

局部均布荷载作用下四边支承矩形板的内力计算

杨成永,马文辉[†],韩薛果,程霖

(北京交通大学 土木建筑工程学院,北京 100044)

摘要:以矩形板的 Navier 解为基础,采用带补充项的傅里叶级数作为挠度函数,研究了局部均布荷载作用下四边支承矩形薄板的弯曲问题.推导了确定待定系数的线性代数方程组,给出了简支边和固支边不同组合条件下的统一计算公式.讨论了带补充项级数解的收敛速度,并与叠加法级数解及有限元数值解分别进行了精度和计算量的对比.结果表明,带补充项法的级数解达到收敛的级数项数约为 40 项.带补充项法的级数解与叠加法级数解具有同样的求解精度.有限元解随网格的细分,计算结果逐渐接近级数法解.级数解法的计算量与有限元解法相比是微不足道的.研究成果适于进行构筑物顶板受局部均布荷载作用的结构计算.

关键词:矩形板;四边支承;局部均布荷载;级数解;求解精度

中图分类号:U411

文献标志码:A

Internal Force Calculation of Four Edges Supported Rectangular Plates under Local Uniformly Distributed Load

YANG Chengyong, MA Wenhui[†], HAN Xueguo, CHENG Lin

(School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: On the basis of Navier's solution to rectangular plates, the bending problem was studied for the four edges supported thin plates under local uniformly distributed load, where the double Fourier series with additional terms was adopted as the deflection function of the plates. Linear algebraic equations for solving the undetermined coefficients were derived. A unified solution was obtained to the rectangular plates with clamped and simply supported edges. The rate of convergence was discussed on the solution of the series method with additional terms. The proposed method was compared both with superposition series method on accuracy, and with finite element numerical method on computational cost. The results show that 40 terms should be employed for a convergence of the series. The method with additional terms shows the same accuracy of solution as superposition series method does. The solution by finite element method gradually approaches that by the series method as the mesh gets finer and finer. In comparison with finite element method, the computational time by the series method is negligible. This work is applicable for structural analysis of the top plates of underground buildings under truck wheel pressure.

Key words: rectangular plate; four supported edges; locally uniformly distributed load; series solution; solution accuracy

* 收稿日期:2019-11-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51478032), National Natural Science Foundation of China(51478032)

作者简介:杨成永(1966—),男,贵州遵义人,北京交通大学教授,博士

[†] 通讯联系人, E-mail: mwh.bjtu@foxmail.com

地铁、热力和燃气等地下工程中,地下构筑物的顶板多为四边支承的薄板,板上常承受局部均布荷载如汽车轮压作用.为了确定像汽车轮压这类荷载在板内产生的最大挠度和内力,需要进行任意位置局部均布荷载作用下挠度和内力的计算.

对四边支承的矩形薄板问题,可以从四边简支板的 Navier 解出发,采用叠加方法^[1-2]或加补充项的方法^[3-4]解决.如:蔡长安等^[5-6]以带附加补充项的 Fourier 级数作为挠度函数,求解了 Winkler 地基及 Pasternak 地基上自由边矩形板的弯曲问题.许琪楼等^[7-8]采用一种能满足自由角点条件的挠度表达式,解决了二邻边支承二邻边自由矩形板和二邻边及对角点支承矩形板的弯曲问题.他们还采用叠加方法^[9-10],提出了四边支承矩形板及一边固定一角点或二角点支承的矩形板的统一求解方法.岳建勇等^[11-12]采用一种双三角级数形式的挠度函数,得到了三边固定一边自由及两对边固定两对边自由矩形板的精确解.钟阳等^[13]在辛几何空间中利用分离变量法推导出了四边固支弹性矩形薄板的精确解析表达式.于天崇等^[14]假定矩形板的抗弯刚度沿板的宽度方向按照一般幂函数形式变化,研究了四边简支一对边受弯作用下面内变刚度矩形板的弯曲问题.肖闪闪等^[15]采用载荷叠加法研究了集中荷载下四边固支正交各向异性矩形板的线性弯曲,并讨论了经典 Kirchhoff 薄板假设对于集中荷载的适用性.

