

## 蜂窝系统导频的一种小尺度复用方法

高翟<sup>1</sup>, ZHU Xu (Judy)<sup>2</sup>, 杨敏<sup>1†</sup>, 王巍<sup>1</sup>, 周群群<sup>1</sup>

(1. 中国地质大学 机械与电子信息学院, 湖北 武汉 430074;

2. 利物浦大学 电气与电子工程学院, 英国 利物浦 L693BX)

**摘要:**随着 5G 商用时代的来临, 移动通信的用户和业务量持续呈现迅猛增长的态势, 导频资源的发掘量却相对极其有限. 针对大多数场景中导频稀缺、利用率亟待提高的需求, 以传统的大尺度复用为基础提出一种小尺度复用方法, 将小区划分为若干环区; 同时打破同一小区内复用因子一致的限制, 依照不同环区的覆盖为用户分配不同的复用因子. 为降低干扰的负面影响, 小区边缘用户比小区中心用户拥有更低的复用因子, 而小区中心用户的高程度复用则有效地节省了导频资源. 小尺度的导频分配机制虽然比大尺度复杂, 但它能更科学地平衡不同用户的通信质量和系统的导频消耗, 也能根据用户量更细致地调整导频复用的程度. 仿真结果表明, 小尺度复用充分利用了各复用因子的特性, 随用户的增减进行自适应的环区调整和复用因子重配, 有效改善了导频复用的效果. 仿真中体现的部分系统配置或外在因素对通信指标的影响, 为小尺度复用提供了实际应用方面的参考.

**关键词:**移动通信; 导频; 小尺度复用; 环区; 复用因子

**中图分类号:** TN92

**文献标志码:** A

## A Method of Small-scale Pilot Reuse in Cellular Systems

GAO Di<sup>1</sup>, ZHU Xu (Judy)<sup>2</sup>, YANG Min<sup>1†</sup>, WANG Wei<sup>1</sup>, ZHOU Qunqun<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering and Electronic Information, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China;

2. Department of Electrical Engineering & Electronics, University of Liverpool, Liverpool L69 3BX, United Kingdom)

**Abstract:** Users and traffics of mobile communication is growing rapidly along with the application of 5G, but pilot resources are still restricted to limited ranges, which leads to the scarcity of pilots in cellular mobile communications. Under the urgent requirement of higher efficiency on pilot utilisation, a small-scale method based on the classical large-scale strategy is proposed. This method divides a cell into several regions in shape of rings, and diversifies the reuse factor to multiple values in a cell. Every user is allocated to a specified reuse factor according to its attached ring. To decrease the effect of interference, users near the edge of a cell have smaller reuse factors than those in the central region, whose higher degrees of reuse save the occupancy of pilot resources. Although the distribution of small-scale strategy is more complex than that of large-scale way, it has better performance on balancing the communication quality and pilot consumptions in a system. Meanwhile, it offers more precise adjustments on the extent of

\* 收稿日期:2020-01-09

基金项目:国家留学基金管理委员会资助项目(201506415036), National Foundation of China Scholarship Council(201506415036); 湖北省自然科学基金资助项目(2017CFC870), Natural Science Foundation of Hubei Province (2017CFC870)

作者简介:高翟(1983—),男,湖北武汉人,中国地质大学讲师,博士

† 通讯联系人, E-mail: mimi10@126.com

reuse. The simulation results verify the improvement on pilot reuse, utilising distinct factors and adjusting coverages of rings adaptively according to the number of terminals. Influences of some system configurations and extrinsic factors obtained from the simulation provide references for the implementations of small-scale reuses.

**Key words:** mobile communication; pilot; small-scale reuse; ring; reuse factor

在蜂窝系统中,为了解决导频资源严重不足的问题,一般按照一定规则将导频重复利用,并在此基础上形成若干导频复用指标<sup>[1]</sup>.传统的复用方式以小区为最小复用单元,单小区内的各导频的复用程度、方式均一致;如果将小区的规模视为大尺度,则形成一种导频的大尺度复用.由于蜂窝在服务区平面内一般整齐均匀地排布,复用导频的小区亦间隔均匀地出现,这在用户量适中、分布均匀的情况下确是一种行之有效的办法.不过随着用户量的迅速增大,大尺度复用越来越难以满足系统对导频资源的需求了.面对这一现状有三种改进方案:一是添加新的导频资源,二是进一步提高大尺度复用程度,三是对小区内的导频分配不同的复用模式.

第一种方案难以施行,因为适用于无线传输的导频资源本就极其受限,想要挖掘出新的资源非常困难<sup>[2]</sup>.第二种方案也不太现实,因为现有的蜂窝系统已经尽可能地提高导频大尺度复用程度了;如果复用因子进一步增大,那么用户通信质量的下降足以抵消用户容量的优势<sup>[3]</sup>.基于以上两点,本文从第三种方案入手,将小区内的导频资源区别对待,赋予不同的复用指标.由于这种方案的复用单元已然小于单个小区,分配尺度明显缩小,故而称之为导频的小尺度复用.

既然导频复用的单位尺度小于小区,那么在一个小区内就可能分配有多种复用因子.第一种分配法以用户为基准,不论用户在小区内位置如何,其复用因子保持不变.这种方法对小区边缘用户不利,特别是高复用因子的用户信干噪比很低<sup>[4]</sup>.第二种方法以时间为参考<sup>[5]</sup>,这种方法面对用户流动有优势,但需要预知各用户在小区内的位置变化,所以需要大量先验信息,实施难度很大.第三种方法以空间为参考,把区域和复用程度对应起来;用户处于小区的哪个区域范围内,就分配哪一类复用因子;这种方法既保障通信性能,又具有高度的可行性,是本文讨论的重点.

本文的内容安排如下:首先将导频复用表示为

对应的三叉树和状态数组形式以便于仿真计算;接着介绍小尺度复用的机制,给出其理论上的支持用户量、信干噪比等指标;然后通过仿真得出导频复用(包含大尺度复用和小尺度复用)的性能数据和图像,印证小尺度复用的可行性及性能优势;最后对全文内容作出总结.

## 1 三叉树和状态数组表示法

二叉树作为一种常见的数据结构广泛应用于工程领域的状态描述、数据处理等方面,如计算机存储空间的分配、机械零件的整理和组装等<sup>[6]</sup>.三叉树的概念源自二叉树,它们的性质有很多相似之处.这里使用三叉树而非二叉树来表示导频复用状态,是由蜂窝结构的特性所决定的.蜂窝移动通信系统在大尺度复用模式下,单个小区内的导频复用程度相同,即导频复用因子一致.如果要求对小区内的任何用户而言,本小区的接收功率至少大于来自复用基站的接收功率,那么存在共同边界的相邻小区不允许复用相同的导频;这就要求区群数不小于3,即复用因子.设可用的导频资源量为 $F$ ;在区群数等于3时,每个小区获得的导频资源,该情形可用一个三叉树表示<sup>[7]</sup>.三叉树的一行对应一个复用因子<sup>[8]</sup>,如图1所示.

当导频足够充裕时,复用因子可进一步降低.如果最初的 $f_1 = \frac{1}{3}$ ,那么降低后的复用因子可以是 $f_1$ 的自然次幂,于是小区中可能存在的复用因子为:

$$f_n = f_1^n = \frac{1}{3^n}, n \in N \quad (1)$$

该形式仍可用三叉树来表示.如果加入根节点的一层,三叉树的深度为 $n+1$ .图2显示出所有小区复用因子都等于 $\frac{1}{9}$ 的情况,每个小区获得 $\frac{F}{9}$ 的导频资源.

