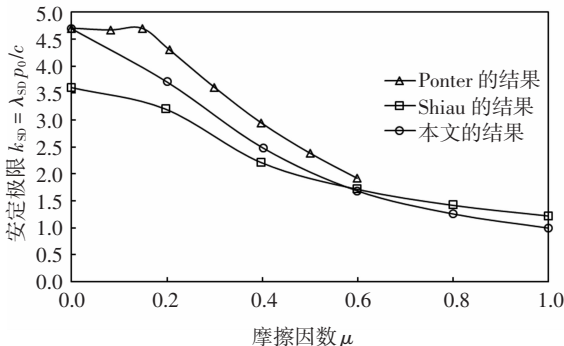
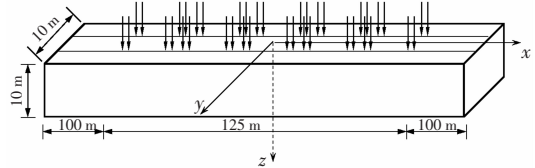


图 3 单个赫兹荷载作用下半无限空间体安定极限

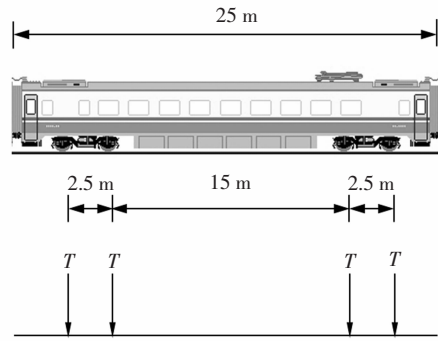
Fig.3 Shakedown limit of half-space under one Hertz load

3.2 列车荷载作用下铁路简化结构安定分析

在铁路结构中, 轮轨接触的模拟一般服从赫兹荷载分布^[28]. 而铁轨和轨枕的刚度比路基大很多, 因此, 钢轨和轨枕只是对列车荷载进行扩散重分布的作用. 为了简化计算, 考虑荷载通过轨道结构传递到路基上依然服从赫兹荷载分布规律 (见图 1). 路基结构简化图如图 4(a) 所示, 列车考虑 5 节车厢, 每节车厢 8 个轮载 (见图 4(b)).



(a) 五节车厢列车轴载作用下铁路路基结构示意图



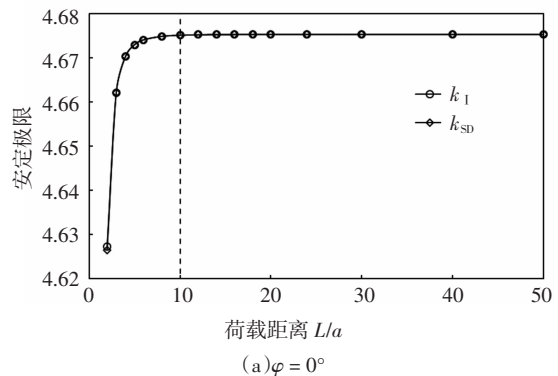
(b) 一节车厢结构及轴载示意图

图 4 铁路结构简化示意图

Fig.4 Simplified structure of railway

3.2.1 轮载间距 L 和轨距 B 对路基安定极限的敏感性分析

图 5 分别展示了当 $\mu = 0$ 时, 摩擦角 φ 为 0° 、 15° 、 30° 和 45° 时轮载间距 L 对静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 的影响. 从图中可以看出当荷载距离大于等于 $10a$ 的时候, 轮载距离 L 对安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 不再产生影响.