可以看出,目前已有的研究成果中,叠加方法应用较多.而补充项的方法公式简单,能够对各种边界条件进行统一处理.

既有研究工作存在以下不足:1) 没有直接给出局部均布荷载作用下四边支承板内力计算公式,致使工程技术人员在实践中对级数解的研究成果难以利用.2) 对级数解的收敛速度讨论不充分,不清楚究竟需要取多少项级数才能满足精度要求.3) 级数解与有限元数值解在计算精度和速度方面没有进行仔细对比.不了解两种解法在精度上能达到多高的吻合程度;不清楚级数解法的计算速度比有限元法具体快多少.

为了探讨上述问题,本文采用补充项方法进行四边支承板计算,提出了挠度及弯矩的计算公式;讨论了解法的收敛速度,并与既有文献进行了求解结果正确性的验证;最后与有限元数值结果在求解精度和计算量上进行了对比.

1 微分方程及右端荷载

采用图 1 所示的坐标系,图中 a, b 为板的长度和宽度, $m; x_0, y_0$ 为局部均布荷载中心的坐标, $m; c, d$ 为局部均布荷载的分布长度和宽度, m .

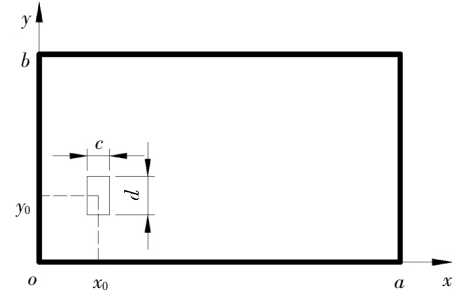


图 1 受局部均布荷载作用的矩形板

Fig.1 A rectangular plate under locally uniformly distributed load

板变形的基本微分方程为:

$$D\nabla^2\nabla^2w(x,y) = q(x,y). \quad (1)$$

式中: ∇^2 为拉普拉斯算子, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; D 为板的抗弯刚度, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; h 为板的厚度, m ; E 为板的弹性模量, kPa ; μ 为板的泊松比.

为了对公式(1)按傅里叶级数法求解,对其右端荷载 $q(x,y)$ 进行傅里叶级数展开为:

$$q(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (2)$$

对局部均布荷载,公式(2)中的傅里叶系数 q_{ij} 为(参见文献[1]第 111 页上的公式(a))^[1]:

$$q_{ij} = \frac{16q_0}{\pi^2 ij} \sin \frac{i\pi x_0}{a} \sin \frac{j\pi y_0}{b} \sin \frac{i\pi c}{2a} \sin \frac{j\pi d}{2b}, \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots$$

式中: q_0 为局部均布荷载, kPa .

2 挠度和弯矩计算

对不同支承条件下的矩形板,文献[3]给出了带补充项的挠度表达式.针对本文的四边支承矩形板,有简化的挠度表达式为:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} + \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \sin \frac{j\pi y}{b} + \frac{1}{D} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a}. \quad (4)$$

式中:

$$f_j(x) = \frac{1}{6a}(A_j - B_j)x^3 - \frac{1}{2}A_jx^2 + \frac{a}{6}(2A_j + B_j)x; \quad (5)$$

$$f_i(y) = \frac{1}{6b}(C_i - D_i)y^3 - \frac{1}{2}C_iy^2 + \frac{b}{6}(2C_i + D_i)y. \quad (6)$$

公式(4)中 w_{ij} 为挠度的傅里叶系数,按文献[3],其表达式为:

$$w_{ij} = \frac{1}{D\pi^4} \frac{1}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} \times \left[-\frac{2\pi\beta_j^2}{i}(2 + \frac{\beta_j^2}{\alpha_i^2})(A_j + (-1)^{i+1}B_j) - \frac{2\pi\alpha_i^2}{j}(2 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_j^2})(C_i + (-1)^{j+1}D_i) + q_{ij} \right]. \quad (7)$$

式中: $\alpha_i = \frac{i}{a}$; $\beta_j = \frac{j}{b}$.