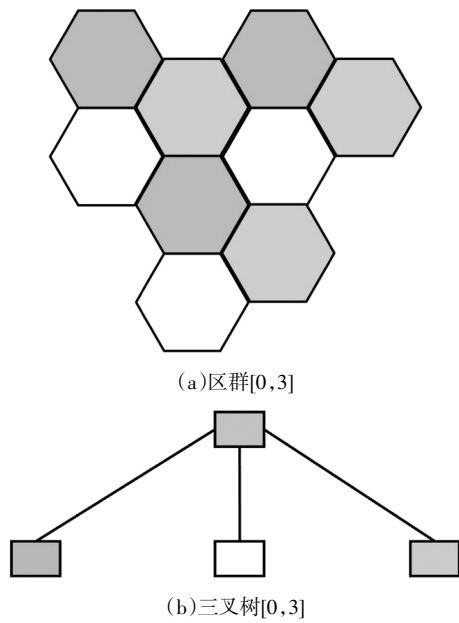


图 1 三小区区群及其三叉树  
(灰度用于区分不同的导频资源)

Fig.1 Cluster and ternary tree of three cells  
(gray scale varies for distinct pilot resources)

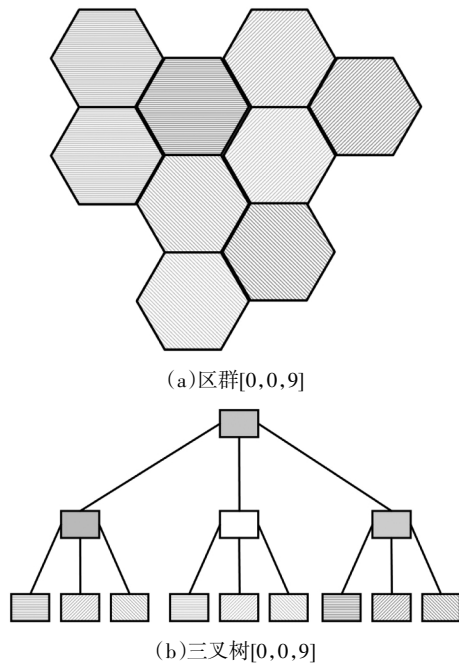


图 2 九小区区群及其三叉树(灰色和纹理均用于区分不同的导频资源)

Fig.2 Cluster and ternary tree of nine cells  
(gray scale and texture vary for distinct pilot resources)

从图 1 和图 2 可知,当各小区复用因子一致时,对应三叉树的所有叶节点都集中于最下层,对于这种特殊的三叉树我们作出如下定义.

**定义 1** 所有叶节点位于同一层且所有非叶节点的度均为 3 的三叉树称为完美三叉树(perfect ternary tree).

图 1(b)、图 2(b)中的三叉树都是完美三叉树.不同深度的完美三叉树之间存在三叉树进化的过渡情形,例如一部分小区采用 $\frac{1}{3}$ 导频复用,另一部分采用 $\frac{1}{9}$ 导频复用,如图 3 所示.

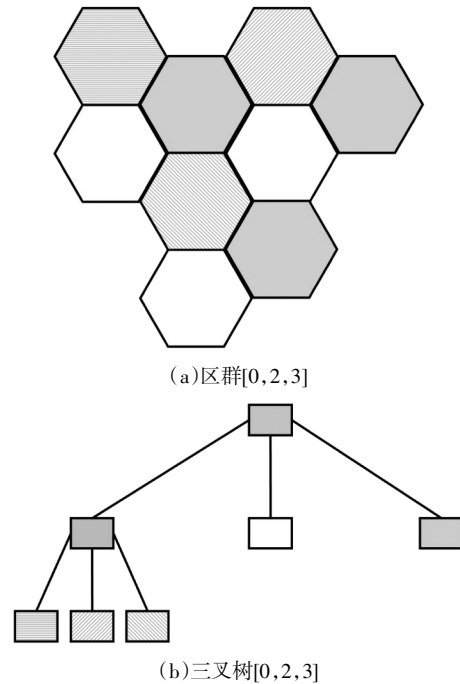


图 3 一种过渡区群及其三叉树(灰度和纹理均用于区分不同的导频资源)

Fig.3 A transitional cluster and its ternary tree  
(gray scale and texture vary for distinct pilot resources)

复用因子不一致使得对应三叉树的叶节点分布于不同的层,这样的三叉树不再是完美三叉树.对蜂窝小区而言,如果某个小区的复用因子降低一级,为保证导频资源的利用率,复用相同导频集的其他小区复用因子也同样降低一级.这一性质在三叉树上表现为,对树中任何一个节点而言,如果它不是叶节点,那么它的子节点数目必为最大值 3.对于这种特殊的三叉树我们作出如下定义.

**定义 2** 所有节点的度均为 0 或 3 的三叉树称为完满三叉树(full ternary tree).

另一方面,过渡区群中每一个小区的复用因子一定是过渡的两因子之一;换言之,区群中不存在三个或三个以上的复用因子,且两个复用因子相邻.例

如,如果区群的复用因子在  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{9}$  之间过渡,则不会出现某个小区有  $\frac{1}{27}$  复用的情况. 这一规律在三叉树上体现为叶节点集中于最下两层. 如果把所有节点按层数依次编号, 这种三叉树的每个节点与完美三叉树对应位置的节点编号均相同. 对于这种特殊的三叉树我们作出如下定义.

**定义 3** 每一个节点的编号都与相同深度的完满三叉树节点编号相等的三叉树称为完全三叉树 (complete ternary tree).

根据定义 2 和定义 3 容易看出, 完美三叉树既是一种完满三叉树, 又是一种完全三叉树, 它们之间的关系如图 4 所示. 另一方面, “所有的完满 (完全) 三叉树都是完全 (完满) 三叉树” 是假命题, 其反例如图 5(a)(b) 所示.

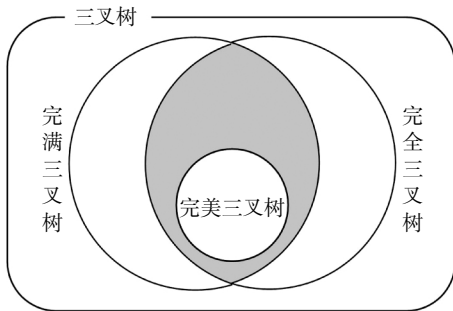


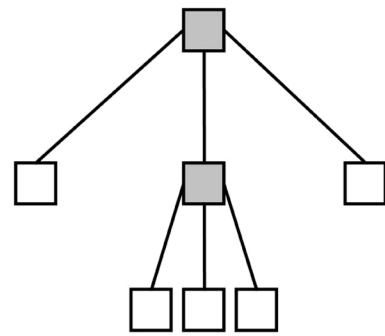
图 4 几种特殊三叉树的包含关系

Fig.4 Relationship among some special types of ternary

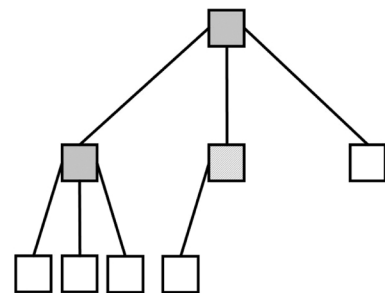
大尺度复用对应的三叉树的特殊性在于, 它既是完满三叉树, 又是完全三叉树, 但不一定是完美三叉树. 此类非完美三叉树的集合对应图 4 中的阴影区域, 示例见图 5(c).

虽然蜂窝小区的导频复用状态和三叉树能很好地对应, 但过渡状态的存在使三叉树的表述依然较复杂; 因此本文将三叉树再与一个状态数组相对应. 数组的每一个元素位置对应树的每一层, 元素值表示对应层的叶节点数, 数组的维度对应树的总层数. 本文将这种数组命名为状态数组, 它的元素从左至右顺次对应树的最上层 (根节点) 至最下层. 这样一来导频复用状态以三叉树为媒介转化为一个状态数组来表达, 更简单明晰. 图 1 至图 3 分图标题中的数组均为状态数组.

