

## 带接头地下管线变形的傅里叶级数解

程霖<sup>1†</sup>, 杨成永<sup>1</sup>, 李延川<sup>2</sup>, 马文辉<sup>1</sup>

(1.北京交通大学 土木建筑工程学院,北京 100044;2.北京城建设计发展集团股份有限公司,北京 100037)

**摘要:**地铁隧道开挖将引起地下管线产生附加变形,造成管线的破坏.将带接头地下管线视为弹性地基梁,引入“相当荷载”改进匀质管线变形的控制微分方程,使之能够考虑接头处的刚度折减.采用傅里叶级数解法求解控制微分方程,得到未知傅里叶级数系数的表达式,进而得到关于管线接头相对转角的线性方程组.假定地层变形符合 Peck 曲线,将基于傅里叶级数法得到的计算结果与数值模拟方法进行对比,验证了方法的正确性.计算结果表明,在地层位移荷载作用下,管线产生变形,管线接头处产生明显转动.地层沉降对距隧道开挖中线  $3i$  ( $i$  为沉降槽宽度系数)以外的管线影响较小,该区域内接头相对转角远小于容许值,在计算时可不作考虑,以减少未知量的数目.当某个管线接头位于隧道开挖中心的正上方时,该接头处将产生最大的相对转角,因此在缺少管线接头位置资料的情况下,可假定某个管线接头与隧道开挖中线重合,以得到接头相对转角的保守计算值.

**关键词:**地下管线;接头;变形;弹性地基梁;傅里叶级数解

**中图分类号:**U455

**文献标志码:**A

## Fourier Series Solution for Deformation of Buried Jointed Pipelines

CHENG Lin<sup>1†</sup>, YANG Chengyong<sup>1</sup>, LI Yanchuan<sup>2</sup>, MA Wenhui<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. Beijing Urban Construction Design & Development Group Co Limited, Beijing 100037, China)

**Abstract:** The excavation of subway tunnel will induce the extra deformation or even damage of pipelines that lies above. The jointed pipeline was regarded as a beam on elastic foundation. By introducing the equivalent loads to consider the reduction of rigidity at joints, the governing differential equation for the deformation of jointed pipeline was established. Fourier series method was used to solve the governing differential equation. Expressions of the unknown coefficients of Fourier series were derived, and then a set of linear equations for determining relative joint rotations was obtained. Meanwhile, assuming that the soil settlement fits a Peck curve, the settlement of pipeline was computed and compared with that obtained from numerical simulation, which verifies the correctness of the Fourier series method. Results show that, with the loading of soil displacement, the pipeline deforms and rotates largely around its joints. The settlement of soil has small influence on pipe segments beyond  $3i$  (where  $i$  is the width of settlement trough), where joints can be ignored to reduce unknowns because relative joint rotations are far less than the tolerant value. When a joint is located above the excavation center, the soil subsidence can induce the maximum relative rotation at this joint. Therefore, if the locations of joints are unknown, one joint can be set right above the tunnel centerline in order to assure a conservative result.

**Key words:** buried pipeline; joint; deformation; beam on elastic foundation; Fourier series solution

\* 收稿日期:2017-10-16

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51278044,51478032), National Natural Science Foundation of China(51278044,51478032)

作者简介:程霖(1992—),男,山东聊城人,北京交通大学博士研究生

† 通讯联系人, E-mail: bjd\_chenglin@163.com

地铁隧道开挖将引起既有地下管线的附加变形.地下管线大多为带接头管线,接头处产生过大的附加变形将导致管线的破坏,因此管线接头处的附加变形常作为管线安全评价的指标<sup>[1]</sup>.

管线附加变形的解析计算方法主要基于弹性地基梁理论.如 Attewell 等<sup>[2]</sup>采用弹性地基梁模型分析了匀质地下管线在隧道开挖作用下的位移响应. Klar 等<sup>[3]</sup>得到了隧道开挖引起的管线变形的 Winkler 弹性地基梁解析解,并与弹性连续体地基解答进行了比较,修正了 Winkler 弹性地基梁的地基系数.刘齐建<sup>[4]</sup>提出了考虑埋深影响的弹性地基梁模型,用于地下结构物的纵向分析. Wang 等<sup>[5]</sup>建立了管-土相互作用的理论分析模型,得到了管线变形的解析解,探究了管-土相互作用规律.李素珍等<sup>[6]</sup>提出了基于弹性地基梁理论的平差拟合算法,通过管线的沉降监测数据可获得管线的连续挠曲线,从而对管线进行力学分析.杨成永等<sup>[7-8]</sup>推导了匀质管线大变形的控制微分方程,给出了管线变形的近似解和傅里叶级数解.以上研究均假定管线为连续杆件,适用于接头不允许转动的刚性管线,如焊接接头管线,无法考虑管线接头允许转动的情况.