(a) $\varphi = 0^\circ$

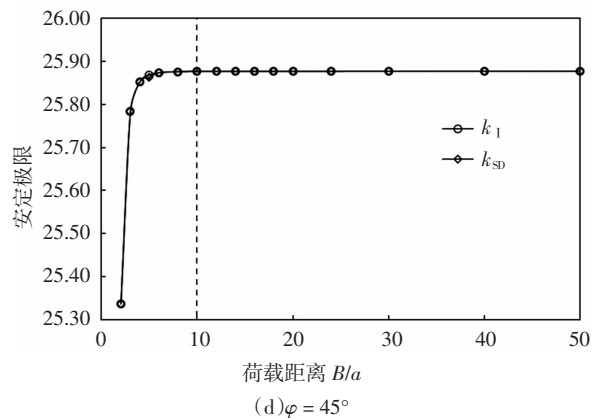
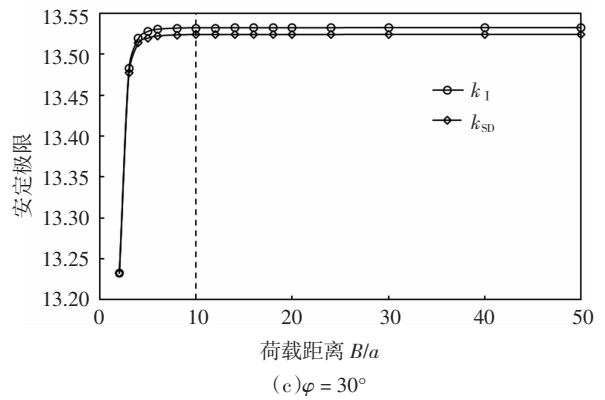
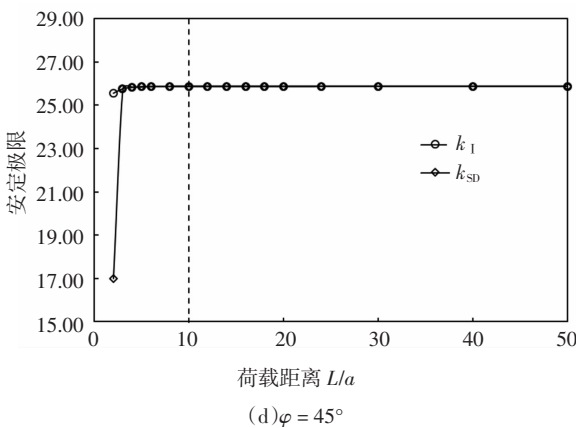
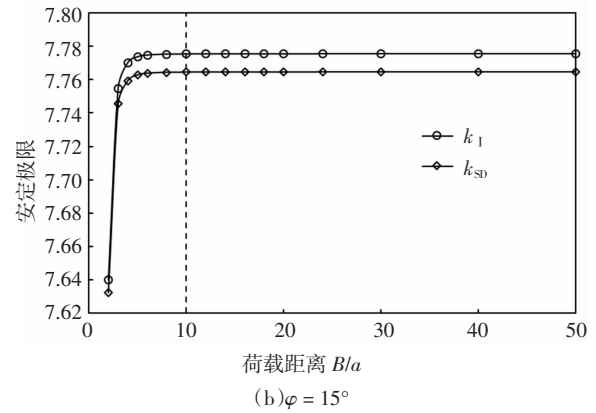
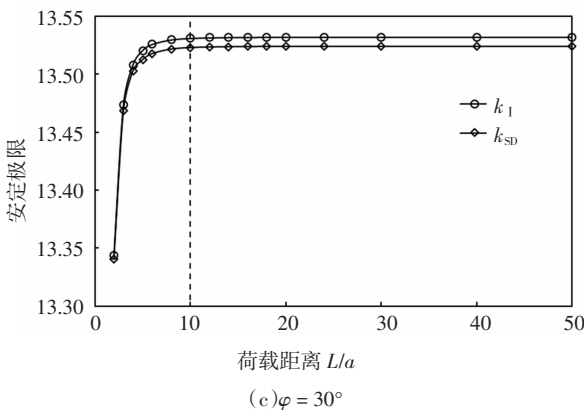
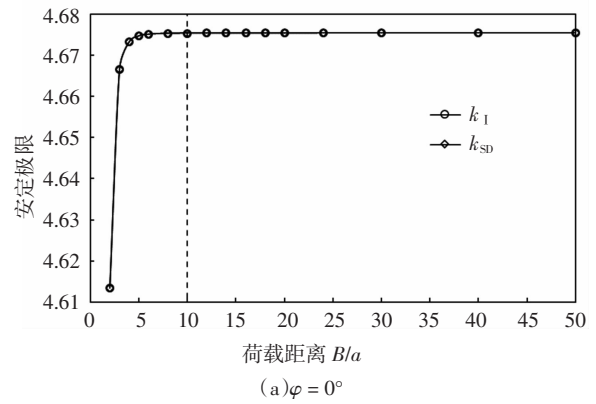
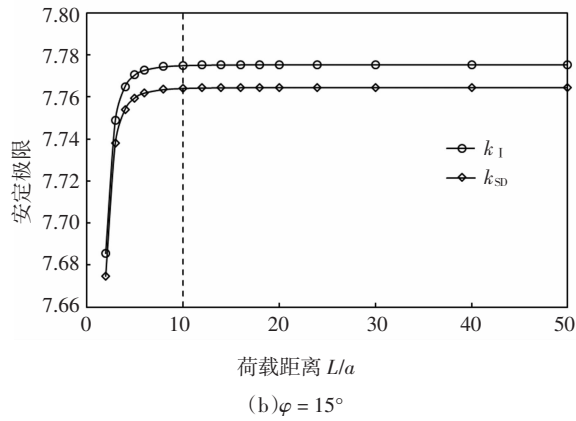


