

# 岩土体结构失稳概率的二次二阶矩评估方法

苏永华<sup>1,2†</sup>, 李帅<sup>1</sup>, 苏雅<sup>1</sup>

(1.湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082; 2.湖南大学 建筑安全与节能教育部重点实验室, 湖南 长沙 410082)

**摘要:**常规二次二阶矩可靠性方法只适用于功能函数偏导数(一阶和二阶)能够简便地由解析法求解的工程, 使得其难以解决复杂岩土体结构的稳定可靠度问题。针对这一局限, 基于数值差分原理, 导出功能函数在验算点处各阶导数近似表达式, 结合随机变量在  $X$  空间和  $Y$  空间的变换, 构建了基于差分方法的梯度矢量数值求解工具; 以该工具置换 Breitung 二次二阶矩方法中的梯度计算准则, 形成一种适用于任意形式功能函数的二次二阶矩可靠度算法, 消除了经典方法的局限; 利用所提方法解决了功能函数为隐式和未知形式的边坡可靠度问题, 展示了该方法解决复杂岩土体结构概率稳定性问题的能力, 并同时在基准  $Y$  空间内建议了具有普遍意义的合适步长系数值 0.01。

**关键词:**可靠度; 二次二阶矩法; 梯度; 差分方法; 步长系数

**中图分类号:** TU443

**文献标志码:** A

## Second-order Second-moment Evaluation Method for Failure Probability of Rock-soil Structures

SU Yonghua<sup>1,2†</sup>, LI Shuai<sup>1</sup>, SU Ya<sup>1</sup>

(1.College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

2.Key Laboratory of Building Safety and Energy Efficiency of Ministry of Education, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** Conventional second-order second-moment reliability method (SORM) is only applicable to the engineering where the first and second order partial derivative of performance functions can be easily calculated by analytic method, which results in the difficulty in solving reliability problems of complex geotechnical engineering structures. Aiming at above limitation, firstly, approximate calculation expressions for partial derivatives on the checking point are deduced based on finite difference principle. Combine with conversion method of random variables between  $X$  space and  $Y$  space, solving method for gradient vectors is formed. Secondly, calculation criterion of gradient in Breitung's SORM is substituted by the above solving method, and then, an improved SORM which is suitable for arbitrary form of performance function is proposed. The limitation of the conventional SORM is eliminated. Finally, reliability problem of two slopes which performance functions are implicit and indefinable are solved by using the proposed method, and it shows the accuracy and availability of the proposed method to deal with complex structures reliability problem. Meanwhile, the value of step length coefficient  $c = 0.01$  in the benchmark space ( $Y$ -space) which possess the universal meaning is also achieved.

**Key words:** reliability; second-order second-moment method; gradient; difference theory; step length coefficient

\* 收稿日期: 2018-03-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51578232, 51378195), National Natural Science Foundation of China(51578232, 51378195)

作者简介: 苏永华(1966—), 男, 湖南涟源人, 湖南大学教授, 博士

† 通讯联系人, E-mail: yong\_su1965@126.com

岩土体结构形成过程及赋存环境复杂,影响其稳定的各种因素如材料性能、几何参数、场环境等存在天然不确定性,相关研究及规范逐渐将考虑上述不确定性的可靠性分析纳入其稳定分析当中。

目前,各类规范<sup>[1-3]</sup>中可靠度计算大都推荐采用一次二阶矩可靠性方法(FORM)<sup>[4]</sup>,而对于大型水坝、水电边坡、地下厂房及洞室等破坏后果严重的大型岩土体结构而言,其可靠度计算精度要求较高,FORM 精度难以满足工程要求。相关规范<sup>[4]</sup>也明确指出:对于一些特殊的情况,如计算精度要求较高时,应采用二次可靠度方法(SORM)。

目前发展较为成熟的是以 FORM 为基础,进一步考虑其二阶修正的 SORM<sup>[5]</sup>。FORM 和 SORM 均是建立在具有明确显式表达式功能函数的基础上<sup>[6-9]</sup>,但由于岩土体受力变形机制复杂,采用解析方法获得其作用效应的显式解析表达式较为困难,其功能函数常表现为高度非线性、隐式,有时甚至不存在明确解析表达式而只能用有限元的形式表示<sup>[10-12]</sup>,这就使得执行常规 SORM 程序时功能函数对随机变量的一阶、二阶梯度无法解析求解,极大地制约了 SORM 解决此类岩土体结构可靠度问题的能力<sup>[13-14]</sup>。