目前,有学者认识到将连续杆件假设应用于带接头管线的的不合理性,提出了相应的方法以考虑接头转动的影响.如 Klar 等<sup>[9]</sup>将管线接头抽象为能够同时承受弯矩和剪力的接头单元,将相邻接头间的管段抽象为梁单元,推导两种单元的刚度矩阵,采用边界积分法求解了隧道开挖影响下既有管线的变形及内力.张陈蓉等<sup>[10]</sup>基于弹性地基梁模型,在管线接头处引入“虚拟节点”,采用有限差分法求解了隧道开挖影响下带接头管线的变形和内力.上述方法虽然能够考虑接头转动,但计算手段依赖于数值解法,求解过程较为复杂.

以上研究工作表明,带接头管线附加变形的理论计算方法研究尚不充分,未得到更为简便的解析计算方法.求解带接头管线变形解析解的困难在于管线接头的模拟,传统弹性地基梁方法无法考虑管线接头处的刚度折减以及由此引起的转角改变,需要进行改进.为此,引入“相当荷载”的概念<sup>[11]</sup>模拟管线接头,基于杨成永等<sup>[7]</sup>推导的匀质管线变形的控制微分方程,用傅里叶级数法求解,进而给出带接头管线变形和内力的解析解.采用数值模拟验证傅里叶级数法的正确性.本文方法可用于计算地下管线的接头相对转角、沉降和内力,为评估地铁隧道开挖对邻近地下管线的影响提供一定的理论依据.

## 1 控制微分方程和相当荷载

管线接头的刚度比管段的刚度小时,管线变形后,管线转角在接头处将产生突变<sup>[9]</sup>.隧道开挖影响下带接头管线变形示意图如图 1 所示.

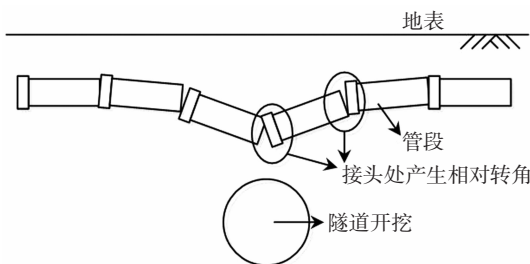


图 1 带接头管线变形示意图

Fig. 1 Deformation of jointed pipeline

由图 1 可见,隧道开挖引起管线产生变形,管段在接头处产生相对转角.对管线采取以下计算假设:

- ① 管线视为弹性地基上的 Euler-Bernoulli 梁,变形服从平截面假定,基底变形遵从 Winkler 假定.
- ② 梁的两端位于隧道开挖的影响范围之外,转角为 0.
- ③ 管线仅受到土层位移荷载的作用,忽略施工期间其他荷载的影响.
- ④ 在变形过程中,如果管线上覆土层过薄而管线刚度又过大,管线上覆的土柱有可能被顶出,致使管线不是全长范围内的弹性地基梁.本次研究不考虑这种情况.
- ⑤ 管线接头的折减刚度为常量,不因变形而改变.

由以上假设得到如图 2 所示的计算模型,计算范围为 $[-L, L]$ .为简化分析过程,假定地层位移荷载为对称荷载.由于计算模型和荷载的对称性,可取 $[0, L]$ 内的半结构进行分析.

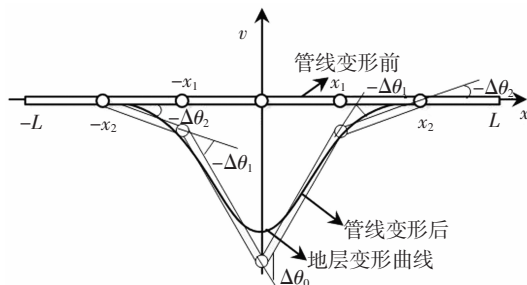


图 2 计算模型

Fig. 2 Calculation model

将隧道开挖引起的地层位移作为荷载施加在管线上.管线变形的控制微分方程可写为<sup>[7]</sup>

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (1)$$

式中: $E$ 为管线的弹性模量; $I$ 为管线的截面惯性矩; $x$ 为沿管线轴向的坐标; $w(x)$ 为管线竖向位移,向上为正; $q(x)$ 为右端荷载,向上为正.

为考虑管段在接头处的转角改变,在右端荷载中引入相当荷载  $q_e(x)$ ,即

$$q(x) = KD[S(x) - w(x)] + q_e(x) \quad (2)$$

式中: $K$ 为地基系数; $D$ 为管线外径; $S(x)$ 为地层变形.

荷载  $q_e(x)$ 的表达式为

$$q_e(x) = EI \left[ \Delta\theta_0 \delta''(x) + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \delta''(x - x_j) \right] \quad (3)$$

式中: $\Delta\theta_0$ 为坐标原点  $x = 0$  处(隧道轴线正上方)接头两侧的相对转角, $\Delta\theta_j$ 为其余接头两侧的相对转角, $\Delta\theta_0$ 和  $\Delta\theta_j$ 均以接头右侧管段相对于左侧管段逆时针旋转为正; $N$ 为隧道开挖影响范围内除原点处接头外剩余接头的数目; $\delta''(x)$ 和  $\delta''(x - x_j)$ 为脉冲函数  $\delta(x)$ 和  $\delta(x - x_j)$ 的二阶导函数; $x_j$ 为从原点向右第  $j$  个接头与原点的距离.

式(3)中  $\delta''(x - x_j)$ 的函数图像如图 3 所示<sup>[11]</sup>.