公式(5)(6)及(7)中 A_j, B_j, C_i, D_i 分别为左边($x = 0$ 边,参见图1)、右边($x = a$ 边)、前边($y = 0$ 边)、后边($y = b$ 边)法向弯矩正弦级数的待定系数.4个边法向弯矩正弦级数的表达式为:

$$\begin{cases} M_x(0, y) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin \frac{j\pi y}{b}; \\ M_x(a, y) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \frac{j\pi y}{b}; \\ M_y(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin \frac{i\pi x}{a}; \\ M_y(x, b) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \sin \frac{i\pi x}{a}. \end{cases} \quad (8)$$

由公式(4),有任意点处 x 方向的弯矩为:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D\pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_i^2 + \mu\beta_j^2) w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} - \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{a}(A_j - B_j)x - A_j \right] - \mu\pi^2\beta_j^2 f_j(x) \right\} \sin \frac{j\pi y}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \pi^2\alpha_i^2 f_i(y) - \mu \left[\frac{1}{b}(C_i - D_i)y - C_i \right] \right\} \sin \frac{i\pi x}{a}. \quad (9)$$

y 方向的弯矩为:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D\pi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j^2 + \mu\alpha_i^2) w_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} -$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{b}(C_i - D_i)y - C_i \right] - \mu\pi^2\alpha_i^2 f_i(y) \right\} \sin \frac{i\pi x}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \pi^2\beta_j^2 f_j(x) - \mu \left[\frac{1}{a}(A_j - B_j)x - A_j \right] \right\} \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (10)$$

3 待定系数的确定

公式(5)~(10)中待定系数 A_j, B_j, C_i, D_i 需要根据板边的支承条件确定.由于 A_j, B_j, C_i, D_i 分别为左边、右边、前边及后边法向弯矩正弦级数的待定系数,因此当板的某边为简支边时,按公式(8)可知,相应的待定系数取为0.某边为固支时,按如下方法计算待定系数.

当板左边($x = 0$ 边)为固支时,由式(4)在 $x = 0$ 处取 w 对 x 的偏导数:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\pi}{a} w_{ij} \sin \frac{j\pi y}{b} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{a}{6D}(2A_j + B_j) \right] \sin \frac{j\pi y}{b} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\pi}{Da} f_i(y). \quad (11)$$

把式(6)中的 y, y^2, y^3 也展成正弦级数:

$$y = \frac{2b}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (12)$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} \left[(-1)^j \left(\frac{2}{j^3} - \frac{\pi^2}{j} \right) - \frac{2}{j^3} \right] \sin \frac{j\pi y}{b}, \quad (13)$$

$$y^3 = \frac{2}{\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j b^3 \left(\frac{6}{j^3} - \frac{\pi^2}{j} \right) \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (14)$$

把式(12)(13)(14)代入式(6)再代入式(11)有:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\pi}{a} w_{ij} + \frac{a}{6D}(2A_j + B_j) + \frac{2b^2}{D\pi^3 j^3} \sum_{i=1}^{\infty} (C_i + (-1)^{i+1}D_i) \frac{i\pi}{a} \right] \sin \frac{j\pi y}{b}. \quad (15)$$

固支边处板的倾角为0.令式(15)右端为0有:

$$\frac{\pi}{a} \sum_{i=1}^{\infty} i w_{ij} + \frac{a}{6D}(2A_j + B_j) + \frac{2b^2}{D\pi^2 j^3 a} \sum_{i=1}^{\infty} i (C_i + (-1)^{i+1}D_i) = 0. \quad (16)$$