上述不足同时也给广大设计研究人员造成了 SORM 计算过于复杂与困难的假性认知,严重限制了过程清晰、精度较高的 SORM 设计分析理论在岩土工程领域的推广<sup>[15-16]</sup>。鉴于此,本文借助差分方法计算功能函数梯度近似值,结合 Breitung<sup>[5]</sup>理论构建了一套操作过程简洁、精度可靠的岩土体结构失稳概率二次二阶矩评估方法,将其作为对常规 SORM 的一个补充纳入到复杂岩土体结构可靠度分析当中。

## 1 随机变量的 Rosenblatt 变换

对于任意分布的相关非正态随机向量  $\mathbf{X}$ ,都可以通过 Rosenblatt 变换<sup>[6]</sup>将其转化为独立标准正态随机向量  $\mathbf{Y}$ 。随机变量  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和独立标准正态随机变量  $Y_i$  间关系可表示为:

$$\begin{cases} \Phi(Y_1) = F_{X_1}(X_1) \\ \Phi(Y_2) = F_{X_2|X_1}(X_2 | X_1) \\ \vdots \\ \Phi(Y_n) = F_{X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $F_{X_i|X_1, X_2, \dots, X_{i-1}}(X_i | X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$  为  $X_i$  的条件累积分布函数,对式(1)进行变换,可得到  $Y_i$  以及  $X_i$

的表达式( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{cases} Y_1 = \Phi^{-1}[F_{X_1}(X_1)] \\ Y_2 = \Phi^{-1}[F_{X_2|X_1}(X_2 | X_1)] \\ \vdots \\ Y_n = \Phi^{-1}[F_{X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1})] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} X_1 = F_{X_1}^{-1}[\Phi(Y_1)] \\ X_2 = F_{X_2|X_1}^{-1}[\Phi(Y_2 | X_1)] \\ \vdots \\ X_n = F_{X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}^{-1}[\Phi(Y_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1})] \end{cases} \quad (3)$$

上述 3 式中  $X_i$  的条件累积分布函数可以利用  $X$  的联合概率密度函数  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  求得:

$$f_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}}(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}) = \frac{f_{X_1, \dots, X_i}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i)}{f_{X_1, \dots, X_{i-1}}(X_1, \dots, X_{i-1})} \quad (4)$$

$$F_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}}(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{X_i} f_{X_1, \dots, X_i}(X_1, \dots, X_i) dX_i}{f_{X_1, \dots, X_{i-1}}(X_1, \dots, X_{i-1})} \quad (5)$$

式中  $f_{X_i|X_1, \dots, X_{i-1}}(X_i | X_1, \dots, X_{i-1})$  为  $X_i$  的条件概率密度函数。式(1)~式(5)即可实现随机变量在原始随机空间( $X$  空间)与独立标准正态空间( $Y$  空间)的互相变换, Rosenblatt 变换理论上是精确严格的。

## 2 二次二阶矩算法

按照 Breitung<sup>[5]</sup>, SORM 可分为两步,首先按照 FORM<sup>[4]</sup>计算可靠指标  $\beta$  及验算点  $\mathbf{y}^*$ ,然后利用二阶导数项对失效概率  $P_f$  进行修正计算。

设岩土体结构功能函数  $Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,其中  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为结构各物理、力学性质指标及场环境等  $n$  个基本随机变量,变换至  $Y$  空间后可表示为:  $Z = G(\mathbf{Y}) = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 。

FORM 是在极限状态曲面验算点  $\mathbf{y}^*$  处将原功能函数利用 Taylor 级数展开,截取常数项和一次项近似原功能函数,可靠指标  $\beta$  即为标准独立正态空间内  $\mathbf{y}^*$  点到坐标原点的距离,其基本迭代公式如下<sup>[4,7]</sup>:

$$\boldsymbol{\alpha}_Y = -\nabla G(\mathbf{y}^*) / \|\nabla G(\mathbf{y}^*)\| \quad (6)$$

$$\beta = \frac{G(\mathbf{y}^*) - \nabla G(\mathbf{y}^*)^T \mathbf{y}^*}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \quad (7)$$

$$\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\alpha}_Y \beta \quad (8)$$

式中:  $\boldsymbol{\alpha}_Y$  为灵敏度向量;  $\nabla G(\mathbf{y}^*)$  为功能函数  $Z = G(\mathbf{Y})$  在验算点  $\mathbf{y}^*$  处的梯度向量,且有:

$$\begin{cases} \nabla G(\mathbf{y}^*) = \left[ \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1}, \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_n} \right]^T \\ \|\nabla G(\mathbf{y}^*)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\partial G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i]^2} \end{cases} \quad (9)$$

