

基于三维虚土桩模型的大直径桩纵向振动研究

孟坤^{1,2}, 崔春义^{2†}, 王本龙², 李静波², 王坤鹏²

(1. 山东科技大学 交通学院, 山东 青岛 266590;

2. 大连海事大学 交通运输工程学院, 辽宁 大连 116026)

摘要:为分析大直径浮承桩纵向振动特性,基于黏弹性连续介质理论同时考虑桩身和桩底土的三维波动效应,提出了一种三维虚土桩模型.首先,采用拉普拉斯变换和分离变量法求解得到桩身和桩底虚土桩的位移基本解;然后,结合桩-土及桩-虚土桩完全耦合条件,推导出大直径桩桩顶动力阻抗解析解,并通过与已有解答对比分析验证了推导所得解析解的合理性和准确性;最后,利用数值算例分析了桩顶径向位置及三维虚土桩参数对大直径浮承桩桩顶动力阻抗的影响.计算结果表明:大直径桩顶动刚度和动阻尼呈现由桩中心向桩边缘减小的趋势,且桩长径比越小桩顶动力阻抗的这种径向不均匀性越明显;对于大直径桩忽略桩身径向波动效应会过高估计桩顶动力阻抗的振幅和频率,不利于桩基抗振防振设计;三维虚土桩模型不仅对于大直径浮承桩纵向振动问题具有更好的适用性,而且可以通过调整虚土桩参数将其应用于端承桩动力特性分析中.

关键词:大直径桩;纵向振动;连续介质理论;三维虚土桩;解析解

中图分类号:TU473

文献标志码:A

Study on Vertical Vibration of Large Diameter Pile Based on Three-dimensional Fictitious Soil Pile Model

MENG Kun^{1,2}, CUI Chunyi^{2†}, WANG Benlong², LI Jingbo², WANG Kunpeng²

(1. College of Transportation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. College of Transportation Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China)

Abstract: To investigate the vertical vibration characteristic of a large-diameter floating pile, a three-dimensional fictitious soil pile model (TFSP) is presented by introducing a three-dimensional visco-elastic continuum theory and considering the three-dimensional wave propagation effect of the pile and pile end soil. First, the fundamental solutions of pile shaft and fictitious soil pile are derived by using Laplace transform and variables separation methods. Then, combining the compatibility conditions at the interfaces of pile-soil and pile-TFSP, the analytical solution of dynamic impedance at the head of a large-diameter pile is obtained. The rationality and accuracy of the proposed model and corresponding analytical solutions are verified by comparing them with existing research.

* 收稿日期:2022-04-30

基金项目:国家重点研发计划项目(2021YFB2601100), National Key Research and Development Program of China (2021YFB2601100); 国家自然科学基金资助项目(51878109, 52178315, 52108326), National Natural Science Foundation of China (51878109, 52178315, 52108326)

作者简介:孟坤(1990—),男,山东聊城人,山东科技大学讲师,博士

† 通信联系人, E-mail:cuichunyi@dlmu.edu.cn

Finally, the numerical examples are performed to investigate the effect of the radial location of the pile cross-section and parameters of TFSP on the dynamic impedance of a large-diameter floating pile. The results indicate that the dynamic stiffness and damping of the pile head decrease from the pile center to the pile edge, and the smaller the length diameter ratio of the pile, the more obvious the radial heterogeneity of the dynamic impedance of the pile. For large-diameter piles, ignoring the radial wave effect of the pile shaft can overestimate the amplitude and frequency of the dynamic impedance at the pile head, which is not conducive to the anti-vibration design of the pile shaft. The proposed three-dimensional fictitious soil pile model not only has better applicability for the vertical vibration of the large-diameter floating pile but also can be used to analyze the dynamic characteristics of the end-bearing pile by adjusting the parameters of the fictitious soil pile.

Key words: large-diameter pile; vertical vibration; continuum theory; three-dimensional fictitious soil pile; analytical solution

随着社会经济的全面发展,现代建筑及各类基础设施呈现大型化和复杂化趋势,其对基础的承载和变形要求也随之提高,桩基作为一种承载力高、抗变形能力强的基础形式得到更为普遍的应用.桩基除了承受上部结构传递的静荷载外,还会受到诸如交通、机械振动等纵向动荷载作用,而桩-土纵向振动理论作为桩基抗振防振设计的基础,受到国内外学者的广泛关注^[1-3].

桩-土纵向振动理论模型主要由三部分组成,即桩侧土、桩底土和桩身,已有研究多围绕桩侧土和桩底土模型的改进展开^[4].桩侧土模型由简化的Winkler模型^[5],到可考虑径向波动效应的Novak平面应变模型^[6],再到可进一步考虑竖向波动效应的三维连续介质模型^[7],发展已趋于完善.桩底土模型作为界定浮承桩和端承桩的关键,近年来受到越来越多的关注.对于端承桩,采用桩端固定模型即可很好地分析其纵向振动特性^[8];而对于浮承桩,桩底土模型的合理性则会对计算结果产生较大影响^[9].Kelvin-Voigt模型^[10]是针对浮承桩纵向振动问题应用最为普遍的一种桩底土模型,但其作为一种离散的弹簧-阻尼器模型无法考虑桩底土波动效应的影响.因此,Muki等^[11]和Zheng等^[12]将弹性半空间模型引入桩-土纵向耦合振动分析中,探讨了桩底土波动效应对桩基纵向动力响应的影响.然而,弹性半空间模型仅适用于桩底基岩埋深无限大的情况,鉴于此,杨冬英等^[13]和吴文兵等^[14]通过将桩底土假设为与桩基等直径的圆柱体提出了一种理论上更为严格的虚土桩模型,该模型既考虑了桩底土波动效应的影响,又不受桩底基岩埋深的限制.