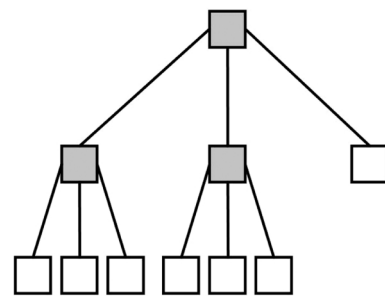
为保证使用相同导频集的小区 (以下简称同导小区) 的分布规则化, 每个区群包含小区数目  $K$  的值域并不是全体自然数集, 它取值的合理性服从以下定理:



(a) 完满非完全三叉树



(b) 完全非完满三叉树[0, 1, 4]



(c) 完满完全非完美三叉树[0, 1, 6]

图 5 部分特殊的三叉树示例

Fig.5 Examples of special ternary trees

**定理 1** 设每个区群由  $K$  个小区组成, 则  $K$  必然能表达为  $i^2 + ij + j^2$  的形式, 其中  $i, j$  为非负整数且不同时为零.

根据前文所述, 本文讨论的大尺度复用因子  $f_n$  为  $\frac{1}{3}$  的自然次幂, 为了说明  $f_n$  对应区群的合理性, 这里给出另一个定理:

**定理 2** 令  $K$  的值域为  $R_k$ , 定义集合  $B = \{b | b = 3^n, n \in N\}$ , 则有  $B \subset R_k$ .

定理 2 的证明见附录, 它表明 3 的任意整次幂值都是合理的区群规模.

## 2 小尺度复用机制

前面提到, 小尺度复用不再遵循小区内复用因子统一的规则, 不同因子的用户在小区中以空间位

置为参考进行划分比较现实. 从小区中心基站的位置来看, 整个小区置于一个平面极坐标系下, 极点为小区中心的基站, 极轴方向人为设定. 对极坐标平面而言, 最简单的划分方式有两种: 第一种以极角为依据<sup>[9]</sup>, 将小区划分为若干扇区, 如图 6 中虚线所示. 此方式有两个弊端, 一是受限于有向天线波束成形的指标, 扇区数目一般保持稳定, 不会有大的起伏, 故而应对用户量波动的能力有限; 二是小区内中心用户与边缘用户的通信质量原本就有很大差异, 而单个扇区内两类用户仍然共存, 假如强行统一扇区内用户的复用因子, 则要么减小了中心用户导频的利用率, 要么降低了边缘用户的通信质量.

第二种划分方式以极径为依据<sup>[10]</sup>, 将小区划分为若干环区, 如图 6 中实线所示. 单个环区内的用户与本小区基站的距离大致相当, 这就十分有利于以环区为单元统一复用因子. 只要能获得距离信息, 环区划分就具有可操作性; 并且由于圆环覆盖了全部极角, 有向天线的波束形状不会直接影响环区的划分密度<sup>[11]</sup>.

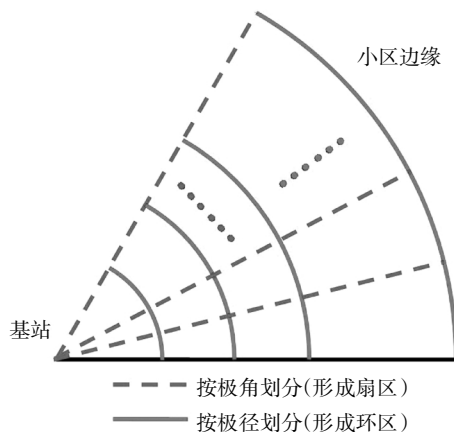


图 6 小区内部的两种划分方式  
Fig.6 Two schemes of division inside a cell

### 2.1 支持用户量

为了更高效地利用导频, 环区的划分随用户量的变化而改变. 假设用户在各小区里大致均匀分布且流动性不高, 则可先以一个大尺度复用作为初始状态, 如图 7(a)所示. 已知可用的导频总量为  $F$ , 单小区包含最低用户接入量为  $U$ , 其取值区间为  $(0, F]$ , 则理论上可用的最小复用因子为  $\frac{U}{F}$ . 但小区内使用的复用因子需要满足式(1)中  $f_n$  的形式, 所以取小区的初始复用因子为不小于  $\frac{U}{F}$  的最小  $f_n$  值, 记为  $C_f(\frac{U}{F})$ . 这也就意味着小区内可能出现的复用因子

数目最多为

$$N_f = 1 + \log_{\frac{1}{3}} C_f\left(\frac{U}{F}\right) \quad (2)$$

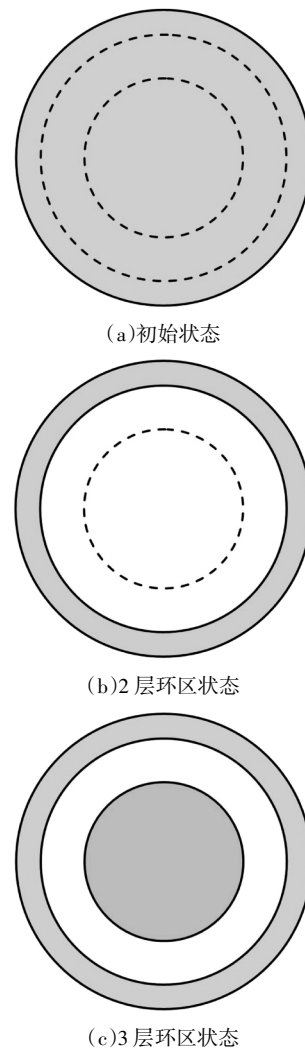


图 7 环区划分的进程(灰度用于区分不同的导频资源)

Fig.7 Process of division by rings  
(gray scale varies for distinct pilot resources)

在大尺度复用机制下, 用户的增加会抬升小区内统一的复用因子. 具体来说, 当单小区内用户量超过  $U_1 = F \cdot C_f(\frac{U}{F})$  时, 复用因子将自  $C_f(\frac{U}{F})$  升至  $3C_f(\frac{U}{F})$ , 相应能支持的用户上限为  $U_2 = F \cdot 3C_f(\frac{U}{F})$ ; 当单小区用户量超过  $U_2$  时, 复用因子又从  $3C_f(\frac{U}{F})$  升至  $9C_f(\frac{U}{F})$ , 相应能支持的用户上限为  $U_3 = F \cdot 9C_f(\frac{U}{F})$ . 以此类推, 令

$$U_{i\alpha} = F \cdot 3^{\alpha-1} C_f \left( \frac{U}{F} \right), \alpha \in \{1, 2, \dots, N_f\} \quad (3)$$

是小区内复用因子为  $3^{\alpha-1} C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  时的用户上限;当单小区用户量超过  $U_{i\alpha}$  时,复用因子从  $3^{\alpha-1} C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  升至  $3^\alpha C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ,相应能支持的用户上限为  $U_{i(\alpha+1)} = 3U_{i\alpha}$ .  $U_{i\alpha}$  在  $\alpha = N_f$  时取得最大值

$$U_{i,\max} = U_{iN_f} = F \cdot 3^{N_f-1} C_f \left( \frac{U}{F} \right) \quad (4)$$

结合式(2)有

$$U_{i,\max} = F \cdot 3^{\log_{\frac{1}{3}} C_f \left( \frac{U}{F} \right)} C_f \left( \frac{U}{F} \right) = F \quad (5)$$

换言之,当小区内所有用户的复用因子都增至最大值 1 时,单小区的支持用户量等于可用的导频资源量,与预期相符.

但若采用小尺度复用,随着用户的增加,小区内的复用因子将出现异化.具体来说,当单小区内用户量超过  $U_{m1} = F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  时,单一的  $C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  复用已不能满足用户需求,此时内部区域出现  $3C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  复用因子.令  $R$  为小区半径,为了在用户达到最多时各复用因子覆盖的面积相当,  $3C_f \left( \frac{U}{F} \right)$  复用因子覆盖的半径为  $r_2 = R \sqrt{1 - \frac{1}{N_f}}$ ,如图 7(b)所示.