利用 FORM 求解到的  $\beta$  对应的是验算点处线性化极限状态方程(或超切平面)的失效概率,没有考虑极限状态曲面的凹凸性.当极限状态方程非线性程度较高时,误差较大.根据 Breitung<sup>[5]</sup>,将极限状态方程的 Taylor 展开式保留至二次项,以二次曲面代替原极限状态曲面,则功能函数在验算点  $\mathbf{y}^*$  处的二阶偏导数值矩阵即 Hessian 矩阵为:

$$\nabla^2 G(\mathbf{y}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1^2} & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1 \partial Y_2} & \dots & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1 \partial Y_n} \\ \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2 \partial Y_1} & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2 \partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_n \partial Y_1} & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_n \partial Y_2} & \dots & \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_n^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

利用 Gram-Schmidt 正交化,构造一个第  $n$  列为单位向量  $\alpha_Y$  的正交矩阵  $H$ ,即  $H=[H_1, \dots, H_{n-1}, \alpha_Y]^T$ ,令:

$$Q = -\nabla^2 G(\mathbf{y}^*) / \sqrt{\sum_{i=1}^n [\partial G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i]^2} \quad (11)$$

则结构的失效概率  $P_f$  可采用下式计算:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) / \sqrt{|I - \beta(H^T Q H)_{n-1}|} \quad (12)$$

式中:  $I$  为单位矩阵.

### 3 基于差分方法的梯度求解

利用常规 SORM 操作程序进行可靠度计算时,可靠指标  $\beta$  与失效概率  $P_f$  的计算只与功能函数值和验算点处梯度有关,并不过分依赖功能函数的具体表达式形式,这也是差分方法能够引入的前提.

基于差分方法求解梯度是直接利用验算点与各扰动点间功能函数值的差值.设在随机变量  $Y$  空间内确定近似验算点  $\mathbf{y}^*=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,扰动步长系数常量为  $c$ ,则  $Y_i$  的扰动步长  $h_i = cy_i$ .根据差分原理,可以导出功能函数  $Z = G(Y)$  在验算点  $\mathbf{y}^*$  处的一阶梯度近似值  $\partial G(\mathbf{y}^*)/\partial y_i$  及二阶梯度近似值  $\partial^2 G(\mathbf{y}^*)/\partial y_i^2, \partial^2 G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i \partial Y_j (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$  分别为:

$$\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \approx \frac{G(\mathbf{y}_i) - G(\mathbf{y}^*)}{cy_i} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i^2} \approx \frac{G(\mathbf{y}_{ii}) - 2G(\mathbf{y}_i) + G(\mathbf{y}^*)}{(cy_i)^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i \partial Y_j} \approx \frac{G(\mathbf{y}_{ij}) - G(\mathbf{y}_i) - G(\mathbf{y}_j) + G(\mathbf{y}^*)}{c^2 y_i y_j} \quad (15)$$

式中:  $Y_i, Y_j$  分别为  $Y$  空间内随机变量,  $\mathbf{y}_i = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + cy_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的一阶扰动点;  $\mathbf{y}_{ii} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + 2cy_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的二阶扰动点;  $\mathbf{y}_{ij} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_i + cy_i, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_j + cy_j, y_{j+1}, \dots, y_n)$  为  $Y_i$  的混合二阶扰动点.

对于具有复杂特性的岩土体结构来说,功能函数  $g(\mathbf{X})$  为随机变量在  $X$  空间内的表现形式,且其表达式通常为高度非线性、隐式或不可知.虽然能够利用隐式函数迭代法、有限元模拟或具体试验得到岩土体参数与稳定性判定指标间的一一对应关系,但其具体关系却难以准确显式表达.因此,功能函数在  $Y$  空间内  $G(Y)$  的解析形式通常也是难以确定的,也即是  $G(\mathbf{y}^*), G(\mathbf{y}_i), G(\mathbf{y}_{ii}), G(\mathbf{y}_{ij})$  的值无法直接求解.所以即使确定了  $Y$  空间内的近似验算点  $\mathbf{y}^*$  及各阶扰动点  $\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{ii}, \mathbf{y}_{ij}$ ,但随机变量在验算点处梯度值还是无法求解.

根据随机变量在  $Y$  空间与  $X$  空间的变换关系<sup>[6]</sup>,可以获得  $Y$  空间内验算点  $\mathbf{y}^*$  及其各阶扰动点  $\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{ii}, \mathbf{y}_{ij}$  在  $X$  空间对应的验算点  $\mathbf{x}^*$  及扰动点  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{ii}, \mathbf{x}_{ij}$ .而随机变量在  $X$  空间内各参数与判定指标间的关系易获得,即  $g(\mathbf{x}^*), g(\mathbf{x}_i), g(\mathbf{x}_{ii}), g(\mathbf{x}_{ij})$  值易获得,即可根据  $g(\mathbf{X}) = G(\mathbf{Y})$  关系确定  $G(\mathbf{y}^*), G(\mathbf{y}_i), G(\mathbf{y}_{ii}), G(\mathbf{y}_{ij})$  的值.为表达方便,将随机变量由  $X$  空间到  $Y$  空间的变换称为正变换,  $Y$  空间到  $X$  空间的变换称为逆变换.因此,  $Y$  空间中功能函数在验算点  $\mathbf{y}^*$  处(对应于  $X$  空间中验算点  $\mathbf{x}^*$ )随机变量的一阶梯度、二阶梯度计算公式可表示为( $i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j$ ):