上述研究中,桩身模型均采用基于平面应变假定的Euler-Bernoulli杆模型,该模型对于细长桩纵向振动问题具有很好的适用性.然而,随着上部结构对基础承载力要求的不断提高,桩身直径也随之加大,这样,平截面假定对于此类大直径桩将不再适用^[15].吕述晖等^[16]和李振亚等^[17]通过在桩身一维波动方程中引入泊松比项,考虑桩身横向惯性效应的影响,提出了一种可应用于大直径桩纵向振动问题的Rayleigh-Love模型.然而,Rayleigh-Love模型实际意义上仍是一种一维模型,无法考虑桩身径向波动效应的影响.鉴于此,杨晓等^[18]将桩底考虑为固定端,基于连续介质理论建立了三维桩身模型,分析了桩身径向波动效应对端承桩纵向振动特性的影响.在此基础上,孟坤等^[19]进一步利用Kelvin-Voigt模型考虑桩底土对桩的支撑作用,对大直径浮承桩的纵向振动特性进行了分析.

综上所述,在利用桩身三维模型分析大直径桩纵向振动特性的研究中,浮承桩桩底土采用了简化的Kelvin-Voigt模型,无法合理考虑桩底土波动效应的影响.鉴于此,本文基于三维黏弹性连续介质理论,将桩底一维虚土桩模型拓展到三维情况,提出一种可同时考虑桩身和桩底土径向波动效应的三维虚土桩模型.利用拉普拉斯变换和分离变量法,并结合桩-土完全耦合条件,推导得出大直径浮承桩桩顶动力阻抗解析解,进而分析桩顶径向位置及三维虚土桩参数对桩顶动力阻抗的影响规律,所得相关解析解及分析结果可为实际工程中大直径浮承桩的动力设计及现场桩基完整性检测提供理论指导.

1 定解问题

1.1 简化力学模型

基于三维虚土桩模型的大直径黏弹性桩简化力学模型,如图 1 所示.大直径桩力学性质采用三维黏弹性连续介质描述,桩侧土和桩底土简化为相互独立的薄层,桩底半径范围内的土体考虑为与桩等截面的三维虚土桩.大直径桩桩长和半径分别为 H^p 和 r_0 ,三维虚土桩桩长(即桩底土层厚度)为 H^{FP} ,基岩上土层总厚度为 H .桩顶激振力 $p(t)$ 均布在半径为 r_h 的圆形区域内,具体形式如式(1)(2)所示:

$$p(t) = \frac{Q}{\pi r_h^2} \sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)h(T-t) \quad (1)$$

$$g(r) = h(r_h - r) \quad (2)$$

式中: Q 为激振力幅值; T 为脉冲宽度; h 为阶跃函数.

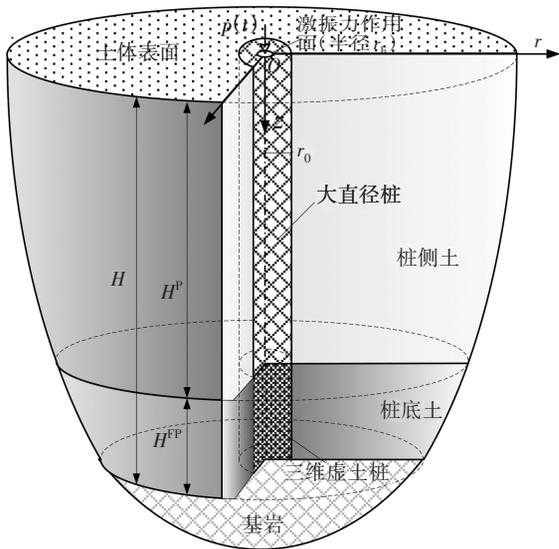


图 1 简化力学模型图

Fig.1 Simplified mechanical model

本文解析模型基于桩与桩侧土、虚土桩与桩底土以及桩与虚土桩界面完全耦合假定,适用于小变形的振动和波动问题,具体的应用场景包括:1)桩基础结构物抗振防振设计,如大直径浮承桩桩顶动力阻抗计算及影响因素分析;2)低应变反射波法检测桩基完整性,如大直径桩浮承桩桩顶不同位置处速度反射波曲线变化规律对桩基完整性判别的影响.