把式(7)代入式(16),最终得关于待定系数 A_j 的方程为:

$$\begin{aligned} \frac{a}{6}(2A_j + B_j) - \frac{2\beta_j^2}{\pi^2 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (2 + \frac{\beta_j^2}{\alpha_i^2})(A_j + (-1)^{i+1}B_j) + \\ \frac{2j}{\pi^2 ab^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (C_i + (-1)^{i+1}D_i) + \frac{1}{\pi^3 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} q_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

同理,当板右边、前边和后边为固支边时,有关于待定系数 B_j 、 C_i 及 D_i 的方程分别为:

$$\begin{aligned} \frac{b}{6}(2C_i + D_i) - \frac{2\alpha_i^2}{\pi^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (2 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_j^2})(C_i + (-1)^{j+1}D_i) + \\ \frac{2i}{\pi^2 a^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (A_j + (-1)^{j+1}B_j) + \frac{1}{\pi^3 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} q_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -\frac{a}{6}(A_j + 2B_j) - \frac{2\beta_j^2}{\pi^2 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (2 + \frac{\beta_j^2}{\alpha_i^2})(A_j + (-1)^{i+1}B_j) + \\ \frac{2j}{\pi^2 ab^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (C_i + (-1)^{i+1}D_i) + \frac{1}{\pi^3 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i i}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} q_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\frac{b}{6}(C_i + 2D_i) - \frac{2\alpha_i^2}{\pi^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (2 + \frac{\alpha_i^2}{\beta_j^2})(C_i + (-1)^{j+1}D_i) + \\ \frac{2i}{\pi^2 a^2 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} (A_j + (-1)^{j+1}B_j) + \frac{1}{\pi^3 b} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j}{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2} q_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

在利用公式(17)~(20)确定待定系数 A_j 、 B_j 、 C_i 、 D_i 时,若某一边、某二边甚至某三边为简支,则舍弃相应的方程,留下剩余的方程组成方程组解出待定系数.以板左边及前边固支其余两边简支为例,此时由于右边和后边简支,故待定系数 $B_j = D_i = 0$;舍弃公式(18)及(20)所列方程,剩下公式(17)及(19)所列方程组成方程组,并且在留下的方程中,置 B_j 及 D_i 为 0,进而解出左边及前边两个固支边的待定系数 A_j 和 C_i 即可.

4 计算与分析

4.1 计算步骤

采用本文公式计算四边支承板挠度和弯矩的步骤如下:

1)若板的四边全为简支边,则取 $A_j = B_j = C_i = D_i = 0$.若板存有固支边,则从公式(17)~(20)中选择相应的公式组成方程组,计算待定系数 A_j 、 B_j 、 C_i 或 D_i .

2)确定系数 A_j 、 B_j 、 C_i 及 D_i 后,按公式(7)计算挠度的傅里叶系数 w_{ij} .

3)最后,按公式(4)计算挠度,按公式(9)及(10)计算弯矩.

本文后续计算中,线性方程组的求解采用克劳特(Crout)分解法.计算程序采用 C 语言编写,程序

中实型变量采用双精度.

4.2 计算参数

取板沿 x 方向长度 $a = 5$ m, y 方向长度 $b = 7$ m,厚 $h = 0.1$ m;板弹性模量 $E = 3 \times 10^7$ kPa,泊松比 $\mu = 0.3$;荷载按公路桥涵设计通用规范(JTG D60—2015)取一个汽车轮压传递到板上形成的局部均布荷载.轴重取 120 kN,单轮地面分布尺寸 0.6 m \times 0.2 m,轮压扩散角 35° ,板埋深 0.714 m.由此得作用在板上的局部均布荷载 $q_0 = 31.25$ kPa,荷载 x 方向分布长度 $c = 1.6$ m, y 方向分布长度 $d = 1.2$ m;荷载中心坐标 $x_0 = 2.5$ m, $y_0 = 3.5$ m.

4.3 收敛速度的讨论

采用 4.2 节的计算参数,板四边均固支,取级数项数为 5 项、10 项、20 项、30 项、40 项、50 项、60 项及 80 项,计算结果列于表 1.