$$\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \approx \frac{G(\mathbf{y}_i) - G(\mathbf{y}^*)}{cy_i} = \frac{g(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}^*)}{cy_i} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i^2} &\approx \frac{G(\mathbf{y}_{ii}) - 2G(\mathbf{y}_i) + G(\mathbf{y}^*)}{(cy_i)^2} = \\ &\frac{g(\mathbf{x}_{ii}) - 2g(\mathbf{x}_i) + g(\mathbf{x}^*)}{(cy_i)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i \partial Y_j} &\approx \frac{G(\mathbf{y}_{ij}) - G(\mathbf{y}_i) - G(\mathbf{y}_j) + G(\mathbf{y}^*)}{c^2 y_i y_j} = \\ &\frac{g(\mathbf{x}_{ij}) - g(\mathbf{x}_i) - g(\mathbf{x}_j) + g(\mathbf{x}^*)}{c^2 y_i y_j} \end{aligned} \quad (18)$$

### 4 基于差分方法的 SORM 求解步骤

将上述  $Y$  空间内的梯度求解方法嵌入到常规 SORM 程序中,结合 Breitung 理论,就形成了一种简单实用的岩土体失稳概率二次二阶矩评估方法,其基本操作步骤归纳如下( $i, j=1, 2, \dots, n; i \neq j$ ).

**Step1** 假定  $Y$  空间内的初始验算点  $\mathbf{y}^{*(0)} = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)$ , 假设经过  $k$  次迭代循环后获得  $Y$  空间内近似验算点为  $\mathbf{y}^{*(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$ , 步长系数常量为  $c$ , 则下一次迭代验算点为  $\mathbf{y}_i^{*(k+1)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_i^{(k)} + cy_i^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$ . 大量计算表明验算点初值的选择对计算影响不大, 但步长系数常数  $c$  对计算效率和结果具有一定影响.

**Step2** 通过逆变换求出  $Y$  空间内  $\mathbf{y}^{*(k)}$ 、 $\mathbf{y}_i^{*(k+1)}$  在  $X$  空间对应的  $\mathbf{x}^{*(k)}$ 、 $\mathbf{x}_i^{*(k+1)}$ , 以此作为  $X$  空间样本参数值, 由功能函数表达式、有限元模拟或具体试验获得相应的功能函数值  $g(\mathbf{x}^{*(k)})$ 、 $g(\mathbf{x}_i^{*(k+1)})$ .

**Step3** 利用式(16)计算  $\mathbf{y}_i^{*(k)}$  处的一阶梯度; 利用式(6)~式(9)迭代计算  $\beta^{(k)}$  及下一迭代验算点  $\mathbf{y}^{*(k+1)}$ .

**Step4** 若  $|\beta^{(k)} - \beta^{(k+1)}| > \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为允许误差, 本文取 0.05), 置  $k \leftarrow k+1$ , 转 Step1; 否则, 置  $\beta \leftarrow \beta^{(k)}$ , 取近似验算点  $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{*(k+1)} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , 转 Step5.

**Step5** 确定各随机变量  $Y_i$  在近似验算点  $\mathbf{y}^*$  处的一阶扰动点  $\mathbf{y}_i$ 、二阶扰动点  $\mathbf{y}_{ii}$  及混合二阶扰动点  $\mathbf{y}_{ij}$ , 由逆变换确定  $\mathbf{x}^*$ 、 $\mathbf{x}_i$ 、 $\mathbf{x}_{ii}$ 、 $\mathbf{x}_{ij}$ .

**Step6** 利用  $X$  空间内各参数组合与判定指标间对应关系计算每组参数下功能函数值  $g(\mathbf{x}^*)$ 、 $g(\mathbf{x}_i)$ 、 $g(\mathbf{x}_{ii})$ 、 $g(\mathbf{x}_{ij})$ , 由式(16)、式(17)及式(18)分别计算  $\partial G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i$ 、 $\partial^2 G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i^2$ 、 $\partial^2 G(\mathbf{y}^*)/\partial Y_i \partial Y_j$ .