下面计算图 7(b)的复用形式能支持的用户量,当小区用户量达到最大值  $U_{m2}$  时,外层用户量为  $U_{m2} \cdot \frac{1}{N_f}$ ,占用导频资源  $\frac{U_{m2}}{C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f}$ ;内层用户量为

$$U_{m2} = \frac{N_f - 1}{N_f}, \text{ 占用导频资源 } \frac{U_{m2}}{3C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{N_f - 1}{N_f}. \text{ 根据}$$

二者占用的导频量之和等于总导频量,列出方程

$$F = \frac{U_{m2}}{C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \frac{U_{m2}}{3C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{N_f - 1}{N_f} \quad (6)$$

由此求得

$$U_{m2} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)}{\frac{1}{N_f} + \frac{N_f - 1}{3N_f}} \quad (7)$$

接下来,当小区用户量超过  $U_{m2}$  时,外层覆盖保持不变,内层划分为次内层和最内层,如图 7(c)所示.次

内层环区保留原内层的复用因子  $3C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ;而划分后最内层的复用因子增至  $9C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ,覆盖半径为  $r_3 = R \sqrt{1 - \frac{2}{N_f}}$ .所以类似地,当小区用户量达到最大值  $U_{m3}$  时,根据三者占用的导频量之和等于总导频量,列出方程:

$$F = \frac{U_{m3}}{C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \frac{U_{m3}}{3C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \frac{U_{m3}}{9C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{N_f - 2}{N_f} \quad (8)$$

由此求得:

$$U_{m3} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)}{\frac{1}{N_f} + \frac{1}{3N_f} + \frac{N_f - 2}{9N_f}} \quad (9)$$

以此类推,每次新的划分都将原最内层分为次内层和新最内层;次内层继承原最内层的复用因子,新最内层的复用因子则扩大 3 倍.换言之,当小区内被划分为  $\alpha$  个区域时( $\alpha \in \{1, 2, \dots, N_f\}$ ),小区最内层的复用因子达到  $3^{\alpha-1} C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ,最内层半径  $r_\alpha = R \sqrt{1 - \frac{\alpha - 1}{N_f}}$ .根据各区域占用的导频量之和等于总导频量,列出方程:

$$F = \frac{U_{m\alpha}}{C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \frac{U_{m\alpha}}{3C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \frac{U_{m\alpha}}{9C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{1}{N_f} + \dots + \frac{U_{m\alpha}}{3^\alpha C_f \left( \frac{U}{F} \right)} \cdot \frac{N_f - \alpha + 1}{N_f} \quad (10)$$

由此求得对应的支持用户量

$$U_{m\alpha} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)}{\frac{1}{N_f} + \frac{1}{3N_f} + \frac{1}{9N_f} + \dots + \frac{N_f - \alpha + 1}{3^{\alpha-1} N_f}} \quad (11)$$

即

$$U_{m\alpha} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)}{\sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{1}{3^{i-1} N_f} + \frac{N_f - \alpha + 1}{3^{\alpha-1} N_f}}, \alpha \in \{1, 2, \dots, N_f\} \quad (12)$$

$U_{m\alpha}$  在  $\alpha = N_f$  时取得最大值

$$U_{m,\max} = U_{mN_f} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right)}{\sum_{i=1}^{N_f-1} \frac{1}{3^{i-1} N_f} + \frac{1}{3^{N_f-1} N_f}} = \frac{F \cdot C_f \left( \frac{U}{F} \right) \cdot N_f}{\sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{3^{i-1}}} \quad (13)$$

结合式(2)有

$$\sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{3^{i-1}} = \sum_{i=1}^{1+\log_{\frac{1}{3}} C_f(\frac{U}{F})} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1+\log_{\frac{1}{3}} C_f(\frac{U}{F})}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 - C_f\left(\frac{U}{F}\right)}{2} \quad (14)$$

因此

$$U_{m,\max} = \frac{F \cdot C_f\left(\frac{U}{F}\right) \cdot N_f}{3 - C_f\left(\frac{U}{F}\right)} = \frac{2F \cdot C_f\left(\frac{U}{F}\right) \cdot \left[1 + \log_{\frac{1}{3}} C_f\left(\frac{U}{F}\right)\right]}{3 - C_f\left(\frac{U}{F}\right)} \quad (15)$$

这就是小尺度复用模式下单小区的支持用户量。

### 2.2 复杂度

在支持用户量的范围内, 每个用户在进入系统时即会被分配导频资源, 设一次该分配的复杂度为  $\theta_u$ , 则当大尺度复用的用户从  $U$  增至最大值  $U_{l,\max}$  的过程中, 累积复杂度为:

$$o_l = U_{l,\max} \cdot \theta_u = F \cdot \theta_u \quad (16)$$

而小尺度复用的用户从  $U$  增至最大值  $U_{m,\max}$  的过程中, 对应的累积复杂度由两部分构成. 一部分和大尺度复用的思路类似, 即用户在小区内环区划分无变化的各个区间内, 累积复杂度是

$$o_{m1} = U_{m,\max} \cdot \theta_u \quad (17)$$

另一部分为小尺度复用所特有. 在环区数发生变化的时刻, 一部分用户因复用因子改变而被重新分配了导频. 设这样的一次重分配引入的复杂度为  $\theta_p$ , 而环区数从  $\alpha$  增至  $\alpha+1$  ( $\alpha \in \{1, 2, \dots, N_f - 1\}$ ) 时需要重分配的导频量为  $J_\alpha$ , 则该部分的累积复杂度是

$$o_{m2} = \sum_{i=1}^{N_f-1} J_i \cdot \theta_p \quad (18)$$

环区数每增加 1, 对应中心区域的复用因子扩大 3 倍, 对应的导频资源从  $J_\alpha$  减至  $J_\alpha^*$ , 其释放出的导频量即为需要重分配的导频量  $J_\alpha$ , 故而

$$J_\alpha = J_\alpha^* - J_\alpha^* \quad (19)$$

对应的小区内用户数恰为  $U_{m\alpha}$ , 由式(12)得

$$J_\alpha = \frac{F \cdot C_f\left(\frac{U}{F}\right) \cdot \frac{N_f - \alpha}{3^{\alpha-1} N_f}}{\sum_{i=1}^{\alpha-1} \frac{1}{3^{i-1} N_f} + \frac{N_f - \alpha + 1}{3^{\alpha-1} N_f}} \quad (20a)$$

$$J_\alpha^* = \frac{F \cdot C_f\left(\frac{U}{F}\right) \cdot \frac{N_f - \alpha}{3^\alpha N_f}}{\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{1}{3^{i-1} N_f} + \frac{N_f - \alpha}{3^\alpha N_f}} \quad (20b)$$

根据以上分析, 小尺度复用的累积复杂度为

$$o_m = o_{m1} + o_{m2} = U_{m,\max} \cdot \theta_u + \sum_{i=1}^{N_f-1} J_i \cdot \theta_p = U_{m,\max} \cdot \theta_u + \sum_{i=1}^{N_f-1} (J_i^* - J_i^*) \cdot \theta_p \quad (21)$$

因为通常有  $\theta_p \gg \theta_u$ , 所以  $o_l < o_m$ , 即大尺度复用的复杂度低于小尺度复用的复杂度。

### 2.3 信噪比和信道容量

通信系统对用户的服务除了考虑数量外还需考虑质量, 所以我们在支持用户量之后接着讨论用户受到的干扰情况. 干扰程度与干扰传播的距离密切相关. 首先来面对大尺度复用的场景. 设小区内任一用户与本小区基站相距  $d_m$ , 与同导小区基站相距  $d_{out}$ . 则小区内用户的同导频复用距离比 (以下简称复距比) 为:

$$S_D = \frac{d_{out}}{d_m} \quad (22)$$

用户与特定基站间存在大尺度衰落系数. 与隶属基站的大尺度衰落系数为:

$$\beta_{in} = \frac{z_{in}}{d_{in}^\gamma} \quad (23)$$

与同导小区的大尺度衰落系数为:

$$\beta_{out} = \frac{z_{out}}{d_{out}^\gamma} \quad (24)$$

式(23)(24)中  $\gamma$  是路径损耗指数, 它在不同环境下的经验值如表 1 所示<sup>[12]</sup>.