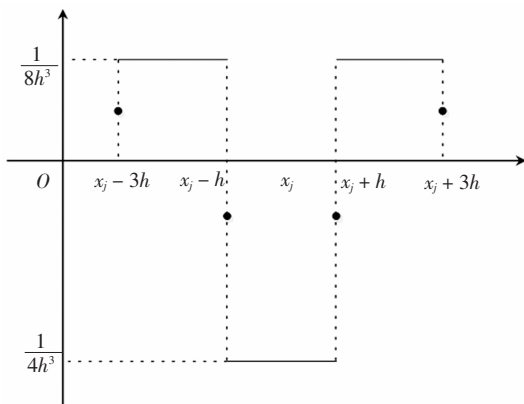


图 3  $\delta''(x - x_j)$ 的函数图像( $h$ 为无限趋近于 0 的数)

Fig.3 The graph of function  $\delta''(x - x_j)$  ( $h$  is a number that approaches to zero infinitely)

由式(3)和图 3 可知,相当荷载  $q_e(x)$ 为一组作用在连续杆件  $x = 0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{N/2}$  两侧局部范围内  $[x_j - 3h, x_j + 3h]$  的分布荷载之和.其中任一子荷载  $q_{e,j}(x) = EI\Delta\theta_j \delta''(x - x_j)$ 均可简化为作用在连续杆件  $x = x_j$ 处两侧的一对力偶  $M_j$ .该力偶对是在连续杆件上额外施加的荷载,自身能够构成平衡力系,对杆件整体的平衡没有影响,但能迫使连续杆件转角在  $x = x_j$ 处产生突变,两侧的杆件产生

相对转角  $\Delta\theta_j$ ,如图 4 所示.

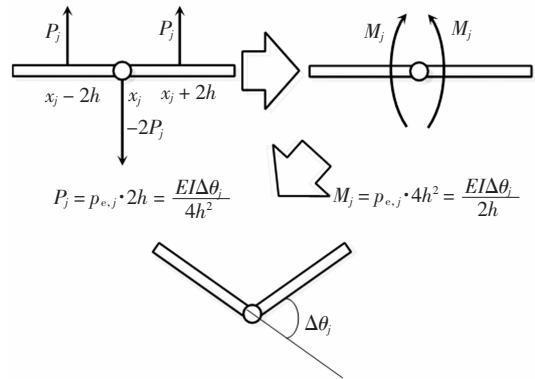


图 4 相当荷载作用下相对转角的产生

Fig.4 Rotation caused by equivalent load

## 2 边界条件

由假设②可知,管线两端转角为 0,于是有

$$w'(\pm L) = w'(0) = 0 \quad (4)$$

相当荷载  $q_e(x)$ 使得连续刚度杆件在荷载施加处产生转角突变,在施加相当荷载  $q_e(x)$ 的位置处,可视为连续刚度杆件额外受到弯矩作用,由图 4 可知,额外施加的总弯矩为

$$M_e(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{EI\Delta\theta_0}{2h} + \sum_{j=1}^{N/2} \frac{EI\Delta\theta_j}{2h} \right) = EI \left[ \Delta\theta_0 \delta(x) + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \delta(x - x_j) \right] \quad (5)$$

因此,在相当荷载施加处,有荷载边界条件

$$EIw''(x_j) = M_e(x_j) \quad (6)$$

带接头管线的实际弯矩  $M$ (使梁下侧受拉为正)和剪力  $Q$ (使截面右侧梁段产生顺时针转动为正)要去除相当荷载的影响,并由弯矩、剪力与竖向位移的微分关系可得如下的计算公式

$$M(x) = EIw''(x) - M_e(x) \quad (7)$$

$$Q(x) = EIw'''(x) - M_e'(x) \quad (8)$$

由式(6)~式(8)可以看出, $x = x_j$ 处弯矩完全由相当荷载  $q_e(x)$ 引起,与管线受到的位移荷载无关,计算结果中去除相当荷载的影响后,所得结果将对应于管段接头为铰接的这种特殊情况.换句话说,式(6)相当于将连续刚度杆件在  $x = x_j$ 处的弯曲刚度进行了完全折减.事实上,管线接头常常具有一定的抗弯刚度,为了考虑这种情况,在式(6)中引入连续杆件的刚度折减系数  $\beta$ ,相当荷载处的边界条件变为

$$(1 - \beta)EIw''(x_j) = M_e(x_j) \quad (9)$$

式中: $\beta$ 为刚度折减系数,即接头弯曲刚度与管段弯曲刚度的比值,取值范围为 $0 \sim 1$ .当 $\beta = 0$ 时,接头弯曲刚度为 $0$ ,对应于接头可自由转动的情况;当 $\beta = 1$ 时,接头弯曲刚度与管段相等,对应于管线接头刚度无折减的情况.

### 3 傅里叶级数解法

由于位移和荷载均为对称,可将 $w(x)$ 、 $S(x)$ 、 $q_e(x)$ 和 $M_e(x)$ 在区间 $[-L, L]$ 内展开为余弦级数.

$w(x)$ 的余弦级数展开式为

$$w(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

式中: $a_0 \sim a_n$ 为待求的傅里叶级数的系数.