**Step7** 由 Gram-Schmidt 正交化方法确定矩阵  $H$ , 由式(11)确定  $Q$ , 由式(12)计算失效概率  $P_f$ .

## 5 实例分析

### 5.1 实例 1

#### 1) 边坡概况及功能函数

某均质边坡断面尺寸及几何形状如图 1 所示. 将黏聚力  $c$ 、内摩擦角  $\varphi$  及重度  $\gamma$  作为基本随机变量, 相关统计特征如表 1 所示.

则在  $X$  空间内随机变量可表示为  $\mathbf{X} = (c, \tan\varphi, \gamma) = (X_1, X_2, X_3)$ , 相应地变换到  $Y$  空间内对应的随机变量  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ . 利用 Bishop 法求解边坡稳定系数, 则基于稳定系数的边坡功能函数可表

示为:

$$Z = F_s(\mathbf{X}) - 1 = \frac{\sum (c_i b_i + W_i \tan\varphi_i) / m_{\alpha_i}}{\sum W_i \sin\alpha_i} - 1 \tag{19}$$

$$m_{\alpha_i} = \cos\alpha_i (1 + \tan\varphi_i \tan\alpha_i / F_s) \tag{20}$$

式中:  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  为总条分块数;  $F_s$  为边坡稳定系数;  $W_i$  为条块自重;  $b_i$  为条块的宽度;  $c_i$ 、 $\varphi_i$  为有效抗剪强度指标;  $\alpha_i$  为条块底面中点处法线与竖直线夹角.

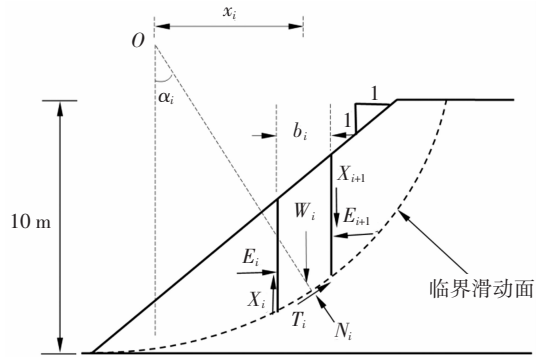


图 1 边坡稳定系数计算简图

Fig.1 Calculation of stability coefficient of slope by bishop method

表 1 边坡基本参数统计特征

Tab.1 Statistic characteristics for basic parameters of slope

基本参数	均值	标准差	分布型
$c/\text{kPa}$	18	3.6	正态
$\tan\varphi$	$\tan 30^\circ$	0.057 7	正态
$\gamma/(\text{kN}\cdot\text{m}^{-3})$	18	0.9	正态

#### 2) 扰动步长问题

根据差分方法, 步长的选取对计算结果是具有重要影响的. 理论上, 步长越小, 计算精确度越高. 但受限于计算工作量、计算机存储及累积误差等因素, 步长不可能无限小, 对于工程可靠度而言, 只能从解决实际问题的需要出发, 将目标确定为寻找基于差分计算结果与精确值的误差在允许范围内的步长值. 目前针对该问题, 相关研究取得了很多成果, 如 TAN 等<sup>[17]</sup>取随机变量的均方差作为步长; JI 等<sup>[18]</sup>得出步长可取随机变量均值的 1%、5%、10% 和 20% 等不同值; SU 等<sup>[19]</sup>得出步长为求导点值的 8% 为合适. 可以看出, 不同研究者基于其具体研究对象

确定的适用步长具有明显差异、无法统一。经过分析,出现这种差异的原因在于:上述对步长的研究均是基于随机变量的  $X$  空间,而  $X$  空间内各随机变量  $X_i$  的分布型态、均值、方差、随机变量间相关性等的特征值差异太大,导致各自确定的步长只能适用于其特定研究对象,而不能同样适用于其它对象,从而造成这种基于的研究对象不同,所得到的合适步长具有明显差异的情况。

因此,若要获得具有普遍意义的步长,需首先消除上述不同研究对象间随机变量的差异,在此基础上再寻找合适步长。有鉴于此,本文基于基准空间  $Y$  空间展开对步长取值的讨论,在各随机变量同一水平下,寻找可满足精度要求的步长值,该值即可作为普遍适用步长。

### 3) 计算结果分析

利用 SORM 操作程序,计算不同步长系数下边坡失稳概率  $P_f$ ,步长系数  $c$  分别取 0.1、0.08、0.05、0.03、0.01、0.005 和 0.001。同时,利用蒙特卡洛法(MC法)计算失稳概率,样本模拟  $5 \times 10^7$  次后得到边坡失稳概率。计算结果对比如表 2。