表 1 及后续表格中,“板中心挠度”“板中心 x 方向弯矩”“板中心 y 方向弯矩”“长边中点 x 方向弯矩”分别为无量纲量 $\frac{D \cdot w(a/2, b/2)}{q_0 a^4}$ 、 $\frac{M_x(a/2, b/2)}{q_0 a^2}$ 、 $\frac{M_y(a/2, b/2)}{q_0 a^2}$ 、 $\frac{M_x(0, b/2)}{q_0 a^2}$.

从表 1 看出,30 项后,挠度计算结果的前 5 位有效数字不再发生变化;40 项后,弯矩计算结果的前 4 位有效数字不再发生变化.因此可得出,40 项时,级

数已可视为收敛. 后续计算中采用 40 项级数的计算结果.

表 1 不同级数项数的计算结果

Tab.1 Computed results by different number of series terms

级数项数	板中心挠度	板中心 x 方向弯矩	长边中点 x 方向弯矩
5	0.000 446 764 57	0.010 943 83	-0.011 643 38
10	0.000 448 793 36	0.010 940 70	-0.011 801 53
20	0.000 448 265 66	0.010 867 15	-0.011 865 51
30	0.000 448 249 79	0.010 863 94	-0.011 867 76
40	0.000 448 247 01	0.010 861 50	-0.011 867 10
50	0.000 448 243 84	0.010 860 25	-0.011 868 08
60	0.000 448 243 19	0.010 860 21	-0.011 867 75
80	0.000 448 242 49	0.010 860 24	-0.011 867 89

4.4 计算结果与既有文献对比

4.4.1 与文献[1]对比

文献[1]中有四边固支板受满布均布荷载作用的计算结果. 为与之对比, 采用 4.2 节的计算参数, 板四边均固支, 荷载改为满布, 荷载强度不变, 仍为 $q_0 = 31.25 \text{ kPa}$. 计算结果列于表 2.

表 2 与文献[1]计算结果对比

Tab.2 Comparison of computed results with that in reference[1]

计算方法	板中心挠度	板中心 x 方向弯矩	长边中点 x 方向弯矩
文献[1]结果	0.002 07	0.034 9	-0.072 6
本文结果	0.002 068 2	0.034 972	-0.072 595

由表 2 看出, 2 种方法的结果前 2 位有效数字相同. 由于文献[1]表格的有效数字只有 3 位, 可以认为表 2 中 2 种结果是一致的.

4.4.2 与文献[16]对比

文献[16]列出了四边简支板中央受局部均布荷载作用时弯矩的计算系数. 为与其对比并避免查表计算中的插值, 取泊松比 $\mu = 0$, 轮压 x 方向分布长度 $c = 2 \text{ m}$, y 方向分布长度 $d = 1 \text{ m}$, 其余参数采用 4.2 节的数据, 板四边均简支.

根据 $\frac{b}{a} = \frac{7}{5} = 1.4$, $\frac{c}{a} = \frac{2}{5} = 0.4$, $\frac{d}{a} = \frac{1}{5} = 0.2$, 按文献[16]中表 4-29 查得计算弯矩 M_x 的系数为 0.148 0, M_y 的系数为 0.130 8. 然后有

$$\frac{M_x}{q_0 a^2} = \frac{0.148 0 q_0 c d}{q_0 a^2} = 0.011 840,$$

$$\frac{M_y}{q_0 a^2} = \frac{0.130 8 q_0 c d}{q_0 a^2} = 0.010 464.$$

计算结果列于表 3.

表 3 与文献[16]计算结果对比

Tab.3 Comparison of computed results with that in reference [16]

计算方法	板中心 x 方向弯矩	板中心 y 方向弯矩
文献[16]结果	0.011 840	0.010 464
本文结果	0.011 836	0.010 467

由表 3 看出, 两种方法的结果, 前 3 位有效数字相同. 由于文献[16]表格的有效数字是 4 位, 可以认为表 3 中两种结果是一致的.