$w(x)$ 的各阶导函数为

$$w'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (11)$$

$$w''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (12)$$

$$w'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (13)$$

$$w''''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (14)$$

假定地层变形符合 Peck 公式,即

$$S(x) = S_0 e^{-\frac{x^2}{2i^2}} \quad (15)$$

式中: $S_0$ 为管线中点 $x = 0$ 处的最大变形; $i$ 为沉降槽宽度系数.

$S(x)$ 的余弦级数展开式为

$$S(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (16)$$

式中: $b_0, b_n$ 为傅里叶级数的系数.

脉冲函数 $\delta(x - x_j)$ 的余弦级数展开式为

$$\delta(x - x_j) = \frac{\delta_{0,j}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,j} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (17)$$

式中 $\delta_{0,j}, \delta_{n,j}$ 为傅里叶级数的系数( $\delta(x)$ 展开式的常数项和余弦项系数分别记为 $\delta_0, \delta_n$ ).

脉冲函数二阶导数 $\delta''(x - x_j)$ 的余弦级数展开式为

$$\delta''(x - x_j) = \frac{\delta_{0,j}''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,j}'' \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (18)$$

式中: $\delta_{0,j}'', \delta_{n,j}''$ 为傅里叶级数的系数( $\delta''(x)$ 展开式的常数项和余弦项系数分别记为 $\delta_0'', \delta_n''$ ).

$S(x), \delta(x - x_j), \delta'(x - x_j)$ 和 $\delta''(x - x_j)$ 均为已知函数,现将其傅里叶级数系数列于表 1<sup>[11-12]</sup>.

表 1 已知函数的傅里叶级数系数

Tab.1 Coefficients of Fourier series for known functions

函数	常数项系数	余弦项系数
$S(x)$	$-\sqrt{2\pi} \frac{i}{L} S_0$	$-\sqrt{2\pi} \frac{i}{L} S_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{n\pi i}{L})^2}$
$\delta(x - x_j)$	$\frac{2}{L}$	$\frac{2}{L} \cos \frac{n\pi x_j}{L}$
$\delta''(x - x_j)$	$0$	$\frac{2n^2\pi^2}{L^3} \cos \frac{n\pi x_j}{L}$

将式(18)代入式(3),再将式(3)(10)(16)代入式(2),最后将式(2)(14)代入式(1),比较等式两边常数项及余弦项系数,可得

$$a_0 = b_0 \quad (19)$$

$$a_n = \frac{KDb_n + EI \left( \frac{1}{2} \Delta\theta_0 \delta_n'' + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \delta_{n,j}'' \right)}{KD + EI \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4} \quad (20)$$

式(20)中, $\Delta\theta_0 \sim \Delta\theta_{N/2}$ 为待求未知量.将式(20)代入边界条件式(6),又由式(12)(17)可整理得

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta\theta_0 \left[ \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n + C_n \delta_n'') \right] + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \left[ \frac{\delta_{0,j}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n,j} + C_n \delta_{n,j}'') \right] = -\frac{KD}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n \\ \frac{1}{2} \Delta\theta_0 \left[ \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n + C_n \delta_n'') \cos \frac{n\pi x_1}{L} \right] + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \left[ \frac{\delta_{0,j}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n,j} + C_n \delta_{n,j}'') \cos \frac{n\pi x_1}{L} \right] = -\frac{KD}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n \frac{n\pi x_1}{L} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \Delta\theta_0 \left[ \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n + C_n \delta_n'') \cos \frac{n\pi x_{N/2}}{L} \right] + \sum_{j=1}^{N/2} \Delta\theta_j \left[ \frac{\delta_{0,j}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_{n,j} + C_n \delta_{n,j}'') \cos \frac{n\pi x_{N/2}}{L} \right] = -\frac{KD}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} C_n b_n \cos \frac{n\pi x_{N/2}}{L} \end{cases} \quad (21)$$

方程组 (21) 即为关于  $\Delta\theta_0 \sim \Delta\theta_{N/2}$  的线性方程组,其中

$$C_n = \frac{(1-\beta)EI(n\pi L)^2}{KDL^4 + EI(n\pi)^4} \quad (22)$$

要注意,方程组(21)为管线接头位于隧道开挖中线正上方的情况( $x = 0$  处有接头),若隧道开挖中线位于管段中部,即不存在相对转角  $\Delta\theta_0$ ,此时需将方程组(21)中第一个方程删去,并令其余方程中  $\Delta\theta_0 = 0$ .

将求得的  $\Delta\theta_0 \sim \Delta\theta_{N/2}$  代入式(20),即可求得位置系数  $a_1 \sim a_n$ ,最后通过式(7)(8)(10)求解管线的变形和内力.

### 4 级数解与数值解的对比

采用 MATLAB 编程,计算范围  $L$  取 15 m,级数项数取 200. 考虑管线接头数量以及接头与隧道开挖的位置关系的影响,令  $\beta = 0$ (接头可自由转动),计算 4 个工况:工况 1,管线只在  $x = 0$  处有一个接

头;工况 2,管线在  $x = \pm 5$  m 处各有一个接头;工况 3,管线在  $x = 0, \pm 7.5$  m 处各有一个接头;工况 4,管线在  $x = \pm 3$  m、 $\pm 9$  m 处各有一个接头.考虑管线接头刚度的影响,在工况 1 基础上计算 4 个工况:工况 5,取  $\beta = 0.01$ ;工况 6,取  $\beta = 0.1$ ;工况 7,取  $\beta = 0.5$ ;工况 8,取  $\beta = 1$ .