图5 轮载间距 L 对安定极限的影响

Fig.5 The influence of distance between two loads on static shakedown limit

如图6所示,当 $\mu = 0$ 时,对于摩擦角 φ 分别为 0° 、 15° 、 30° 和 45° 的情况,当钢轨距离大于等于 $10a$ 时,钢轨距离 B 对静力安定极限第一类上限 k_I 和静力安定极限 k_{SD} 几乎没有影响。

图6 轨道间距 B 对安定极限的影响

Fig.6 The influence of distance between two rails on static shakedown limit

实际上,列车轮载距离 $L = 2.5 \text{ m}$;钢轨距离 $B = 1.475 \text{ m}$;均远大于 $10a(0.1 \text{ m})$.因此实际应用的列车轮载距离和钢轨距离对路基静力安定极限的影响满足要求.

3.2.2 泊松比对路基静力安定极限的影响

图 7 和图 8 分别为静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 与路基材料泊松比和摩擦系数 μ 的关系.由图可知,静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 均随着摩擦系数的增大而减小;但随着泊松比的增大,静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 基本保持不变.

从图中可以看出,当摩擦系数从 0.0 增加到 1.0 时,静力安定极限第一类上限 k_1 减小了约 87.0%~88.5%,而静力安定极限 k_{SD} 减小了约 82.6%~84.0%.但是当泊松比从 0.15 增加到 0.45 时,静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 减小量均小于 1%,表明泊松比对铁路路基结构的安定极限几乎没有影响.

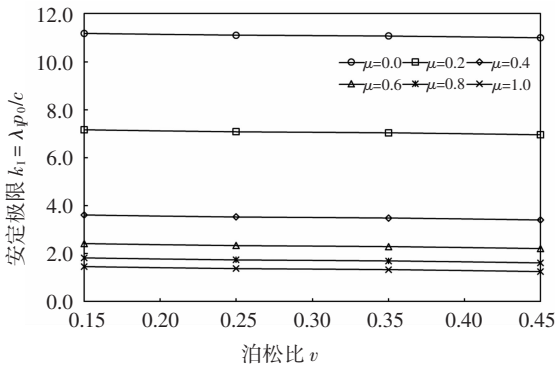


图 7 静力安定极限第一类上限 k_1 与泊松比和摩擦系数关系曲线

Fig.7 Upper bound type 1 of shakedown limit k_1 versus friction coefficient for various Poisson ratio

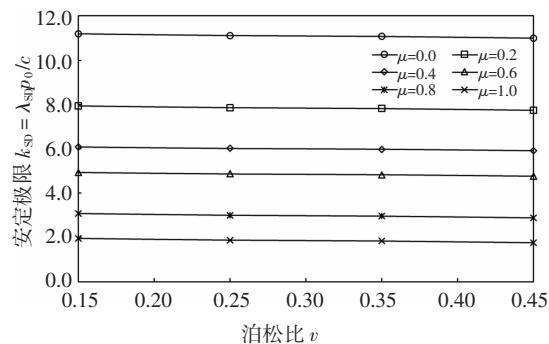


图 8 静力安定极限 k_{SD} 与泊松比和摩擦系数关系曲线
Fig.8 Static shakedown limit k_{SD} versus friction coefficient for various Poisson ratio

3.2.3 材料内摩擦角对路基静力安定极限的影响

静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 与路基材料内摩擦角 φ 和摩擦系数 μ 的关系分别如图 9 和图 10 所示.静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 均随着摩擦因数的增大而减小.摩擦系数从 0.0 增加到 1.0,静力安定极限第一类上限 k_1 减小了约 74.8%~83.1%;静力安定极限 k_{SD} 减小了约 78.6%~93.1%.