4.5 计算结果与有限元对比

采用 4.2 节的计算参数, 板左边 ($x = 0$ 边) 及前边 ($y = 0$ 边) 固支, 其余两边简支. 按相同的参数和边界条件采用 ANSYS 软件 SHELL63 号单元, 划分 3 种粗细不同网格进行计算. 计算结果列于表 4.

表 4 与有限元计算结果对比

Tab.4 Comparison of computed results with that by FEM

计算方法	软件运行 所用时间/s	板中心挠度	板中心 x 方向弯矩	长边中点 x 方向弯矩
有限元, 网格 0.1 m	1	0.000 627 064 97	0.012 141 91	-0.014 753 82
有限元, 网格 0.01 m	58	0.000 627 439 04	0.012 204 96	-0.014 818 49
有限元, 网格 0.005 m	971	0.000 627 440 99	0.012 205 39	-0.014 818 94
本文结果	0.001	0.000 627 447 99	0.012 205 45	-0.014 818 37

由表 4 可看出:

1) 随有限元网格的加密, 计算结果逐渐趋于本文的级数解. 由此可说明, 本文级数解是四边支承板变形问题的理论解或精确解. 当有限元网格细到 $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 时, 挠度及弯矩有 5 位有效数字与级数解相同. 可以认为这时数值解与级数解基本一致.

2) 表 4 中的软件运行所用时间是从数据输入到输出全部的计算机运行时间. 要达到较高的精度, 有限元需要花费的计算机时间大大高于级数解. 就本算例来说, 相差达 10 万倍以上. 需要注意的是, 本算例中, 有限元在 $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$ 网格时, 需要求解的方程组的阶数, 不少于 $(x \text{ 方向节点数 } 5/0.005) \times (y \text{ 方向节点数 } 7/0.005) \times 6 \text{ 个自由度} = 840 \text{ 万}$; 而级数解取 40 项时需要求解的方程组的阶数仅为 $40 \times 2 \text{ 个固支边} = 80$.

5 结束语

采用带补充项的挠度函数,研究了四边支承矩形薄板的弯曲问题.给出了局部均布荷载作用下简支边和固支边不同组合条件下的统一计算公式.

对比计算表明,以 Navier 解为基础带补充项的傅里叶级数解,达到收敛的级数项数约为 40 项.该级数解与其他采用叠加法得到的傅里叶级数解,具有同样的求解精度.与有限元数值法相比,级数解的计算量十分微小.

值得一提的是,式(3)若换成满布荷载、线荷载和集中力相应的傅里叶系数,本文方法也适用.