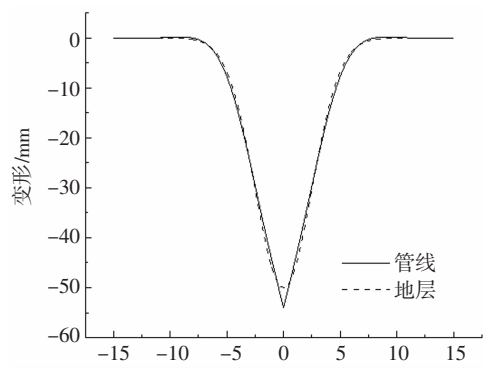
采用北京地铁 14 号线某工点实测数据,新建地铁隧道垂直下穿既有管线,引起地层和管线产生沉降变形,地层变形参数为:最大沉降  $S_0 = -0.05$  m,沉降槽宽度  $i = 2.5$  m,地基系数  $K = 8 \times 10^7$  Pa/m.既有管线设计参数为:弹性模量  $E = 2 \times 10^{11}$  Pa,管线的截面惯性矩  $I = 1.746 \times 10^{-4}$  m<sup>4</sup>.

用于验证傅里叶级数法正确性的数值模型采用 ANSYS 建立,管线采用 BEAM188 单元模拟,地基弹簧和管线接头采用 COMBIN14 单元模拟.将数值模拟方法与傅里叶级数法的计算结果列于表 2.用级数法计算的工况 1~工况 4 地层与管线的变形曲线如图 5 所示,不同接头刚度影响下管线的变形对比如图 6 所示.

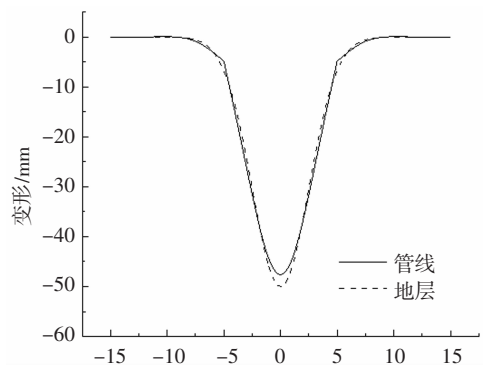
表 2 级数解与数值解计算结果

Tab.2 Results by series method and numerical method

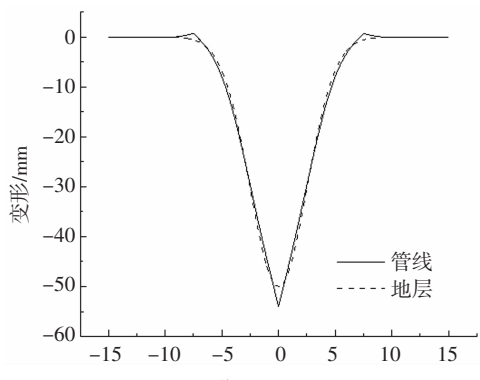
工况	计算方法	管线中点变形 /mm	管线最大弯矩 /(kN·m)	管线最大剪力 /kN	管线接头两侧相对转角/rad		
					$\Delta\theta_0$	$\Delta\theta_1$	$\Delta\theta_2$
1	数值解	53.875	93.878	56.986	$1.82 \times 10^{-2}$	—	—
	级数解	53.953	96.424	58.992	$1.82 \times 10^{-2}$	—	—
2	数值解	47.672	210.430	92.599	—	$-8.56 \times 10^{-3}$	—
	级数解	47.572	216.070	96.357	—	$-8.50 \times 10^{-3}$	—
3	数值解	53.857	90.036	57.050	$1.82 \times 10^{-2}$	$-3.00 \times 10^{-3}$	—
	级数解	53.935	92.996	59.220	$1.83 \times 10^{-2}$	$-2.90 \times 10^{-3}$	—
4	数值解	47.753	219.490	99.057	—	$-1.70 \times 10^{-3}$	$-7.05 \times 10^{-4}$
	级数解	47.686	226.083	101.931	—	$-1.80 \times 10^{-3}$	$-6.12 \times 10^{-4}$
5	数值解	52.109	96.026	68.007	$1.31 \times 10^{-2}$	—	—
	级数解	52.063	98.916	70.180	$1.32 \times 10^{-2}$	—	—
6	数值解	48.855	173.093	94.792	$3.70 \times 10^{-3}$	—	—
	级数解	48.686	181.265	99.072	$3.50 \times 10^{-3}$	—	—
7	数值解	47.877	206.771	104.687	$8.86 \times 10^{-4}$	—	—
	级数解	47.779	212.983	108.605	$9.10 \times 10^{-4}$	—	—
8	数值解	47.566	217.305	107.985	0	—	—
	级数解	47.469	224.154	112.144	0	—	—