静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 均随着路基材料内摩擦角的增大而逐渐增大.由图 8 可知,在任意摩擦因数下,静力安定极限第一类上限 k_1 随着路基材料内摩擦角的增大而呈现明显的上升趋势,内摩擦角从 0° 增大到 45° ,静力安定极限第一类上限 k_1 增加了约 76.7%~83.2%;然而对静力安定极限 k_{SD} ,当摩擦系数较大时, k_{SD} 的增长则相对缓慢.图 9 显示,当摩擦因数为 0 时,内摩擦角从 0° 增大到 45° ,静力安定极限 k_{SD} 增加了约 81.9%,接近摩擦因数为 1.0 时的两倍.

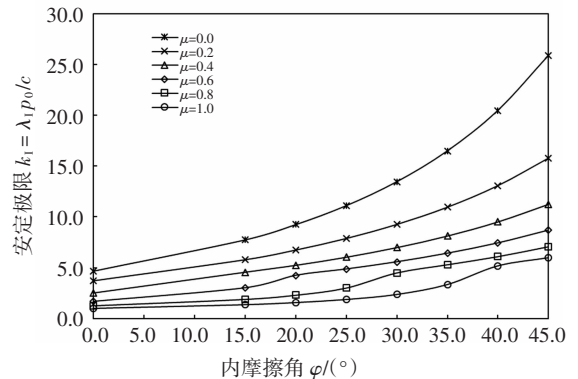


图 9 静力安定极限第一类上限 k_1 与内摩擦角和摩擦系数关系曲线

Fig.9 Upper bound type 1 of shakedown limit k_1 versus friction coefficient for various internal friction angle

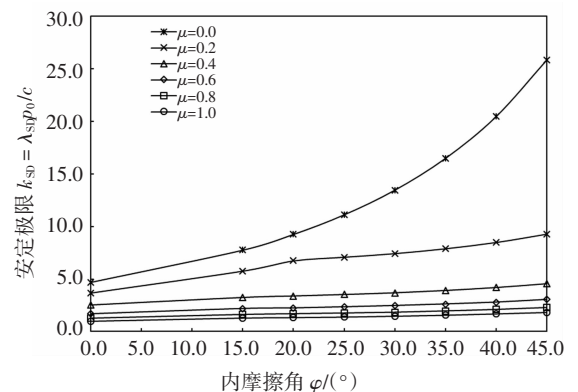


图 10 静力安定极限 k_{SD} 与内摩擦角和摩擦系数关系曲线

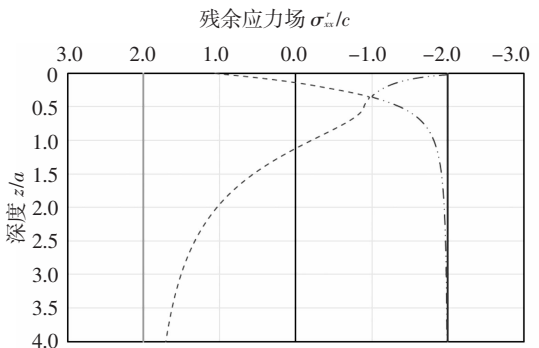
Fig.10 Static shakedown limit k_{SD} versus friction coefficient for various internal friction angle

3.3 结构安定状态时残余应力场分布情况

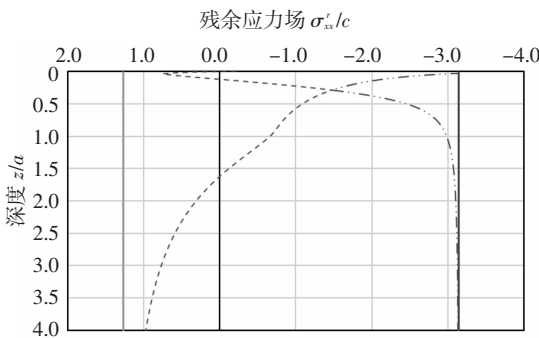
图 11 反映了 $\mu = 0$ 时路基中临界状态的残余应力的分布.图中两条曲线分别表示 $\sigma'_{xx} = \max_{z=j} (-M_i - \sqrt{-N_i})$ 和 $\sigma'_{xx} = \min_{z=j} (M_i + \sqrt{N_i})$, 真实的残余应力便分布在两条曲线之间.从图中可以看出,构造的残余应力场始终处于表示屈服应力的直线之间,即:

$$f(\sigma'_{xx}(\lambda\sigma^e)) \leq 0 \Rightarrow \frac{2c \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi - 1} \leq \sigma'_{xx} \leq \frac{2c \cdot \cos \varphi}{\sin \varphi + 1}$$