1.2 控制方程

基于 Novak 平面应变理论建立土体纵向振动控制方程:

$$G_j^S \frac{\partial^2 u_j^S}{\partial r^2} + \eta_j^S \frac{\partial^3 u_j^S}{\partial t \partial r^2} + \frac{G_j^S}{r} \cdot \frac{\partial u_j^S}{\partial r} + \frac{\eta_j^S}{r} \cdot \frac{\partial^2 u_j^S}{\partial t \partial r} = \rho_j^S \frac{\partial^2 u_j^S}{\partial t^2} \quad (3)$$

式中: u_j^S 为土体纵向位移; G_j^S 、 η_j^S 和 ρ_j^S 分别为土体剪切模量、黏性阻尼系数和密度,下标 $j=1,2$,当 $j=1$ 时上述参数对应桩侧土,当 $j=2$ 时上述参数对应桩底土.

大直径桩和三维虚土桩的控制方程则可根据三维黏弹性连续介质模型理论建立:

$$(\lambda^p + 2G^p) \frac{\partial^2 u^p}{\partial z^2} + \eta^p \frac{\partial^3 u^p}{\partial t \partial z^2} + G^p \frac{\partial^2 u^p}{\partial r^2} + \eta^p \frac{\partial^3 u^p}{\partial t \partial r^2} + \frac{G^p}{r} \cdot \frac{\partial u^p}{\partial r} + \frac{\eta^p}{r} \cdot \frac{\partial^2 u^p}{\partial t \partial r} = \rho^p \frac{\partial^2 u^p}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$(\lambda_2^S + 2G_2^S) \frac{\partial^2 u^{FP}}{\partial z^2} + \eta_2^S \frac{\partial^3 u^{FP}}{\partial t \partial z^2} + G_2^S \frac{\partial^2 u^{FP}}{\partial r^2} + \eta_2^S \frac{\partial^3 u^{FP}}{\partial t \partial r^2} + \frac{G_2^S}{r} \cdot \frac{\partial u^{FP}}{\partial r} + \frac{\eta_2^S}{r} \cdot \frac{\partial^2 u^{FP}}{\partial t \partial r} = \rho_2^S \frac{\partial^2 u^{FP}}{\partial t^2} \quad (5)$$

式中: u^p 和 u^{FP} 分别为桩和虚土桩的纵向位移; λ^p 、 G^p 、 η^p 和 ρ^p 分别为桩的拉梅常数、剪切模量、黏性阻尼系数和密度; λ_2^S 、 G_2^S 、 η_2^S 和 ρ_2^S 分别为桩底土的拉梅常数、剪切模量、黏性阻尼系数和密度.

1.3 边界条件

1) 土体边界条件.

径向无穷远处土体位移为零:

$$u_j^S \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad (6)$$

2) 桩边界条件.

大直径桩桩顶作用均布激振力 $p(t)$:

$$\sigma^p \Big|_{z=0} = -p(t)g(r) \quad (7)$$

式中: $\sigma^p = (\lambda^p + 2G^p) \frac{\partial u^p}{\partial z} + \eta^p \frac{\partial^2 u^p}{\partial z \partial t}$ 为桩的正应力.

虚土桩桩底位移为零:

$$u^{FP}(z, r, t) \Big|_{z=H} = 0 \quad (8)$$

桩和虚土桩桩中心处位移为有限值:

$$u^p(z, r, t) \Big|_{r=0} = \text{有限值} \quad (9)$$

$$u^{FP}(z, r, t) \Big|_{r=0} = \text{有限值} \quad (10)$$

桩与虚土桩界面位移、应力耦合条件:

$$u^p \Big|_{z=H^p, r=0} = u^{FP} \Big|_{z=H^p, r=0} \quad (11)$$

$$\int_0^{r_0} \sigma^p r dr = \int_0^{r_0} \sigma^{FP} r dr \quad (12)$$

式中: $\sigma^{FP} = (\lambda_2^S + 2G_2^S) \frac{\partial u^{FP}}{\partial z} + \eta_2^S \frac{\partial^2 u^{FP}}{\partial z \partial t}$ 为虚土桩正应力.

3) 桩-土界面耦合条件.

$$u^p \Big|_{r=r_0} = u_1^S \Big|_{r=r_0}; \quad \tau^p \Big|_{r=r_0} = \tau_1^S \Big|_{r=r_0} \quad (13)$$

$$u^{\text{FP}}|_{r=r_0} = u_2^{\text{S}}|_{r=r_0}; \quad \tau^{\text{FP}}|_{r=r_0} = \tau_2^{\text{S}}|_{r=r_0} \quad (14)$$

式中: $\tau^{\text{P}} = G^{\text{P}} \frac{\partial u^{\text{P}}}{\partial r} + \eta^{\text{P}} \frac{\partial^2 u^{\text{P}}}{\partial r \partial t}$, $\tau_1^{\text{S}} = G_1^{\text{S}} \frac{\partial u_1^{\text{S}}}{\partial r} + \eta_1^{\text{S}} \frac{\partial^2 u_1^{\text{S}}}{\partial r \partial t}$,
 $\tau^{\text{FP}} = G_2^{\text{S}} \frac{\partial u^{\text{FP}}}{\partial r} + \eta_2^{\text{S}} \frac{\partial^2 u^{\text{FP}}}{\partial r \partial t}$ 和 $\tau_2^{\text{S}} = G_2^{\text{S}} \frac{\partial u_2^{\text{S}}}{\partial r} + \eta_2^{\text{S}} \frac{\partial^2 u_2^{\text{S}}}{\partial r \partial t}$ 分别为桩、桩侧土、虚土桩和桩底土的切应力。