表 1 部分路径损耗指数的经验值

Tab.1 Empirical values of some path-loss exponents

环境	路径损耗指数 $\gamma$
自由空间	2.0
城区	2.6 ~ 3.5
城区阴影	3.0 ~ 5.0
室内可视路径	1.6 ~ 1.8
高楼阻断路径	4.0 ~ 6.0
工厂阻断路径	2.0 ~ 3.0

式(23)中的  $z_{in}$ 、式(24)中的  $z_{out}$  分别对应本小区目标用户和同导小区干扰用户的阴影衰落因子, 它们服从对数正态分布<sup>[13]</sup>, 即

$$P(z) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln z - \mu)^2}{2\sigma^2}}, z \in \mathbf{R}^+ \quad (25)$$

式中:  $\mu$  为  $\ln z$  的期望值, 阴影衰落带给  $\ln z$  的标准差由  $\sigma$  表示. 本文将简化为  $\mu = 0, \sigma = \sigma_s$  的情况,

故  $z_{in}$  和  $z_{out}$  的概率密度函数变为

$$P(z) = \frac{1}{z\sigma_s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2\sigma_s^2}}, z \in \mathbf{R}^+ \quad (26)$$

有了大尺度衰落系数,信干噪比可表示为

$$\text{SINR} = \frac{\beta_{in}^2}{\sum \beta_{out}^2} \quad (27)$$

在区群规模已知的条件下,同导小区间的最小距离由如下定理给出:

**定理 3** 在标准蜂窝小区覆盖下,令小区半径为  $R$ ;如果每个区群由  $K$  个小区组成,基站都位于所在小区的圆心,那么本小区与其同导小区基站之间的最小距离为  $R\sqrt{3K}$  [10].

对于足够大的平面内的任一小区,满足定理 3 中最小距离的同导小区有 6 个,且均匀分布于本小区周围(如图 8).前面提到,若存在共同边界的相邻小区不允许复用相同的导频,则  $K \geq 3$ .这时用户和隶属基站的坐标差对同导小区而言可忽略;换言之,同导小区与本小区内用户的距离,可以近似为本小区基站与该同导小区基站间的距离.因此定理 3 中的最小距离也成为干扰作用距离.有了这个前提,就容易求出  $d_{out}$  和  $\beta_{out}$ .

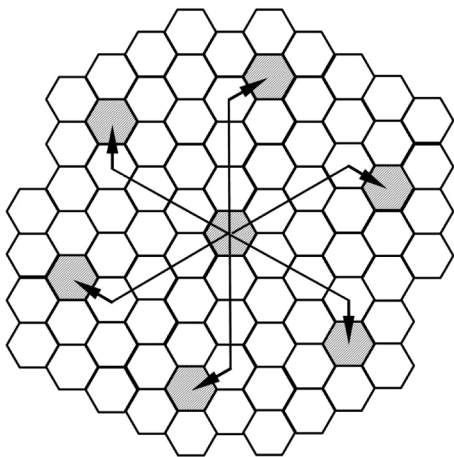


图 8 相邻同导小区的分布示例( $K=13$  的情形,各阴影蜂窝互为同导小区)

Fig.8 Distribution of adjacent pilot-shared cells (case of  $K=13$ , cells in shadow share pilots)

根据定理 3,最近的 6 个同导小区与本小区相距  $d_{1,out} = R\sqrt{3K}$ .因为小区边缘用户受同导小区的影响最大,所以对诸如信干噪比的通信质量指标应当重点考虑边缘用户.小区边缘处的  $d_{in} = R$ ,由式(22)知对应的复距比  $S_{D1} = \frac{d_{1,out}}{d_{in}} = \sqrt{3K}$ .

从图 8 中还可看出,距离本小区  $d_{2,out} = \sqrt{3} d_{1,out}$

$= 3R\sqrt{K}$  处又有 6 个均匀分布于本小区周围的同导小区,  $d_{2,out}$  是仅次于  $d_{1,out}$  的第二短距离,对应复距比  $S_{D2} = 3\sqrt{K}$ ;进一步地,距离本小区  $d_{3,out} = 2d_{1,out} = 2R\sqrt{3K}$  处还有 6 个均匀分布于本小区周围的同导小区,  $d_{3,out}$  是仅次于  $d_{1,out}$  和  $d_{2,out}$  的第三短距离,对应复距比  $S_{D3} = 2\sqrt{3K}$ .  $d_{3,out}$  之外的同导小区距离更远,对本小区用户的影响可忽略.上述三个距离对应的大尺度衰落系数为:

$$\beta_{in} = \frac{z_{in}}{d_{in}^\gamma} \quad (28a)$$

$$\beta_{i,out} = \frac{z_{out}}{d_{i,out}^\gamma}, i = 1, 2, 3 \quad (28b)$$

再由式(27)可求得信干噪比:

$$\text{SINR} \approx \frac{\beta_{in}^2}{\sum_{i=1}^3 6\beta_{i,out}^2} \quad (29)$$

根据信干噪比和信道容量的关系[14],结合式(28)可得出边缘信道容量:

$$C_e = (1-\xi) \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\beta_{in}^2}{\sum_{i=1}^3 6\beta_{i,out}^2} \right) \quad (30)$$

式中:  $\xi$  为导频传输引发的频谱效率的衰减度,且  $\xi \in [0, 1]$ .

大尺度复用场景是小尺度复用场景的基础.一旦各小区引入小尺度复用,就需要对前述大尺度复用算法作出改进.小尺度复用的环区中各用户与本小区基站的距离大致相当,但不同环区间用户的平均接收功率有明显差别.

如果传输距离  $d$  介于 3 m 和 100 m 之间,载波中心频率  $f_c$  介于 2 GHz 和 6 GHz 之间,那么当传输场景开阔、传输介质为空气时,普通用户密度区域路径损耗的经验公式为[15]:

$$L_N = 22 \lg d + 20 \lg f_c + 28 \quad (31a)$$

若用户密度升高,则热点区域路径损耗的经验公式为[15]:

$$L_H = 16.9 \lg d + 20 \lg f_c + 32.8 \quad (31b)$$

式(31)中的  $L_N, L_H$  均以 dB 为单位.

设基站发射功率为  $Q$ ,结合式(31)可知接收功率分别为:

$$Q_N = Q \cdot 10^{-\frac{L_N}{20}} \quad (32a)$$

$$Q_H = Q \cdot 10^{-\frac{L_H}{20}} \quad (32b)$$

小区内各环区对应各自的复用因子.如果一个环区的内半径为  $r_x$ ,外半径为  $r_y$ ,则该环区内用户的



平均接收功率分别为:

$$\bar{S}_N = \frac{\int_{r_x}^{r_y} Q_N \cdot dr}{r_y - r_x} = -\frac{10^{-1.4} Q(r_y^{-0.1} - r_x^{-0.1})}{0.1 f_c (r_y - r_x)} \quad (33a)$$

$$\bar{S}_H = \frac{\int_{r_x}^{r_y} Q_H \cdot dr}{r_y - r_x} = -\frac{10^{-1.64} Q(r_y^{0.155} - r_x^{0.155})}{0.155 f_c (r_y - r_x)} \quad (33b)$$

按前文的设定,忽略环区内各处与同导小区的距离差别和  $d_{3,\text{out}}$  之外同导小区的影响,则环区内用户的平均干扰功率为:

$$\bar{I}_N = \sum_{i=1}^3 6Q_N(i) = 6Q \cdot \sum_{i=1}^3 10^{-\frac{L_N(d_{i,\text{out}})}{20}} \quad (34a)$$

$$\bar{I}_H = \sum_{i=1}^3 6Q_H(i) = 6Q \cdot \sum_{i=1}^3 10^{-\frac{L_H(d_{i,\text{out}})}{20}} \quad (34b)$$

式(34)中的  $d_{i,\text{out}}$  对应式(31)中的  $d$ . 根据前文的论述,已有  $d_{1,\text{out}}=R\sqrt{3K}$ ,  $d_{2,\text{out}}=3R\sqrt{K}$ ,  $d_{3,\text{out}}=2R\sqrt{3K}$ , 因而环区内的平均信道容量分别为:

$$\bar{C}_N = (1-\xi) \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\bar{S}_N}{I_N + P_N} \right) \quad (35a)$$

$$\bar{C}_H = (1-\xi) \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{\bar{S}_H}{I_H + P_n} \right) \quad (35b)$$

式中:  $\bar{P}_N$  是接收端噪声的平均功率.