表 2 不同  $c$  值下本文方法计算结果及与 MC 法结果对比

步长系数 $c$	不同 $c$ 值下计算结果		与 MC 法结果对比	
	$\beta$	$P_f/\%$	绝对误差/ $\%$	相对误差/ $\%$
0.1	2.239	1.238	0.140	12.75
0.08	2.239	1.227	0.129	11.74
0.05	2.232	1.221	0.123	11.20
0.03	2.232	1.215	0.117	10.65
0.01	2.232	1.206	0.108	9.83
0.005	2.232	1.206	0.108	9.83
0.001	2.232	1.206	0.108	9.83

从表 2 中可以看出,步长系数在  $Y$  空间内从 0.1 到 0.01 逐渐减小时,本文方法与 MC 法计算结果间绝对误差与相对误差均逐渐减小,说明与理论预测一样,随步长系数的逐渐减小,本文方法计算精度逐渐增加。

步长系数  $c = 0.01$  时,失稳概率收敛至  $P_f = 1.206\%$ ,此时与 MC 法间绝对误差为 0.108%,相对误差为 9.83%,精度已足够满足工程要求。步长系数继续减小时,对实际精度的提高已不明显,相反会

使迭代收敛速度大大减小,相应的计算量也会成倍增加,并可能带来更多的累积误差。因此,综合精确性与计算效率的考虑,步长系数在  $Y$  空间内取值  $c = 0.01$  为合适。

由于在  $Y$  空间内,不同研究对象所涉及的随机变量均已通过一定变换,成为其独立标准正态分布形式,该条件消除了由于研究对象的随机变量在  $X$  空间内的差异性而带来的步长系数取值没有从同一基准出发,进而难以统一的问题,因此这样寻找到的步长系数对其余研究对象在  $Y$  空间内也同样适用,即该步长系数是具有普遍适用意义的。

## 5.2 实例 2

### 1) 边坡概况及有限元模型

拟评估边坡位于承德市平泉县姚营子村南侧,场地属低中山侵蚀沟谷斜坡地貌,总体地势平缓,由东向西缓倾,坡角约  $28^\circ$ 。坡顶第 1 层为粉土,含少量崩落的岩石堆积物;第 2 层为粉质黏土;第 3 层主要成分为花岗片麻岩。边坡岩土体参数统计特征如表 3 所示,假设所有参数均服从正态分布。

表 3 边坡基本参数统计特征

材料	参数	均值 $\mu$	变异系数 $C_v$
含碎石粉土	$\gamma_1$	19.5 kN/m <sup>3</sup>	0.12
	$c_1$	6 kPa	0.07
	$\varphi_1$	22°	0.02
粉质黏土	$\gamma_2$	19.1 kN/m <sup>3</sup>	0.01
	$c_2$	10.3 kPa	0.06
	$\varphi_2$	18.7°	0.09
花岗片麻岩	$\gamma_3$	28 kN/m <sup>3</sup>	0.055
	$c_3$	2 kPa	0.008
	$\varphi_3$	42°	0.010

根据勘察现场提供的地质剖面图及地形数据,利用工程上边坡稳定性分析中常用的 GTS-NX 有限元软件建立模型如图 2 所示。模型  $X$  方向取 200 m、 $Y$  方向取 35 m、 $Z$  方向取 80 m,假定坡体材料均各向同性。模型采用六面体实体单元进行网格划分,共有 38 337 个单元,19 404 个节点,底部全约束,四周边界法向支座约束,上部为自由边界。假定材料均服从 Mohr-Coulomb 破坏准则,利用强度折减法计算边坡稳定系数。

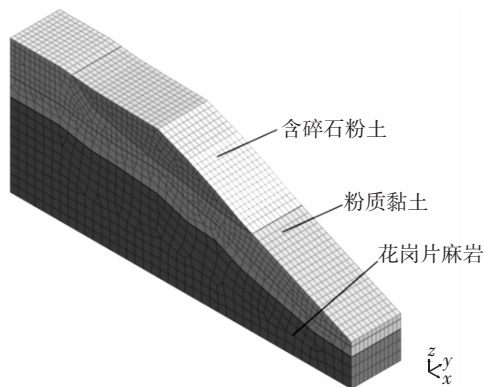


图 2 边坡有限元计算模型

Fig.2 Finite element computing model of slope

2)边坡失稳概率计算分析

为简便起见,仅选取变异系数大于 0.05 的参数作为基本随机变量,即  $\gamma_1, c_1, c_2, \varphi_2, \gamma_3$ ,其余参数作为确定性参数考虑,计算中取均值.基本随机变量在  $X$  空间可表示为  $X=(\gamma_1, c_1, c_2, \varphi_2, \gamma_3)=(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ ,变换至  $Y$  空间后随机变量为  $Y=(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$ ,则基于稳定系数的边坡功能函数可表示为:

$$Z = g(\gamma_1, c_1, c_2, \varphi_2, \gamma_3) - 1 = F_s - 1 \quad (21)$$

在  $Y$  空间内假定初始验算  $y^{*(0)}=(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ ,利用本文提出的基于差分方法的 SORM 计算程序计算边坡失稳概率  $P_f$ ,每一组参数水平下边坡稳定系数可利用上述有限元模拟获得,不同步长系数下计算结果如表 4 所示.