2 定解问题求解

对桩-土耦合纵向振动控制方程式(3)~(5)进行拉普拉斯变换后可得:

$$\frac{\partial^2 U_j^{\text{S}}(r, \omega)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_j^{\text{S}}(r, \omega)}{\partial r} = (q_j^{\text{S}})^2 U_j^{\text{S}}(r, \omega) \quad (15)$$

$$(\lambda^{\text{P}} + 2G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \frac{\partial^2 U^{\text{P}}}{\partial z^2} + (G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \frac{\partial^2 U^{\text{P}}}{\partial r^2} + (G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U^{\text{P}}}{\partial r} = -\rho^{\text{P}} \omega^2 U^{\text{P}} \quad (16)$$

$$(\lambda_2^{\text{S}} + 2G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \frac{\partial^2 U^{\text{FP}}}{\partial z^2} + (G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \frac{\partial^2 U^{\text{FP}}}{\partial r^2} + (G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U^{\text{FP}}}{\partial r} = -\rho_2^{\text{S}} \omega^2 U^{\text{FP}} \quad (17)$$

式中: U_j^{S} 、 U^{P} 和 U^{FP} 分别为 u_j^{S} 、 u^{P} 和 u^{FP} 的拉氏变换;

$$q_j^{\text{S}} = \sqrt{-\frac{\rho_j^{\text{S}} \omega^2}{G_j^{\text{S}} + i\eta_j^{\text{S}}}}; \quad \omega \text{ 为激振圆频率; } i = \sqrt{-1}.$$

2.1 土体振动求解

方程(15)的位移基本解为:

$$U_j^{\text{S}}(r, \omega) = A_j^{\text{S}} K_0(q_j^{\text{S}} r) + B_j^{\text{S}} I_0(q_j^{\text{S}} r) \quad (18)$$

式中: A_j^{S} 和 B_j^{S} 为待定系数; I_0 和 K_0 分别为零阶第一类和第二类虚宗量贝塞尔函数。

考虑边界条件式(6)并结合贝塞尔函数的性质可知 $B_j^{\text{S}} = 0$, 因此可得土体位移和剪应力解为:

$$U_j^{\text{S}}(r, \omega) = A_j^{\text{S}} K_0(q_j^{\text{S}} r) \quad (19)$$

$$\tau_j^{\text{S}}(r) = -(G_j^{\text{S}} + i\omega\eta_j^{\text{S}}) A_j^{\text{S}} q_j^{\text{S}} K_1(q_j^{\text{S}} r) \quad (20)$$

2.2 桩-虚土桩振动求解

2.2.1 位移基本解

利用分离变量法, 令 $U^{\text{P}} = Z^{\text{P}}(z) \cdot R^{\text{P}}(r)$, $U^{\text{FP}} = Z^{\text{FP}}(z) \cdot R^{\text{FP}}(r)$, 并将其分别代入式(16)和式(17)可得:

$$(\lambda^{\text{P}} + 2G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \frac{Z^{\text{P}''}(z)}{Z^{\text{P}}(z)} + (G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \left[\frac{R^{\text{P}''}(r)}{R^{\text{P}}(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R^{\text{P}'(r)}}{R^{\text{P}}(r)} \right] = -\rho^{\text{P}} \omega^2 \quad (21)$$

$$(\lambda_2^{\text{S}} + 2G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \frac{Z^{\text{FP}''}(z)}{Z^{\text{FP}}(z)} + (G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \left[\frac{R^{\text{FP}''}(r)}{R^{\text{FP}}(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{R^{\text{FP}'(r)}}{R^{\text{FP}}(r)} \right] = -\rho^{\text{FP}} \omega^2 \quad (22)$$

进一步地, 式(21)和式(22)可分解为常微分方程:

$$\begin{cases} Z^{\text{P}''}(z) - (\alpha^{\text{P}})^2 Z^{\text{P}}(z) = 0 \\ R^{\text{P}''}(r) + \frac{1}{r} R^{\text{P}'(r)} - R^{\text{P}}(r) (\beta^{\text{P}})^2 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} Z^{\text{FP}''}(z) - (\alpha^{\text{FP}})^2 Z^{\text{FP}}(z) = 0 \\ R^{\text{FP}''}(r) + \frac{1}{r} R^{\text{FP}'(r)} - R^{\text{FP}}(r) (\beta^{\text{FP}})^2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

根据式(21)和式(22)可知, α^{P} 和 β^{P} 、 α^{FP} 和 β^{FP} 分别满足关系式(25)(26):

$$(\alpha^{\text{P}})^2 = -\frac{(G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}})(\beta^{\text{P}})^2 + \rho^{\text{P}} \omega^2}{\lambda^{\text{P}} + 2G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}} \quad (25)$$

$$(\alpha^{\text{FP}})^2 = -\frac{(G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}})(\beta^{\text{FP}})^2 + \rho_2^{\text{S}} \omega^2}{\lambda_2^{\text{S}} + 2G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}} \quad (26)$$