### 3 系统仿真结果与分析

#### 3.1 仿真思路

无论大尺度复用还是小尺度复用,用户量都会直接影响系统的复用状态.当用户量变化时,根据最低用户接入量、导频总量等预设参量可获得小区内的环区划分程度、复用因子等指标.该过程用抽象代码描述为下列算法 1(大尺度复用)和算法 2(小尺度复用).

算法 1 大尺度复用

---

input: 当前用户量  $u$ 、最低用户接入量为  $U$ 、导频总量  $F$

calculate 初始复用因子  $\gamma = C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ;

calculate 用户量节点  $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nN}$ ;

if  $0 < u \leq U_{n1}$

    各小区复用因子  $f(u) = \gamma$ ;

elseif  $U_{n1} < u \leq U_{n2}$

    各小区复用因子  $f(u) = 3\gamma$ ;

.....

elseif  $U_{n,N-1} < u \leq U_{nN}$

    各小区复用因子  $f(u) = 3^{N-1}\gamma$ ;

---

else

warning “用户量超过上限  $U_{l,N}, u - U_{l,N}$  个用户处于等待状态”;

    各小区复用因子  $f(u) = 3^{N-1}\gamma$ ;

endif

output: 各小区复用因子  $f(u)$

---

算法 2 小尺度复用

---

input: 当前用户量  $u$ 、最低用户接入量为  $U$ 、导频总量  $F$

calculate 初始复用因子  $\gamma = C_f \left( \frac{U}{F} \right)$ ;

calculate 各环区外半径  $r_1, r_2, \dots, r_N$ ;

calculate 用户量节点  $U_{m1}, U_{m2}, \dots, U_{m,N}$ ;

if  $0 < u \leq U_{m1}$

    环区数  $\alpha = 1$ ;

    各环区的半径区间  $R(u, 1) = (0, r_1]$ ;

    各环区复用因子  $f(u, 1) = \gamma$ ;

elseif  $U_{m1} < u \leq U_{m2}$

    环区数  $\alpha = 2$ ;

    各环区的半径区间  $R(u, 1) = (r_2, r_1], R(u, 2) = (0, r_2]$ ;

    各环区复用因子(由外向内)  $f(u, 1) = \gamma, f(u, 2) = 3\gamma$ ;

.....

elseif  $U_{m,N-1} < u \leq U_{m,N}$

    环区数  $\alpha = N_j$ ;

    各环区的半径区间  $R(u, 1) = (r_2, r_1], R(u, 2) = (r_1, r_2], \dots, R(u,$

$N_j) = (0, r_N]$ ;

    各环区复用因子(由外向内)  $f(u, 1) = \gamma, f(u, 2) = 3\gamma, \dots, f(u, N_j)$

$= 3^{N-1}\gamma$ ;

else

warning “用户量超过上限  $U_{m,N}, u - U_{m,N}$  个用户处于等待状态”;

    环区数  $\alpha = N_j$ ;

    各环区的半径区间  $R(u, 1) = (r_2, r_1], R(u, 2) = (r_3, r_2], \dots, R(u,$

$N_j) = (0, r_N]$ ;

    各环区复用因子(由外向内)  $f(u, 1) = \gamma, f(u, 2) = 3\gamma, \dots, f(u,$

$N_j) = 3^{N-1}\gamma$ ;

endif

output: 环区数  $\alpha$ 、各环区的半径区间  $R(u, 1), R(u, 2), \dots, R(u, \alpha)$ 、

各小区复用因子  $f(u, 1), f(u, 2), \dots, f(u, \alpha)$ .

---

#### 3.2 仿真结果与分析

本文以 4G+/5G 系统作为仿真平台,技术设计中大部分输出参数来自对应标准<sup>[15-16]</sup>.对标准中尚未明确的参量,则使用接近实际系统的一个可行值(见表 2).

如果导频数  $F=16\ 384$ ,单小区内初始用户数  $U_0=500$ ,可得  $f_4 < \frac{U_0}{F} < f_3$ ,则  $C_f \left( \frac{U_0}{F} \right) = f_3 = \frac{1}{27}$  为小区的

初始复用因子,可能出现的复用因子最多有  $N_f=4$  种.

大尺度复用:根据式(3)可以计算出  $U_{n1} \approx 606.8$ ,  $U_{n2} \approx 1\ 820.4$ ,  $U_{n3} \approx 5\ 461.3$ ,  $U_{n4} \approx 16\ 384$ . 用户量位于不同区间时,各复用因子在导频资源中的占比见表 3.

表 2 部分输入参数

Tab.2 Some input parameters

参数名	参数值
小区半径 $R$	50 m
基站天线数	128
系统带宽	20 MHz
载波频率	2.4 GHz
平均发射功率(上行)	8 dBm
导频上限 $F_{\max}$	16 384
导频下限 $F_{\min}$	128
路径损耗指数 $\gamma$	2
阴影衰落标准差 $\sigma_s$	3 dB
频谱效率衰减度 $\xi$	0.9
热噪声强度	-180 dBm/Hz

表 3 不同用户量下各大尺度复用因子在导频资源中的占比( $N_f=4$ )

Tab.3 Ratios of large-scale reuse factors in pilot resource by user's quantity ( $N_f=4$ )

用户量区间	$f_0=1$	$f_1=\frac{1}{3}$	$f_2=\frac{1}{9}$	$f_3=\frac{1}{27}$
$[U_0, U_{n1}]$	0	0	0	100%
$(U_{n1}, U_{n2}]$	0	0	100%	0
$(U_{n2}, U_{n3}]$	0	100%	0	0
$(U_{n3}, U_{n4}]$	100%	0	0	0

表 5 不同用户量下各大尺度复用因子在导频资源中的占比( $N_f=6$ )

Tab.5 Ratios of large-scale reuse factors in pilot resource by user's quantity ( $N_f=6$ )

用户量区间	$f_0=1$	$f_1=\frac{1}{3}$	$f_2=\frac{1}{9}$	$f_3=\frac{1}{27}$	$f_4=\frac{1}{81}$	$f_5=\frac{1}{243}$
$[U_0, U_{n1}]$	0	0	0	0	0	100%
$(U_{n1}, U_{n2}]$	0	0	0	0	100%	0
$(U_{n2}, U_{n3}]$	0	0	0	100%	0	0
$(U_{n3}, U_{n4}]$	0	0	100%	0	0	0
$(U_{n4}, U_{n5}]$	0	100%	0	0	0	0
$(U_{n5}, U_{n6}]$	100%	0	0	0	0	0

小尺度复用:根据式(7)(9)(12)计算出  $U_{m1} \approx 606.8$ ,  $U_{m2} \approx 1\ 213.6$ ,  $U_{m3} \approx 1\ 560.4$ ,  $U_{m4} \approx 1\ 638.4$ . 用户量位于不同区间时,各复用因子在导频资源中的占比见表 4.

表 4 不同用户量下各小尺度复用因子在导频资源中的占比( $N_f=4$ )

Tab.4 Ratios of small-scale reuse factors in pilot resource by user's quantity ( $N_f=4$ )

用户量区间	$f_0=1$	$f_1=\frac{1}{3}$	$f_2=\frac{1}{9}$	$f_3=\frac{1}{27}$
$[U_0, U_{n1}]$	0	0	0	100%
$(U_{n1}, U_{n2}]$	0	0	50.0%	50.0%
$(U_{n2}, U_{n3}]$	0	14.3%	21.4%	64.3%
$(U_{n3}, U_{n4}]$	2.50%	7.50%	22.5%	67.5%

如果导频数  $F=16\ 384$ ,单小区内初始用户数  $U_0=50$ ,可得  $f_6 < \frac{U_0}{F} < f_5$ ,则  $C_f\left(\frac{U_0}{F}\right)=f_5=\frac{1}{243}$  为小区的初始复用因子,可能出现的复用因子最多有  $N_f=6$  种.