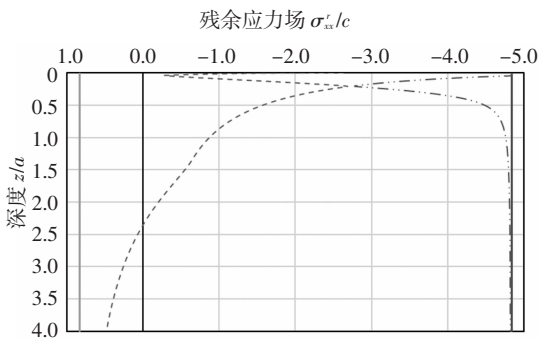
从图 11 中可以看出,临界点一般出现在面层以下 $0.5a$ 处,且随着路基材料内摩擦角的增大,临界点的位置逐渐上移.



(a) $\varphi = 0^\circ$



(b) $\varphi = 25^\circ$



(c) $\varphi = 45^\circ$

图 11 临界残余应力分布曲线

Fig.11 Critical residual stress fields at the shakedown state

3.4 基于安定理论的设计方法

本文提出了一种基于安定极限荷载包络图的路基安定性评价方法和设计方法,并给出了材料内摩擦角和安定极限的荷载包络图,如图 12 和图 13 所示.当给定设计荷载之后,通过在包络图上确定相对应的点,便可以确定设计所需最小的材料内摩擦角;同理,当路基设计完成后,根据已有的材料参数,便可通过安定极限荷载包络图确定结构的安全荷载.利用安定荷载包络图可以给承受列车荷载的铁路结构提供更加安全可靠的安全性评价.

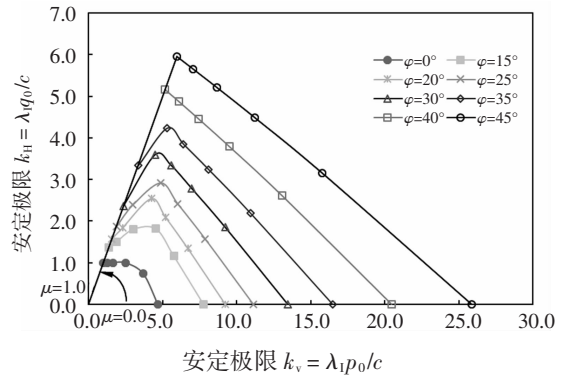


图 12 静力安定极限第一类上限荷载包络图

Fig.12 Results of shakedown limit loads for the upper bound type 1

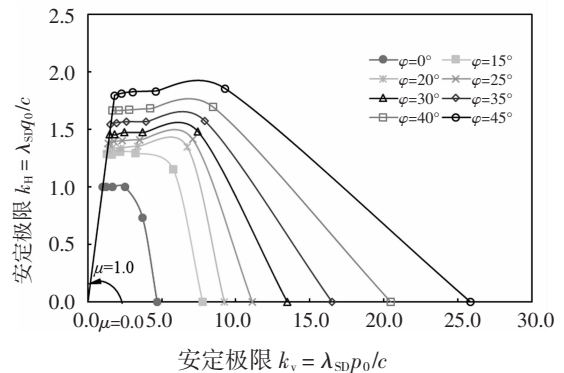


图 13 静力安定极限荷载包络图

Fig.13 Results of static shakedown limit load

4 结论

本文以 Melan 静力型安定定理为基础,通过构造可能的残余应力场,发展了一种弹塑性安定性计算方法,该方法摆脱了传统安定性分析方法中的数学规划运算,解决了计算中维数障碍的问题.将荷载简化为单个赫兹荷载时,本文的结果与 Shiau^[14]和