方程(23)和(24)的基本解为:

$$\begin{cases} Z^{\text{P}}(z) = C^{\text{P}} e^{\alpha^{\text{P}} z} + D^{\text{P}} e^{-\alpha^{\text{P}} z} \\ R^{\text{P}}(r) = E^{\text{P}} K_0(\beta^{\text{P}} r) + F^{\text{P}} I_0(\beta^{\text{P}} r) \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} Z^{\text{FP}}(z) = C^{\text{FP}} e^{\alpha^{\text{FP}} z} + D^{\text{FP}} e^{-\alpha^{\text{FP}} z} \\ R^{\text{FP}}(r) = E^{\text{FP}} K_0(\beta^{\text{FP}} r) + F^{\text{FP}} I_0(\beta^{\text{FP}} r) \end{cases} \quad (28)$$

式中: C^{P} 、 D^{P} 、 E^{P} 、 F^{P} 、 C^{FP} 、 D^{FP} 、 E^{FP} 和 F^{FP} 为待定系数。

将式(27)和式(28)分别代入边界条件式(9)和(10)可得 $E^{\text{P}} = E^{\text{FP}} = 0$, 因此桩和虚土桩的位移可表示为:

$$U^{\text{P}} = (C^{\text{P}} e^{\alpha^{\text{P}} z} + D^{\text{P}} e^{-\alpha^{\text{P}} z}) I_0(\beta^{\text{P}} r) \quad (29)$$

$$U^{\text{FP}} = (C^{\text{FP}} e^{\alpha^{\text{FP}} z} + D^{\text{FP}} e^{-\alpha^{\text{FP}} z}) I_0(\beta^{\text{FP}} r) \quad (30)$$

2.2.2 振动模态特征值

根据式(29)和(30), 可以得到桩和虚土桩的正应力和剪应力表达式:

$$\sigma^{\text{P}} = (\lambda^{\text{P}} + 2G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \alpha^{\text{P}} \times (C^{\text{P}} e^{\alpha^{\text{P}} z} - D^{\text{P}} e^{-\alpha^{\text{P}} z}) I_0(\beta^{\text{P}} r) \quad (31)$$

$$\tau^{\text{P}} = (G^{\text{P}} + i\omega\eta^{\text{P}}) \beta^{\text{P}} \times (C^{\text{P}} e^{\alpha^{\text{P}} z} + D^{\text{P}} e^{-\alpha^{\text{P}} z}) I_1(\beta^{\text{P}} r) \quad (32)$$

$$\sigma^{\text{FP}} = (\lambda_2^{\text{S}} + 2G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \alpha^{\text{FP}} \times (C^{\text{FP}} e^{\alpha^{\text{FP}} z} - D^{\text{FP}} e^{-\alpha^{\text{FP}} z}) I_0(\beta^{\text{FP}} r) \quad (33)$$

$$\tau^{\text{FP}} = (G_2^{\text{S}} + i\omega\eta_2^{\text{S}}) \beta^{\text{FP}} \times (C^{\text{FP}} e^{\alpha^{\text{FP}} z} + D^{\text{FP}} e^{-\alpha^{\text{FP}} z}) I_1(\beta^{\text{FP}} r) \quad (34)$$

根据桩-土界面耦合条件, 当 $j = 1$ 时将式(19)(29)(20)(32)代入式(13)后可得:

$$(C^{\text{P}} e^{\alpha^{\text{P}} z} + D^{\text{P}} e^{-\alpha^{\text{P}} z}) I_0(\beta^{\text{P}} r_0) = A_1^{\text{S}} K_0(q_1^{\text{S}} r_0) \quad (35)$$

$$(G^P + i\omega\eta^P)\beta^P(C^P e^{\alpha^P z} + D^P e^{-\alpha^P z})I_1(\beta^P r_0) = - (G_1^S + i\omega\eta_1^S)A_1^S q_1^S K_1(q_1^S r_0) \quad (36)$$

当 $j = 2$ 时将式(19)(30)(20)(34)代入式(14)后
可得:

$$(C^{FP} e^{\alpha^{FP} z} + D^{FP} e^{-\alpha^{FP} z})I_0(\beta^{FP} r_0) = A_2^S K_0(q_2^S r_0) \quad (37)$$

$$\beta^{FP}(C^{FP} e^{\alpha^{FP} z} + D^{FP} e^{-\alpha^{FP} z})I_1(\beta^{FP} r_0) = -A_2^S q_2^S K_1(q_2^S r_0) \quad (38)$$

分别联立式(35)~(38)后可得:

$$\beta^P I_1(\beta^P r_0) + \zeta^P I_0(\beta^P r_0) = 0 \quad (39)$$

$$\beta^{FP} I_1(\beta^{FP} r_0) + \zeta^{FP} I_0(\beta^{FP} r_0) = 0 \quad (40)$$

式中: $\zeta^P = \frac{(G_1^S + i\omega\eta_1^S)q_1^S K_1(q_1^S r_0)}{(G^P + i\omega\eta^P)K_0(q_1^S r_0)}$; $\zeta^{FP} = \frac{q_2^S K_1(q_2^S r_0)}{K_0(q_2^S r_0)}$.