大尺度复用:根据式(3)可以计算出  $U_{n1} \approx 67.4$ ,  $U_{n2} \approx 202.3$ ,  $U_{n3} \approx 606.8$ ,  $U_{n4} \approx 1\ 820.4$ ,  $U_{n5} \approx 5\ 461.8$ ,  $U_{n6} \approx 16\ 384$ . 用户量位于不同区间时,各复用因子在导频资源中的占比见表 5.

小尺度复用:根据式(7)(9)(12)计算出  $U_{m1} \approx 67.4$ ,  $U_{m2} \approx 151.7$ ,  $U_{m3} \approx 227.6$ ,  $U_{m4} \approx 260.1$ ,  $U_{m5} \approx 268.6$ ,  $U_{m6} \approx 270.1$ . 用户量位于不同区间时,各复用因子在导频资源中的占比见表 6.

表 6 不同用户量下各小尺度复用因子在导频资源中的占比( $N_f = 6$ )  
 Tab.6 Ratios of small-scale reuse factors in pilot resource by user's quantity( $N_f = 6$ )

用户量区间	$f_0 = 1$	$f_1 = \frac{1}{3}$	$f_2 = \frac{1}{9}$	$f_3 = \frac{1}{27}$	$f_4 = \frac{1}{81}$	$f_5 = \frac{1}{243}$
$[U_0, U_1]$	0	0	0	0	0	100%
$(U_1, U_2]$	0	0	0	0	62.5%	37.5%
$(U_2, U_3]$	0	0	0	25.0%	18.8%	56.3%
$(U_3, U_4]$	0	0	7.14%	7.14%	21.4%	64.3%
$(U_4, U_5]$	0	1.64%	2.46%	7.38%	22.1%	66.4%
$(U_5, U_6]$	2.74%	8.24%	2.47%	7.42%	22.3%	66.8%

图 9 和图 10 显示出导频资源占有量随用户量的变化,其中“复用因子幂值” $k$  对应的复用因子为  $3^k$ . 从图 9 可知对大尺度复用的任一用户量而言,有且仅有一个复用因子对应的导频资源占有量非零,这印证了大尺度复用下小区内部各处复用程度的一致性.也正是由于这一特征,各复用因子的非零区间量值呈现正比于用户量的增长态势.

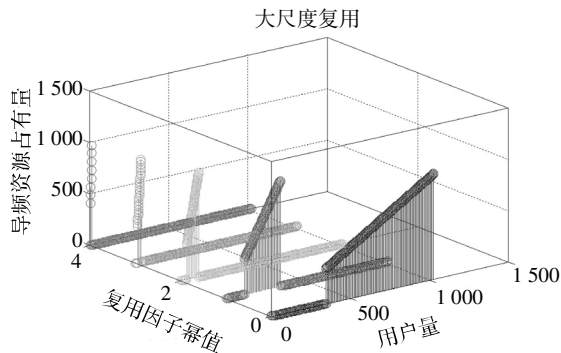


图 9 大尺度复用下的导频资源占有量(导频资源量 1 024)

Fig.9 Utilisation of pilot resources in large-scale reuse mode (1 024 pilots in total)

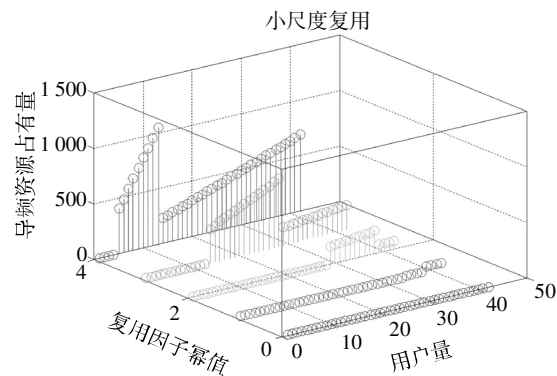


图 10 小尺度复用下的导频资源占有量(导频资源量 1 024)

Fig.10 Utilisation of pilot resources in small-scale reuse mode(1 024 pilots in total)

图 10 中各复用因子占用的导频资源量随用户量的增大而阶段性增大(模式变更处存在量值跳变),但多种复用因子可以在同一用户量下并存,这与小尺度复用的特征相符,并且并存的复用因子种类随用户量的增大而增多.还有一个明显的区别是:用户越多,图 9 中的高复用因子(低幂值)的资源占有量越大,而图 10 中的低复用因子(高幂值)的资源占有量越大,其原因是低复用因子对导频的利用率较低,只能通过占用更多导频来支持同等的用户量.

小尺度复用中的复用因子和环区对应,因而各复用因子的信干噪比可表示各对应环区的信干噪比;相比而言,大尺度复用可视作其中一个特例,将整个小区作为一个环区来处理.传输质量是小尺度复用的一项重要优势.图 11 比较了大尺度复用和小尺度复用的信干噪比指标.根据导频复用的定义,不同环区的导频复距比互异,所以它们的信干噪比随复用因子的增大而下降;对于某一确定的复用因子而言,小尺度复用的信干噪比高于大尺度复用,这证实了小尺度复用对传输质量有明显的提升作用.

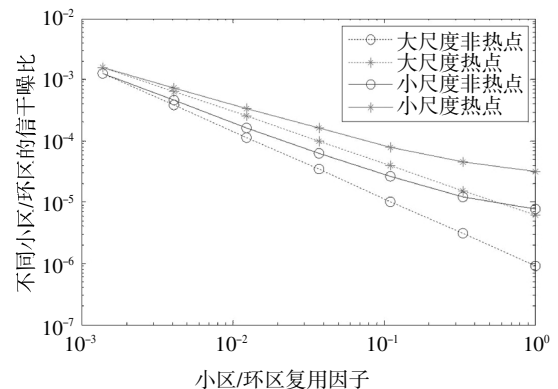


图 11 不同小区/环区的信干噪比(导频资源量 8 192)

Fig.11 SINR in distinct cells / rings(8 192 pilots in total)

图 12 显示出信道容量随环区的内缩而降低,该趋势亦源自导频复距比,在低复用因子部分体现得尤为明显.假如不考虑复用距离,那么随着复用因子增大,环区内缩,有用信号增强,进而促使信干噪比和信道容量提升.这种假设与图 11、12 中的实测特性不符;可见,在环区小尺度复用机制下,导频复距比对通信质量的影响力大于有用信号的传输距离.

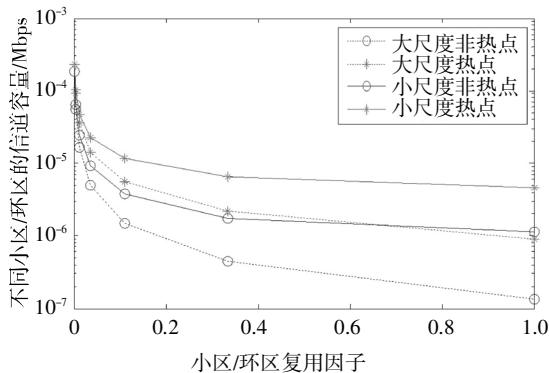


图 12 不同小区/环区的信道容量 (导频资源量 8 192)

Fig.12 Channel capacity of distinct cells / rings (8 192 pilots in total)

用户量会影响小尺度复用的模式,故而不同用户量下的信干噪比和支持用户量均存在差异.图 13 中的最大 SINR 图线、图 14 中的最大容量图线对应理想参考值,受用户量的影响很小.从图 13 可以看出最小 SINR 和平均 SINR 图线都随用户增加而下降,图 14 中的最小信道容量和平均信道容量有相同的趋势,且用户量越大,信道容量降低得越明显.可见对于小尺度复用而言,达到或接近理想状态的用户占比很少,大多数用户受复用距离缩短的影响,通信质量明显低于最优.如果对小尺度复用模式下的通信质量有较高要求,就必须严格控制用户量.