参考文献

- [1] TIMOSHENKO S, WOINOSKY-KRIEGER S. Theory of plates and shells [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959: 180—228.
- [2] 张福范. 弹性薄板[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 1984: 58—62.
ZHANG F F. Elastic thin plates [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1984: 58—62. (In Chinese)
- [3] 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1989: 150—197.
YAN Z D. Fourier series solutions in structural mechanics [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1989: 150—197. (In Chinese)
- [4] 杨端生, 黄炎. 矩形板结构的弯曲问题[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2004, 31(6): 65—69.
YANG D S, HUANG Y. The problem of bending of rectangular plate structure [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2004, 31(6): 65—69. (In Chinese)
- [5] 蔡长安, 严宗达. Winkler 地基上自由边矩形板横向弯曲的 Fourier 级数解[J]. 贵州工学院学报, 1996, 25(2): 53—61.
CAI C A, YAN Z D. Fourier series solution for bending problem of the rectangular plates with free edges on Winkler foundation [J]. Journal of Guizhou Institute of Technology, 1996, 25(2): 53—61. (In Chinese)
- [6] 蔡长安. Pasternak 地基上自由边矩形板弯曲问题的 Fourier 级数解[J]. 贵州工业大学学报, 1998, 27(1): 21—31.
CAI C A. Fourier series solution for bending problem of the rectangular plates with free edges on Pasternak foundation [J]. Journal of Guizhou University of Technology, 1998, 27(1): 21—31. (In Chinese)
- [7] 许琪楼, 姬同庚. 二邻边支承其余边自由的矩形板在均布荷载作用下的弯曲解[J]. 土木工程学报, 1995, 28(3): 32—41.
XU Q L, JI T G. Bending solutions of rectangular plate with two adjacent supported edges and two free edges subjected to uniform load [J]. China Civil Engineering Journal, 1995, 28(3): 32—41. (In Chinese)
- [8] 许琪楼, 姜锐, 唐国明. 二邻边支承二邻边自由的矩形板弯曲统一求解方法 [J]. 东南大学学报(自然科学版), 2000, 30(2): 138—142.
XU Q L, JIANG R, TANG G M. Unified solution method of rectangular plate bending with two adjacent supported edges and two free edges [J]. Journal of Southeast University (Natural Science Edition), 2000, 30(2): 138—142. (In Chinese)
- [9] 许琪楼, 姜锐, 唐国明, 等. 四边支承矩形板弯曲统一求解方法——兼论纳维叶解与李维解法的统一性 [J]. 工程力学, 1999, 16(3): 90—99.
XU Q L, JIANG R, TANG G M, et al. Unified solution method on rectangular plate bending with four edges supported [J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(3): 90—99. (In Chinese)
- [10] 许琪楼, 姜锐, 唐国明, 等. 一边固定一角点或二角点支承的矩形板弯曲统一求解方法 [J]. 计算力学学报, 1999, 16(2): 210—215.
XU Q L, JIANG R, TANG G M, et al. Unified solution method on rectangular plate bending with one edge built-in and one or two corner point supported [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(2): 210—215. (In Chinese)
- [11] 岳建勇, 曲庆璋. 三边固定一边自由矩形板的精确解[J]. 青岛建筑工程学院学报, 1999, 20(1): 16—21.
YUE J Y, QU Q Z. The precise solution of rectangular plate with three edges built in and the fourth edge free [J]. Journal of Qingdao Institute of Architecture and Engineering, 1999, 20(1): 16—21. (In Chinese)
- [12] 岳建勇, 曲庆璋. 两对边固定两对边自由矩形板的精确解[J]. 青岛建筑工程学院学报, 2000, 21(2): 12—17.
YUE J Y, QU Q Z. Exact solution of rectangular thin plate with two opposite edges clamped and the other two edges free [J]. Journal of Qingdao Institute of Architecture and Engineering, 2000, 21(2): 12—17. (In Chinese)
- [13] 钟阳, 李锐, 刘月梅. 四边固支矩形弹性薄板的精确解析解[J]. 力学季刊, 2009, 30(2): 297—303.
ZHONG Y, LI R, LIU Y M. Exact analytic solution of rectangular thin plate with four edges clamped [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2009, 30(2): 297—303. (In Chinese)
- [14] 于天崇, 聂国隽, 仲政. 变刚度矩形板弯曲问题的 Levy 解[J]. 力学季刊, 2012, 33(1): 53—59.
YU T C, NIE G J, ZHONG Z. Levy-type solution for the bending of rectangular plates with variable stiffness [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2012, 33(1): 53—59. (In Chinese)
- [15] 肖闪闪, 陈普会. 集中荷载下四边固支正交各向异性矩形板的线性弯曲问题[J]. 工程力学, 2015, 32(6): 28—32.
XIAO S S, CHEN P H. Analytical solutions for bending of clamped orthotropic rectangular plates under a concentrated force [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(6): 28—32. (In Chinese)
- [16] 《建筑结构静力计算手册》编写组. 建筑结构静力计算手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1998: 227—228.
Working Group of Handbook of Building Structural Statics. Handbook of building structural statics [M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1998: 227—228. (In Chinese)