利用数值迭代方法求解超越方程(39)和(40),
可分别得到桩和虚土桩纵向振动模态的 n 个特征
值: $\beta_1^P, \beta_2^P, \dots, \beta_n^P; \beta_1^{FP}, \beta_2^{FP}, \dots, \beta_n^{FP}$. 进一步地, 将 β_n^P
和 β_n^{FP} 分别代入式(25)和式(26)可得 α_n^P 和 α_n^{FP} .

根据叠加原理可得桩和虚土桩位移解为:

$$U^P = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^P e^{\alpha_n^P z} + D_n^P e^{-\alpha_n^P z}) I_0(\beta_n^P r) \quad (41)$$

$$U^{FP} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{FP} e^{\alpha_n^{FP} z} + D_n^{FP} e^{-\alpha_n^{FP} z}) I_0(\beta_n^{FP} r) \quad (42)$$

式中: C_n^P, D_n^P, C_n^{FP} 和 D_n^{FP} 为一系列待定系数.

2.2.3 待定系数求解

将式(41)和式(42)分别代入边界条件式(7)和
式(8)后可得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^P (C_n^P - D_n^P) I_0(\beta_n^P r) = -\frac{P(\omega)g(r)}{\lambda^P + 2G^P + i\omega\eta^P} \quad (43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{FP} e^{\alpha_n^{FP} H} + D_n^{FP} e^{-\alpha_n^{FP} H}) I_0(\beta_n^{FP} r) = 0 \quad (44)$$

式中: $P(\omega)$ 为 $p(t)$ 的拉氏变换.

根据贝塞尔函数性质可知其具有如下正交性:

$$\int_0^{r_0} I_0(\beta_n^P r) I_0(\beta_m^P r) r dr = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{(r_0)^2}{2} [I_0(\beta_n^P r_0)^2 - I_1(\beta_n^P r_0)^2], m = n \end{cases} \quad (45)$$

$$\int_0^{r_0} I_0(\beta_n^{TFSP} r) I_0(\beta_m^{TFSP} r) r dr = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{(r_0)^2}{2} [I_0(\beta_n^{TFSP} r_0)^2 - I_1(\beta_n^{TFSP} r_0)^2], m = n \end{cases} \quad (46)$$

利用上述正交性, 在式(43)和(44)两边分别同
时乘以 $I_0(\beta_m^P r)r$ 和 $I_0(\beta_m^{FP} r)r$, 并在 $[0, r_0]$ 区间内进行
积分后可得:

$$C_n^P - D_n^P = \gamma_n P(\omega) \quad (47)$$

$$C_n^{FP} = \chi_n D_n^{FP} \quad (48)$$

式中:

$$\gamma_n = \frac{2 \int_0^{r_0} I_0(\beta_n^P r) r dr}{(\lambda^P + 2G^P + i\omega\eta^P) \alpha_n^P (r_0)^2 [I_1(\beta_n^P r_0)^2 - I_0(\beta_n^P r_0)^2]};$$

$$\chi_n = -e^{-2\alpha_n^{FP} H}.$$

此外, 考虑桩与虚土桩界面的耦合条件, 将式
(41)和(42)代入边界条件式(11)和(12)后可得:

$$C_n^P e^{\alpha_n^P H^P} + D_n^P e^{-\alpha_n^P H^P} = C_n^{FP} e^{\alpha_n^{FP} H^P} + D_n^{FP} e^{-\alpha_n^{FP} H^P} \quad (49)$$

$$\frac{(\lambda^P + 2G^P + i\omega\eta^P) \alpha_n^P}{(\lambda_2^S + 2G_2^S + i\omega\eta_2^S) \alpha_n^{FP}} \int_0^{r_0} I_0(\beta_n^P r) r dr = \frac{(C_n^{FP} e^{\alpha_n^{FP} H^P} - D_n^{FP} e^{-\alpha_n^{FP} H^P})}{(C_n^P e^{\alpha_n^P H^P} - D_n^P e^{-\alpha_n^P H^P})} \int_0^{r_0} I_0(\beta_n^{FP} r) r dr \quad (50)$$

联立式(47)~(50)可求解得到大直径桩位移解
待定系数的具体形式:

$$C_n^P = \frac{\gamma_n P(\omega) e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi')}{(\xi' - \xi) + e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi')} \quad (51)$$

$$D_n^P = \frac{\gamma_n P(\omega) (\xi - \xi')}{(\xi' - \xi) + e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi')} \quad (52)$$

式中: $\xi = (\lambda^P + 2G^P + i\omega\eta^P)(\chi_n e^{\alpha_n^{FP} H^P} + e^{-\alpha_n^{FP} H^P}) \alpha_n^P \int_0^{r_0} I_0(\beta_n^P r) r dr;$
 $\xi' = (\lambda_2^S + 2G_2^S + i\omega\eta_2^S)(\chi_n e^{\alpha_n^{FP} H^P} - e^{-\alpha_n^{FP} H^P}) \alpha_n^{FP} \int_0^{r_0} I_0(\beta_n^{FP} r) r dr.$

2.2.4 桩顶动力阻抗

将待定系数代入式(41)可得大直径桩桩顶 ($z = 0$)
纵向振动位移频响函数:

$$U^P = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n P(\omega) [e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi') - (\xi' - \xi)]}{e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi') + (\xi' - \xi)} I_0(\beta_n^P r) \quad (53)$$