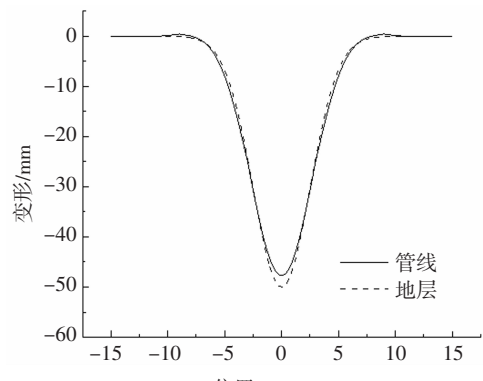
(a) 工况 1



(b) 工况 2



(c) 工况 3



(d) 工况 4

图 5 不同工况下地层和管线的沉降曲线

Fig.5 Settlement of soil and pipeline in different cases

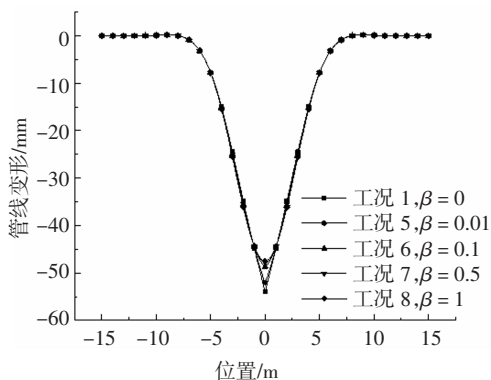


图 6 不同接头刚度影响下的管线沉降

Fig.6 Settlement of pipeline with respect to different joint stiffness

由表 2 可见,傅里叶级数法得到的计算结果与数值模拟方法基本一致,证明了方法的正确性.由图 5 可见,管线在地层位移荷载作用下产生了变形,接头处转角有明显突变;管线接头位于隧道开挖中线正上方时,管线中点处沉降大于地层;管段中心位于隧道开挖中线正上方时,管线中点处沉降小于地层.

由图 6 可见,随着  $\beta$  值从 0 增长到 1,管线接头的刚度不断增大,管线由铰接转变为连续杆件.相应地,管线中点沉降及接头两侧相对转角均不断减小.说明接头刚度的增大使得管线的整体刚度得到提升,自身抵抗变形的能力增大.

对比各工况的管线中点沉降,工况 1 大于工况 3,工况 2 小于工况 4,说明一定长度内管线接头越多,管线的柔性越强,管线变形越趋近于地层变形.

由工况 1、工况 3 和工况 4 的计算结果可见,工况 1 和工况 3 得到的管线沉降、内力以及管线中点  $x = 0$  处的接头相对转角相差无几.工况 3 在  $x = \pm 7.5 \text{ m}$  ( $=3i$ )处、工况 4 在  $x = 9 \text{ m}$  ( $>3i$ )处有接头,两个工况下接头两侧相对转角 ( $2.90 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.12^\circ$ ,  $6.12 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 0.04^\circ$ )均远小于管线转角的允许值<sup>[2]</sup>.由此可见,对于距离隧道开挖中心超过  $3i$  的管线,地层沉降的影响较小,因此,计算时可以只考虑距离隧道开挖中心不大于  $3i$  的管线接头,计算范围内其余接头的影响可忽略不计,以减少未知量数目.

以上计算只考虑了接头位于隧道开挖中线正上方以及管段中心位于隧道开挖中线正上方两种特殊情况,而实际工程中接头与隧道开挖中线对称分布的情况可能并不多见.但管段长度  $l$  与沉降槽宽度系数  $i$  的比值  $l/i$  小于 2 的情况下,上述两种特殊情况能够计算出距离隧道开挖中线最近(以开挖中线为中心  $\pm 0.5l$  范围内)的接头能够达到的相对转角的最大值与最小值,可作为接头相对转角的限值使用.下面分别取管段长度为  $5 \text{ m}$  ( $l/i = 2$ )、 $6 \text{ m}$  ( $l/i =$

2.4)和 10 m( $l/i = 4$ ),对此进行说明.表 3 中列出了接头与隧道开挖中线不同距离时产生的最大相对转角,其中“\*”表示级数解,其余为数值解.

表 3 接头距隧道开挖中线不同距离时的最大相对转角

Tab.3 Maximum rotations with regard to different distances from a joint to tunnel centerline

接头与开挖 中线距离	不同管段长度 $l$ 下的最大相对转角/rad		
	$l = 5$ m	$l = 6$ m	$l = 10$ m
0	* $1.77 \times 10^{-2}$	* $1.80 \times 10^{-2}$	* $1.83 \times 10^{-2}$
0.1 <i>l</i>	$1.68 \times 10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-2}$	$1.49 \times 10^{-2}$
0.2 <i>l</i>	$1.45 \times 10^{-2}$	$1.33 \times 10^{-2}$	$6.90 \times 10^{-3}$
0.3 <i>l</i>	$1.09 \times 10^{-2}$	$8.50 \times 10^{-3}$	$-1.64 \times 10^{-3}$
0.4 <i>l</i>	$6.71 \times 10^{-3}$	$3.17 \times 10^{-3}$	$-7.11 \times 10^{-3}$
0.5 <i>l</i>	* $2.30 \times 10^{-3}$	* $-1.80 \times 10^{-3}$	* $-8.46 \times 10^{-3}$