Ponter 等^[15]接近,说明本文的方法是正确的。

基于该方法,本文对铁路结构进行简化,研究了列车荷载直接作用下路基的静力安定极限的第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} , 进行轮载间距 L 和铁轨间距 B 对路基安定极限的敏感性分析;分析了材料泊松比 ν 和内摩擦角 φ 对安定极限的影响,并绘制了不同摩擦角材料的安定荷载包络线,得出以下主要结论:

1) 当轮载间距 L 和铁轨间距 B 大于等于 $10a$ 时,轮载间距 L 和铁轨间距 B 对路基安定极限不再产生影响.实际上,列车轮载距离 $L = 2.5$ m, 钢轨距离 $B = 1.475$ m, 均远大于 $10a(0.1$ m).因此实际应用的列车轮载距离和钢轨距离对路基静力安定极限的影响满足要求;

2) 路基泊松比对安定极限的影响较小.当泊松比从 0.15 增加到 0.45 时,静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 减小量均小于 1%;

3) 静力安定极限第一类上限 k_1 和静力安定极限 k_{SD} 均随着路基材料内摩擦角的增大而逐渐增大.当摩擦因数从 0 增大到 1 时,静力安定极限第一类上限 k_1 随着路基材料内摩擦角的增大而呈现明显的上升趋势,内摩擦角从 0° 增大到 45° ,静力安定极限第一类上限 k_1 增加了约 76.7%~83.2%. 然而对静力安定极限 k_{SD} ,当摩擦系数较大时, k_{SD} 的增长则相对缓慢. 当摩擦系数为 0 时,内摩擦角从 0° 增大到 45° ,静力安定极限 k_{SD} 增加了约 81.9%,接近摩擦因数为 1.0 时的两倍;

4) 真实残余应力场位于构造的临界残余应力场上下界之内.同时,临界点一般出现在面层以下 $0.5a$ 处,随着路基材料内摩擦角的增大,临界点的位置逐渐上移;

5) 利用安定荷载包络图可以给承受列车荷载的铁路结构提供更加安全可靠的安全性评价。

对于受到重复性移动荷载作用的铁路结构来说,安定理论与其设计有着很好的参考价值,因此后期的研究工作重点是将本文的方法应用到真实的铁路结构中,为铁路路基的设计提供更加安全可靠、经济的设计思路与方法。

参考文献

- [1] 赵磊,孙璐,孙伟,等. 无黏结支撑的轨道板板角离缝研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2016,43(7):75—81.
ZHAO L,SUN L,SUN W,*et al.* Research on the warp of CRTS II slab track on the support layer without bonding [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences),2016,43 (7):75—81. (In Chinese)
- [2] 梁波,蔡英. 不平顺条件下高速铁路路基的动力分析[J]. 铁道学报,1999,21(2):84—88.
LIANG B,CAI Y. Dynamic analysis on subgrade of high speed railways in geometric irregular condition[J]. Journal of the China Railway Society,1999,21(2):84—88. (In Chinese)
- [3] 王耀南,尹逊帅,贺振东,等. 钢轨表面图像冗余信息的模糊匹配算法[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2016,43(4):75—80.
WANG Y N,YIN X S,HE Z D,*et al.* Algorithm of fuzzy matching for redundancies of rail surface images [J]. Journal of Hunan University(Natural Sciences),2016,43(4):75—80. (In Chinese)
- [4] 董亮,赵成刚,蔡德钧,等. 高速铁路路基的动力响应分析方法[J]. 工程力学,2008,25(11):231—236.
DONG L,ZHAO C G,CAI D G,*et al.* Method for dynamic response of subgrade subjected to high-speed moving load[J]. Engineering Mechanics,2008,25(11):231—236. (In Chinese)
- [5] 陈钢,杨璞,刘应华. 弹塑性结构安定性上限分析的数值方法及应用[J]. 工程力学,2005,22(1):21—27.
CHEN G,YANG P,LIU Y H. A computational approach to kinematic shakedown analysis of elastic-plastic structures and its applications [J]. Engineering Mechanics,2005,22(1):21—27. (In Chinese)
- [6] LU M W,CHEN S Z. Stress function method in shakedown analysis of axisymmetric shell [J]. Acta Mechanica Solida Sinica,1992,5(1):99—110.
- [7] JOHNSON K L. A shakedown limit in rolling contact [C]// Proceedings of the Fourth US National Congress of Applied Mechanics. New York: American Society of Mechanical Engineers, 1962: 971—975.
- [8] SHARP R W,BOOKER J R. Shakedown of pavements under moving surface loads [J]. Journal of Transportation Engineering, ASCE, 1984,110(1): 1—14.
- [9] 刘启跃. 钢轨的安定状态研究[J]. 西南交通大学学报,1995,30(4):466—471.
LIU Q Y. The study of shakedown of rail [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 1995,30(4):466—471. (In Chinese)
- [10] FRANCOIS S,KARG C,HAEGEMAN W,*et al.* A numerical model for foundation settlements due to deformation accumulation in granular soils under repeated small amplitude dynamic loading[J].