桩顶动力阻抗则可进一步表示为:

$$K_d = \frac{P(\omega)}{U^P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi') + (\xi' - \xi)}{\gamma_n I_0(\beta_n^P r) [e^{-2\alpha_n^P H^P} (\xi + \xi') - (\xi' - \xi)]} \quad (54)$$

桩顶动力阻抗为复数, 其实部代表动刚度, 虚部
代表动阻尼, 具体可表示为:

$$K_d = K_r + iK_i \quad (55)$$

根据式(53)可进一步得到桩顶速度频域和时
域解:

$$V^P(z, r, \omega) = i\omega U^P(z, r, \omega) \quad (56)$$

$$v^P(z, r, t) = \text{IFT}[i\omega U^P(z, r, \omega)] \quad (57)$$

式中: V^P 和 v^P 分别为桩顶速度频域解析解和时域半
解析解; IFT为傅里叶逆变换.

3 模型验证及参数化分析

如无特殊说明,本节数值算例中桩-土体系参数参照已有文献[17,20]按如下取值: $H^p = 10\text{ m}$, $r_0 = 0.5\text{ m}$, $r_h = 0.02\text{ m}$, $H^{FP} = 0.5\text{ m}$, $G_1^S = 5\text{ MPa}$, $G_2^S = 20\text{ GPa}$, $\mu_j^S = 0.3$, $\rho_j^S = 1800\text{ kg/m}^3$, $E^p = 25\text{ GPa}$, $\rho^p = 2500\text{ kg/m}^3$, $\mu^p = 0.15$, $\eta^p = 1 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$.

在应用本文方法对大直径浮承桩进行抗振防振设计以及对桩身完整性进行评价时,桩长、桩径、桩身密度、弹性模量、土体密度、剪切模量等可通过现场或室内试验测量的参数,根据实际工程情况取值;泊松比、材料阻尼等无法实测的参数,可参照已有相关研究取值[21].

3.1 模型验证

3.1.1 本文解与已有解退化验证

为更合理地考虑桩底土波动效应的影响,吴文兵等[14]将桩和桩底土简化为 Euler-Bernoulli 杆,提出了一维虚土桩模型,探讨了虚土桩参数对浮承桩纵向振动特性的影响规律. Liu 等[20]将桩底考虑为固端支撑,基于三维波动理论建立了大直径端承桩纵向振动理论模型,并基于此分析了桩身三维波动效应对端承桩纵向振动特性的影响.结合一维虚土桩模型和三维波动理论,本文进一步提出了对于大直径浮承桩适用性更好的三维虚土桩模型.

为验证所建立解析模型及所得解的合理性和准确性,令径向模态特征值 $\beta_n^p = \beta_n^p = 0$,可将本文解退化到一维浮承桩与吴文兵等[14]的已有解对比;而令虚土桩桩长 $H^{FP} = 0$,则可将本文解退化到三维端承桩与 Liu 等[20]的已有解对比.本文退化解与已有解对比情况具体如图 2 和图 3 所示.由图 2 和图 3 可见,本文一维浮承退化解和三维端承退化解与已有解吻合良好.

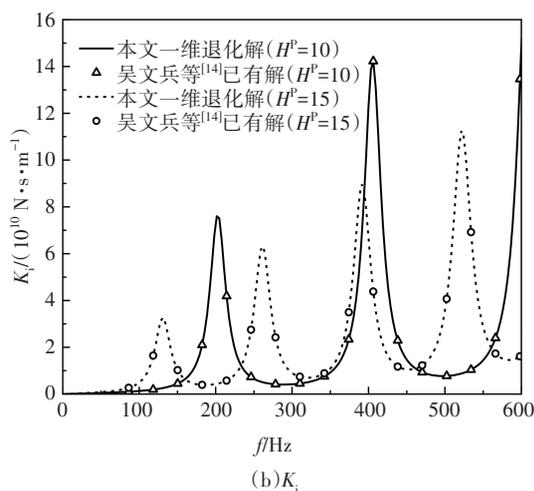
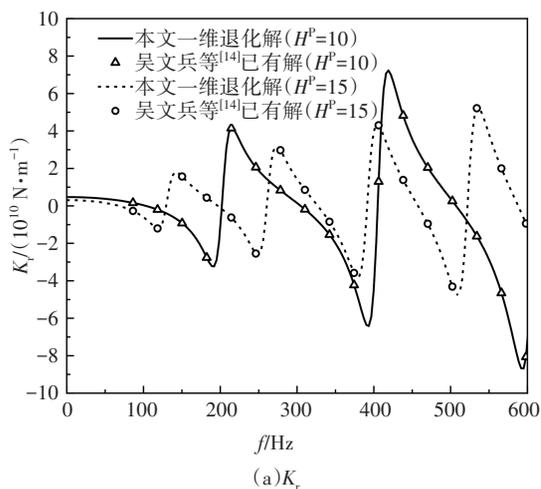


图 2 本文解退化到一维浮承桩与吴文兵等[14]已有解对比情况

Fig.2 Comparison of the 1D floating pile reduction form of the proposed solution with the existing solution of Wu *et al*[14]