通过表 3 可以看出,当管段长度为 5 m 时,接头最大相对转角随接头与隧道中线的距离增大同号递减,其余两种情况则不同.在管段长度为 5 m 的情况下,距离隧道开挖中线最近的管线接头至少产生  $2.3 \times 10^{-3}$  rad 的相对转角,最大产生  $1.77 \times 10^{-2}$  rad 的相对转角.而无论  $l$  与  $i$  的比值为多少,管线接头位于隧道开挖中线正上方时,计算的相对转角均为最大.通过表 2 中的计算结果可见,隧道开挖中线正上方的接头相对转角明显大于其他位置处的接头转角.因此,在实际工程中,管线接头与隧道开挖中线的位置不明确时,可假设某个管线接头位于隧道开挖中线正上方,能够得到较为保守的接头相对转角.

从以上的计算过程来看,与数值方法相比,傅里叶级数解法的优势在于:

①计算参数相同的情况下,数值方法的计算精度与网格划分尺寸、基底弹簧间距有关,而傅里叶级数解法只与选取的级数项数有关.傅里叶级数项数超过 20 项后,计算得到的接头相对转角就基本不随级数项数的改变而改变了,因此当取到足够多的级数项时,可以视为问题的精确解.

②傅里叶级数解法只需求解线性方程组(21)即可求得未知转角和傅里叶级数系数,方程组规模远小于数值方法.以工况 4 为例,级数解法只需求解 2 个方程,而相应的有限元法则需求解 899 个方程( $299 \times 3 + 2 \times 1$ ).

### 5 工程实例

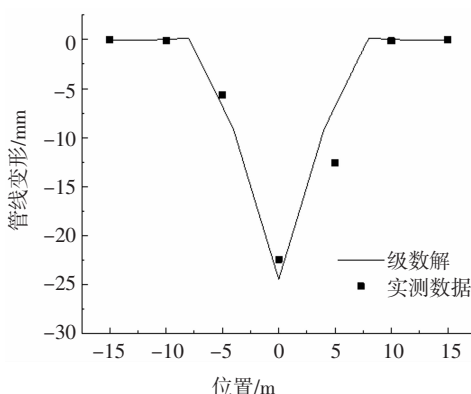
北京地铁 14 号线某区间工程下穿多条管线,

选取两处较为典型的工点,两处工点的管线均为钢筋混凝土排水管,接头为柔性承插式接头.工点 1 管线内径为 1 000 mm,壁厚为 100 mm,埋深为 13.8 m,管段长度为 4 m,管线接头位于右线隧道开挖中线上方;工点 2 为施工横通道下穿管线,管线内径为 600 mm,壁厚为 60 mm,埋深为 6.2 m,管段长度为 4 m,管线接头与右线隧道开挖中线最小距离为 1.8 m.管线的弹性模量  $E = 3 \times 10^{10}$  Pa.地层变形取实测数据,工点 1 地层最大沉降  $S_0 = -0.022$  m,沉降槽宽度  $i = 2.9$  m,地基系数  $K = 5.7 \times 10^7$  Pa/m;工点 2 地层最大沉降  $S_0 = -0.016$  m,沉降槽宽度  $i = 2.4$  m,地基系数  $K = 5.2 \times 10^7$  Pa/m.

采用傅里叶级数法计算管线沉降.对于工点 1,计算模型中将管线接头设置在  $x = 0, \pm 4$  m、 $\pm 8$  m 处;对于工点 2,计算模型中将管线接头设置在  $x = \pm 2$  m、 $\pm 6$  m、 $\pm 10$  m 处.

计算得工点 1 管线最大沉降为 24.411 mm,最大相对转角为  $7.66 \times 10^{-3}$  rad,均发生在隧道开挖中线上方( $x = 0$  处).工点 1 实测最大沉降发生在距隧道开挖中线上方测点处,该点沉降值为 22.43 mm,根据该点与相邻测点的沉降差及测点间距(5 m)推算,该点两侧管线的相对转角为  $5.32 \times 10^{-3}$  rad.计算得工点 2 管线最大沉降为 13.306 mm,距隧道开挖中线 2 m 处管线沉降为 12.13 mm,接头两侧相对转角为  $3.0 \times 10^{-3}$  rad.工点 2 实测最大沉降发生在距隧道开挖中线 1.8 m 的测点处,该点沉降值为 11.58 mm,推算得该点两侧管线相对转角为  $2.45 \times 10^{-3}$  rad.从以上数据可见管线变形计算值与实测数据比较接近.

图 7 为级数解与实测数据的对比.由图 7 可见,管线沉降计算值与实测数据趋势一致,证明了级数解法的有效性.计算中假定了管线接头可自由旋转( $\beta = 0$ ),这使得管线沉降的计算值比实测值偏大.