表 4 不同步长系数下的计算结果

Tab.4 Results calculated by the proposed method with different step length coefficients

步长系数 $c$	$g(y_c)$	$\beta$	$P_f/\%$
0.10	$-1.254 \times 10^{-4}$	1.258 2	9.616
0.08	$-1.057 \times 10^{-4}$	1.258 2	9.824
0.05	$-0.885 \times 10^{-4}$	1.258 0	9.857
0.03	$-0.638 \times 10^{-4}$	1.258 0	9.867
0.01	$0.227 \times 10^{-4}$	1.258 0	10.254
0.005	$0.227 \times 10^{-4}$	1.258 0	10.254
0.003	$0.227 \times 10^{-4}$	1.258 0	10.254
0.001	$0.227 \times 10^{-4}$	1.258 0	10.254

从表 4 可以看出,步长系数的取值对  $P_f$  是具有较大影响的,最大差异比可达 6.63%.步长系数  $c = 0.01$  时,计算结果收敛至  $\beta = 1.258 0, P_f = 10.254\%$ ,相应地最可能失效点  $x^*=(20.12 \text{ kN/m}^3, 5.8 \text{ kPa}, 10.2 \text{ kPa}, 16.8^\circ, 27.6 \text{ kN/m}^3)$ ,此时功能函数值  $Z = 0.227 \times$

$10^{-4}$ ,即  $x^*$  已可被视为搜索到的最可能失效点.该过程共经过了 5 次迭代,利用有限元模拟计算了 50 次边坡稳定系数,与常规利用蒙特卡洛法求解边坡失稳概率相比工作量大大减少.

为验证所提方法的精确性,利用文献[20]所述响应面法求解该边坡失稳概率,响应面模型选用不含交叉项的二次多项式模型.获得响应面函数后,利用蒙特卡洛法经过  $1 \times 10^8$  次的随机抽样模拟,边坡失稳概率  $\hat{P}_f = 11.323$ .可以看出,本文方法与文献[20]方法间绝对误差为 1.069%,相对误差为 9.44%,两者间的误差在合理范围内,说明文中所提方法在精度上是可以接受的.

本文方法对常规 SORM 操作步骤进行有效改进,将差分方法引入功能函数偏导数的计算中,并在基准空间内获得了具有一般意义的合适步长系数值  $c = 0.01$ ,使 SORM 不再受结构功能函数表达式形式的制约,能够直接用于求解任意形式功能函数的岩土体结构失稳概率,计算效率及精度均有保证,并实现了方法的程序化,是一种较为实用的二次二阶矩方法.

6 结 论

本文研究较为成功地克服了常规 SORM 对功能函数表达式形式要求严格的局限性,将其拓展成为适用于复杂岩土体结构失稳概率评估的普遍性方法,主要在以下方面获得进展:

1)基于差分方法,在随机变量的  $Y$  空间内构建了一种梯度矢量求解新途径,结合 Breitung 理论,形成一种拓展的二次二阶矩可靠性方法.方法可针对功能函数为高度非线性、隐式或未知形式的结构失效概率进行直接求解,且不涉及过多复杂数学理论,就像传统的 SORM 求解具有显式解析功能函数表达式的结构一样简洁方便.

2)基于精确性与计算效率的考虑,在消除不同研究对象的随机变量在原始随机空间内差异的前提下,在同一基准空间( $Y$  空间)内搜索得到基于差分方法的 SORM 所涉及的步长系数具有普遍意义的合适取值  $c = 0.01$ ,解决了步长系数的取值问题,进一步完善了求解步骤.