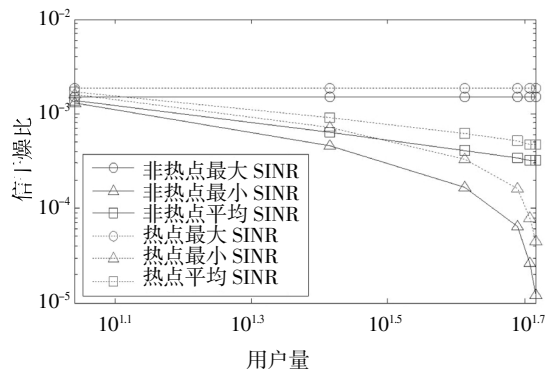


图 13 信干噪比随用户量的变化(导频资源量 8 192)

Fig.13 Variation of SINR by user's quantity (8 192 pilots in total)

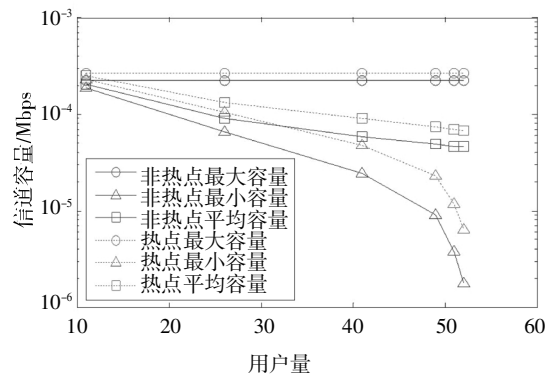


图 14 信道容量随用户量的变化(导频资源量 8 192)

Fig.14 Variation of channel capacity by user's quantity (8 192 pilots in total)

### 4 结 论

小尺度导频复用方案是在现有的大尺度复用方案基础上改进而成,它继承了大尺度复用里提高导频利用率的总体目标,在小区内部打破复用因子的统一性,根据用户位置分配不同的导频复用因子.与传统的扇区分割法相比,本文使用的环区策略以有用信号的传输距离为关键指标进行环区分割,环区数量灵活,分配的复用因子能有效应对不同用户的通信质量.

为了能够简便而清晰地表示小尺度导频复用方案,本文以二叉树为桥梁将复用状态与状态数组联系起来,这就极大地方便了计算机仿真环境实施环区规划.从仿真结果可知,在导频资源受限的条件下,用户量的增大会降低通信质量,且仍须通过提高总体复用程度来应对,这方面与预期相符.但与大尺度复用相比,小尺度复用的信道质量较高,对导频复用程度的调节更为细致;它以低复用因子来弥补小区边缘用户所受干扰较强的缺陷,同时提高小区中心用户的复用程度以节约导频资源.另外通过仿真还可看出,导频复距比对环区用户通信质量的总体影响明显,因此在实际应用小尺度复用方案时,需要合理地设计区群规模,科学地在小区内进行环区划分,以更好地体现该方案的优势.

### 附 录

设  $K$  的值可由多项式  $p^2 + pq + q^2$  计算得出,其

中  $p, q$  为非负整数且不同时为零;同时定义集合  $B = \{b|b = 3^n, n \in N\}$ . 若令  $K$  的值域为  $R_K$ , 求证:  $B \subset R_K$ .

证明:根据  $n$  的奇偶性,分两种情况讨论.

①当  $n$  为正奇数时,令  $n = 2k-1, k \in N$ , 这时有

$$b_1 = 3^{2k-1} = 3 \cdot 3^{2(k-1)} = (3^{k-1})^2 + (3^{k-1})^2 + (3^{k-1})^2$$

若令  $p_1 = q_1 = 3^{k-1}$ , 则

$$b_1 = p_1^2 + p_1 q_1 + q_1^2, p_1 \in N, q_1 \in N$$

所以

$$B_1 = \{b_1|b_1 = 3^{2k-1}, k \in N\} =$$

$$\{b_1|b_1 = p_1^2 + p_1 q_1 + q_1^2, p_1 \in N, q_1 \in N\} \subset R_K$$

②当  $n$  为正偶数时,令  $n = 2k, k \in N$  这时有

$$b_2 = 3^{2k} = (3^k)^2$$

若令  $p_2 = 3^k, q_2 = 0$ , 则仍有

$$b_2 = p_2^2 + p_2 q_2 + q_2^2, p_2 \in N, q_2 = 0$$

所以

$$B_2 = \{b_2|b_2 = 3^{2k}, k \in N\} =$$

$$\{b_2|b_2 = p_2^2 + p_2 q_2 + q_2^2, p_2 \in N, q_2 = 0\} \subset R_K$$

将以上两种情况合并,得到  $B = B_1 \cup B_2 \subseteq R_K$ ; 最后,易举出  $R_K$  中的很多元素不属于集合  $B$  (如自然数 4, 7 等), 因此  $B \subset R_K$ .

证毕.

## 参考文献

- [1] NI S J, ZHAO J H, GONG Y. Optimal pilot design in massive MIMO systems based on channel estimation [J]. IET Communications, 2017, 11(7): 975.
- [2] LUO F L, ZHANG J Z. Signal processing for 5G - algorithms and implementations [M]. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2016: 561.
- [3] BEASLEY J, HYMER J, MILLER G. Electronic communications - a system approach [M]. London: Pearson Education Ltd, 2014: 269.
- [4] 高翟. 移动通信 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2014: 61.
- [5] GAO D. Mobile communications [M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 2014: 61. (In Chinese)
- [6] HUA Y, CHANG W. Time shifted pilots scheme for full-duplex massive MIMO systems [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(3): 3022.
- [7] 黄星梅, 卿海鸽. 基于二叉树的装配体数据 [J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 2003, 30(2): 47-50.
- [8] HUANG X M, QING H G. Data structure of assembly model based on binary tree [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2003, 30(2): 47-50. (In Chinese)
- [9] KRUSE R, TONDO C, LEUNG B. Data structures & program design in C [M], 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997: 459.
- [10] SOHN J, YOON S, MOON J. Pilot reuse strategy maximizing the weighted-sum-rate in massive MIMO systems [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2017, 35(8): 1728.
- [11] 许丹, 田波, 李靖卿, 等. 混合体制雷达网弹道目标进动特征提取 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2019, 51(5): 138-145.
- [12] XU D, TIAN B, LI J Q, et al. Precession feature extraction of ballistic target based on hybrid-scheme radar network [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2019, 51(5): 138-145. (In Chinese)
- [13] GAO D, ZHU X, HUANG Y. Multiple division soft pilot reuse in massive MIMO cellular networks [C] // Proc 6th International Conf on Information Communication and Management. Hatfield: IEEE Press, 2016: 187.
- [14] BLAKE R. Electronic communication systems [M]. 2nd ed. St Louis: Thomson Learning, 2002: 563.
- [15] 宋铁成, 宋晓勤. 移动通信技术 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2018: 15.
- [16] SONG T C, SONG X Q. Mobile communication technology [M]. Beijing: Post & Telecom Press, 2018: 15. (In Chinese)
- [17] ZHU B C, ZHANG Z C. Asymptotic analysis on diversity receptions over fading channels with correlated shadowing [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(8): 8275.
- [18] TSE D, VISWANATH P. Fundamentals of wireless communications [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 147.
- [19] 3GPP TR 36.814 V9.2.0. Further advancements for E-UTRA physical layer aspects (Release 9) [S]. Valbonne: 3GPP Organizational Partners' Publications Offices, 2017: 94-95.
- [20] DAHLMAN E, PARKVALL S, SKÖLD J. 4G, LTE - Advanced pro and the road to 5G [M], 3rd ed. Oxford: Elsevier Ltd, 2016: 530.