- International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2010, 34(3):273—296.
- [11] FANG X Q, YANG S P, LIU J X, *et al.* Dynamic response of road pavement resting on a layered poroelastic half-space to a moving traffic load [J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2014, 38(2):189—201.
- [12] LI X, EKH M, NIELSEN J C O. Three dimensional modelling of differential railway track settlement using a cycle domain constitutive model [J]. International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 2016, 40(12):1758—1770.
- [13] 张明焕, 杨海元. 结构安定分析方法研究 [J]. 应用力学学报, 1994, 11(4): 83—90.
ZHANG M H, YANG H Y. The study of shakedown analysis of structure [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1994, 11(4): 83—90. (In Chinese)
- [14] SHIAU S H. Numerical methods for shakedown analysis of pavements under moving surface loads [D]. Australia: Faculty of Engineering and Built Environment, University of Newcastle, 2001: 112—134.
- [15] PONTER A R S, CHEN H F, CIAVARELLA M, *et al.* Shakedown analyses for rolling and sliding contact problems [J]. International Journal of Solids & Structures, 2006, 43(14):4201—4219.
- [16] MELAN E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums [J]. Ingenieur-Archiv, 1938, 9(2):116—126.
- [17] KOITER W T. General theorems for elastic-plastic solids [C]// Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960: 67—221.
- [18] KRABBENHOFT K, LYAMIN AV, SLOAN S W. Shakedown of a cohesive-frictional half-space subjected to rolling and sliding contact [J]. International Journal of Solids & Structures, 2007, 44(11):3998—4008.
- [19] ZHAO J, SLOAN S W, LYAMIN A V, *et al.* Bounds for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads [J]. International Journal of Solids & Structures, 2008, 45(11/12): 3290—3312.
- [20] HILLS D A, SACKFIELD A. Yield and shakedown states in the contact of generally curved bodies [J]. Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 1984, 19(1):9—14.
- [21] 王飞, 栾茂田, 朱菊芬, 等. 基于弹塑性有限元分析土工安定性计算方法及其应用 [J]. 大连理工大学学报, 2001, 41(3): 349—354.
WANG F, LUAN M T, ZHU J F, *et al.* Shakedown analysis of soil structures based on elasto-plastic FEM [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2001, 41(3): 349—354. (In Chinese)
- [22] HAMILTON G M. Explicit equations for the stresses beneath a sliding spherical contact [J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C Journal of Mechanical Engineering Science 1989—1996 (vols 203—210), 1983, 197(1): 53—59.
- [23] YU H S. Three-dimensional analytical solutions for shakedown of cohesive-frictional materials under moving surface loads [C]// Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 2005, 461(2059):1951—1964.
- [24] JOHNSON K L. Contact mechanics [J]. Journal of Tribology, 1985, 108(4):464.
- [25] KAPOOR A, JOHNSON K L. Effect of changes in contact geometry on shakedown of surfaces in rolling/sliding contact [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1992, 34(3):223—239.
- [26] COLLINS I F, BOULBIBANE M. Geomechanical analysis of unbound pavements based on shakedown theory [J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(1): 50—59.
- [27] WANG J, YU H S. Three-dimensional shakedown solutions for anisotropic cohesive-frictional materials under moving surface loads [J]. International Journal of Solids & Structures, 2015, 49(26):3797—3807.
- [28] RINGSBERG J W, LOO-MORREY M, JOSEFSON B L, *et al.* Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue [J]. International Journal of Fatigue, 2000, 22(3):205—215.