(a) 工点 1

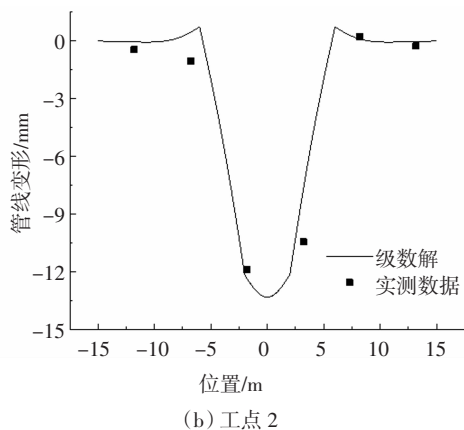


图7 级数解与实测数据的对比

Fig.7 Comparison of Fourier series solutions and measured data

## 6 结论

假设地下管线为弹性地基上的 Euler-Bernoulli 梁,建立了带接头地下管线的理论模型.引入“相当荷载”的概念模拟管线接头处的转角变化和刚度折减.采用傅里叶级数解法,给出了计算带接头管线变形和内力的解析解.通过与数值模拟计算结果的对比,验证了傅里叶级数法的正确性.通过增加傅里叶级数的项数,级数解可以达到任意精度.

计算表明,当地层变形符合 Peck 曲线时,接头附加转角主要发生在地层变形影响较大的范围内( $x < 3i$ ),该影响范围之外( $x > 3i$ )的管线接头在计算时可不做考虑.

管段长度与沉降槽宽度系数比值小于 2 时,采用接头位于隧道开挖中线正上方以及管段中心位于隧道开挖中线正上方两种模型进行计算,将得到距开挖中线最近的接头相对转角的最大值与最小值.隧道开挖中线正上方的接头相对转角明显大于其他接头处,因此在缺少管线接头位置资料时,可以假设某个管线接头位于隧道开挖中线正上方,以得到较为保守的接头相对转角.

以工程实例为例说明了傅里叶级数解法在工程中的应用,证明了级数法的有效性,可为评估地铁隧道施工对既有地下管线的影响提供一定的理论依据.

## 参考文献

[1] 李兴高,王霆.柔性管线安全评价的简便方法[J].岩土力学,2008,29(7):1861—1864.  
LI X G, WANG T. Simple method for evaluating safety of flexible

pipelines[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(7):1861—1864. (In Chinese)

[2] ATTEWELL P B, YEATS J, SELBY A R. Soil movements induced by tunneling and their effects on pipelines and structures[M]. London: Blackie and Son Ltd, 1986:131—134.

[3] KLAR A, VORSTER T E B, SOGA K, et al. Soil-pipe-tunnel interaction: comparison between Winkler and elastic continuum solutions[R]. Cambridge: University of Cambridge, 2004:4—14.

[4] 刘齐建.考虑埋深效应的弹性地基中梁分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2009,36(9):12—15.  
LIU Q J. An analytical method for beams embedded in an elastic foundation [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2009, 36(9):12—15. (In Chinese)

[5] WANG Y, WANG Q, ZHANG K Y. An analytical model for pipe-soil-tunneling interaction[J]. Procedia Engineering, 2011, 14:3127—3135.

[6] 李素贞,彭兴华,李新亮.基于沉降测量的管道力学性状分析及误差评估[J].湖南大学学报(自然科学版),2014,41(9):86—92.  
LI S Z, PENG X H, LI X L. Subsidence measurement based stress analysis and error assessment of buried pipeline [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2014, 41(9):86—92. (In Chinese)

[7] 杨成永,程霖,余乐,等.匀质地下管线沉降的傅里叶级数解[J].中国铁道科学,2017,38(2):71—76.  
YANG C Y, CHENG L, YU L, et al. Fourier series solution for settlement of buried jointless pipeline [J]. China Railway Science, 2017, 38(2):71—76. (In Chinese)

[8] 杨成永,张彦斌,张伦政.匀质地下管线大变形的控制微分方程及其近似解[J].中国铁道科学,2014,35(1):42—46.  
YANG C Y, ZHANG Y B, ZHANG L Z. Governing differential equation and approximate solution for large deformation of jointless underground pipeline [J]. China Railway Science, 2014, 35(1):42—46. (In Chinese)

[9] KLAR A, MARSHALL A M, SOGA K, et al. Tunneling effects on jointed pipelines [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45(1):131—139.

[10] 张陈蓉,俞剑,黄茂松.隧道开挖对邻近非连续接口埋管的影响分析[J].岩土工程学报,2013,35(6):1018—1026.  
ZHANG C R, YU J, HUANG M S. Responses of adjacent underground jointed pipelines induced by tunneling [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(6):1018—1026. (In Chinese)

[11] 严宗达.结构力学中的富里叶级数解法[M].天津:天津大学出版社,1989:94—102.  
YAN Z D. Fourier series solutions in structural mechanics [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1989:94—102. (In Chinese)

[12] 埃伯哈德·蔡德勒,沃尔夫冈·哈克布什,汉斯-鲁道夫·施瓦茨,等.数学指南:实用数学手册[M].李文林,译.北京:科学出版社,2012:182—186.  
ZEIDLER E, HACKBUSH W, SCHWARZ H R, et al. User's guide to mathematics [M]. Translated by LI W L. Beijing: Science Press, 2012:182—186. (In Chinese)