当然,上述研究成果在总体上还是初步的,在推广应用上仍存在部分问题,如差分迭代过程中可能出现的不收敛问题、对具有一定相关性且分布型

较为复杂的随机变量该方法难以实现编程将其程序化的问题等,后续研究会针对上述问题进行重点探讨。

## 参考文献

- [1] GB 50153-2008 工程结构可靠性设计统一标准[S].北京:中国建筑工业出版社,2008:57-59.  
GB 50153-2008 Unified standard for reliability design of engineering structures [S]. Beijing:China Architecture & Building Press, 2008:57-59.(In Chinese)
- [2] GB 50199-2013 水利水电工程结构可靠性设计统一标准[S].北京:中国计划出版社,2013:41-43.  
GB 50199-2013 Unified standard for reliability design of hydraulic engineering structures [S]. Beijing:China Planning Press,2013: 41-43.(In Chinese)
- [3] ISO 2394 General principles on reliability for structures[S].Geneva:International Standards Organization,2015:40.
- [4] HASOFER A M, LIND N C.Exact and invariant second moment code format[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1):111-121.
- [5] BREITUNG K.Asymptotic approximation for multinormal integrals [J].Journal of Engineering Mechanics, 1984, 110(3):357-366.
- [6] ROSENBLATT M.Remarks on a multivariate transformation [J]. Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(3):470-472.
- [7] 贡金鑫.工程结构可靠度计算方法[M].大连:大连理工大学出版社,2003:82-86.  
GONG J X.Computational methods for reliability of engineering structures[M].Dalian:Dalian University of Technology Press,2003: 82-86.(In Chinese)
- [8] 赵洪波,冯夏庭.支持向量机函数拟合的边坡稳定性估计[J].岩石力学与工程学报,2003,22(2):241-245.  
ZHAO H B, FENG X T.Application of support vector machines function regression in the evaluation stability of slope[J].Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003, 22(2):241-245.(In Chinese)
- [9] 黄靓,易伟健,汪优.岩土工程可靠度分析的改进响应面法研究[J].岩土力学,2008,29(2):370-374.  
HUANG L, YI W J, WANG Y.Improvement study on response surface method for reliability analysis in geotechnical engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(2):370-374.(In Chinese)
- [10] 祁小辉,李典庆,曹子君,等.考虑地层变异的边坡稳定不确定性分析[J].岩土力学,2017,38(5):1-12.  
QI X H, LI D Q, CAO Z J, *et al.*Uncertainty analysis of slope stability considering geologic uncertainty[J]. Rock and Soil Mechanics, 2017, 38(5):1-12.(In Chinese)
- [11] 周芬,郭奥飞,杜运兴.边坡稳定可靠度分析的新型四阶矩法[J].湖南大学学报(自然科学版),2016,43(5):113-119.  
ZHOU F, GUO A F, DU Y X.A new method of four order moments for reliability analysis on slope stability[J].Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2016, 43(5):113-119.(In Chinese)
- [12] 李典庆,肖特,曹子君,等.基于极限平衡法和有限元法的边坡协同式可靠度分析[J].岩土工程学报,2016,38(6):1004-1013.  
LI D Q, XIAO T, CAO Z J, *et al.*Auxiliary slope reliability analysis using limit equilibrium method and finite element method[J].Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2016, 38(6):1004-1013.(In Chinese)
- [13] 朱勇,冯夏庭,周辉,等.岩土强度参数空间中的极限状态面与系统可靠度分析[J].岩石力学与工程学报,2016,35(S2):3473-3480.  
ZHU Y, FENG X T, ZHOU H, *et al.*Limit state surface in strength parameter space and system reliability analysis[J].Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(S2):3473-3480.(In Chinese)
- [14] 舒苏旬,龚文惠.边坡稳定分析的神经网络改进模糊点估计法[J].岩土力学,2015,36(7):2111-2116.  
SHU S X, GONG W H.An improved fuzzy point estimate method for slope stability analysis based on neural network[J].Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(7):2111-2116.(In Chinese)
- [15] 吴振君,王水林,葛修润.约束随机场下的边坡可靠度随机有限元分析方法[J].岩土力学,2009,30(10):3086-3092.  
WU Z J, WANG S L, GE X R.Slope reliability analysis by random FEM under constraint random field[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10):3086-3092.(In Chinese)
- [16] 陈昌富,杨宇.边坡稳定性分析水平条分法及其进化计算[J].湖南大学学报(自然科学版),2004,31(3):72-75.  
CHEN C F, YANG Y.Horizontal slice method of slope stability analysis based on evolutionary algorithm[J].Journal of Hunan University(Natural Sciences), 2004, 31(3):72-75.(In Chinese)
- [17] TAN X H, WANG X E, HU N, *et al.*Two methods for predicting reliability index and critical probabilistic slip surface of soil slopes [J].Geotechnical and Geological Engineering, 2016, 34(5):1283-1292.
- [18] JI J, JAYANTHA K K.Efficient reliability method for implicit limit state surface with correlated non-Gaussian variables [J].International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2015, 39(17):1898-1911.
- [19] SU Y H, LI X, XIE Z Y.Probabilistic evaluation for the implicit limit state function of stability of a highway tunnel in China [J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2011, 26(2): 422-434.
- [20] XU B, LOW B K.Probabilistic stability analyses of embankments based on finite-element method [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, 132(11):1444-1454.