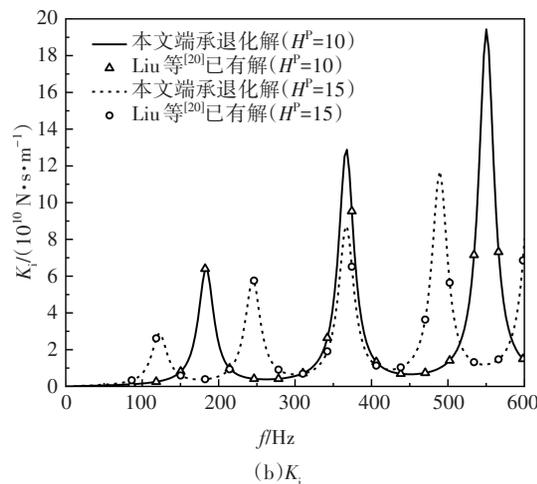
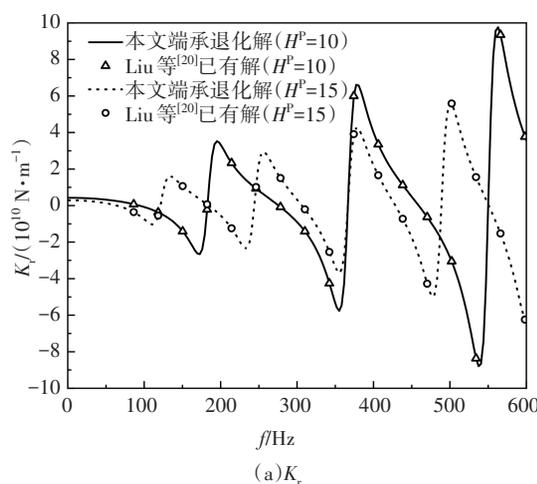


图 3 本文解退化到三维端承桩与 Liu 等[20]已有解对比情况

Fig.3 Comparison of the 3D end-bearing pile reduction form of the proposed solution with the existing solution of Liu *et al*[20]

3.1.2 本分解与已有实测案例对比验证

郑长杰等^[1]给出了桩-土参数为： $H^p = 10\text{ m}$ ， $r_0 = 0.55\text{ m}$ ， $r_h = 0.01\text{ m}$ ， $G_1^s = 25\text{ MPa}$ ， $G_2^s = 50\text{ MPa}$ ， $\mu_j^s = 0.4$ ， $\rho_j^s = 1\ 800\text{ kg/m}^3$ ， $\mu^p = 0.17$ ， $\rho^p = 2\ 400\text{ kg/m}^3$ ， $E^p = 32\text{ GPa}$ 时实测桩顶速度反射波曲线，将相关参数代入式(57)中可得本文所得桩顶速度时域半解析解与实测曲线间的对比情况，如图4所示。

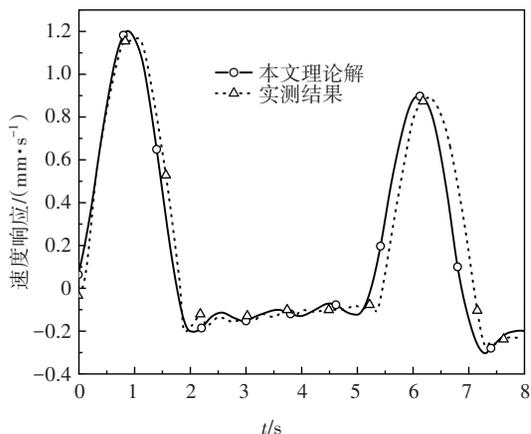


图4 本文理论解与实测结果对比

Fig.4 Comparison of the current solution and measured data

此外，图5给出了相同参数体系下本文桩顶速度时域半解析解与Chow等^[22]三维有限元计算结果的对比。综合图4和图5可见，本文桩顶速度时域半解析解与有限元计算结果及现场试验实测结果吻合较好。

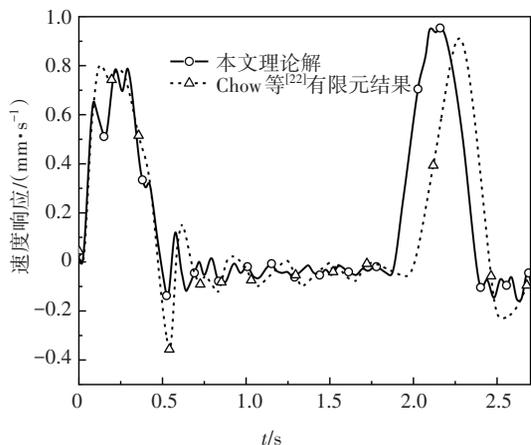


图5 本文理论解与有限元计算结果对比

Fig.5 Comparison of the current solution and FEM results

3.2 桩顶纵向振动特性参数化分析

3.2.1 三维桩径向位置的影响

为探讨桩截面径向位置对桩顶纵向振动特性的影响规律，选取桩顶截面动力阻抗曲线上第三个峰值点处动刚度值 $K_r F_3$ 和动阻尼值 $K_i F_3$ ，并按式(58)和(59)对 $K_r F_3$ 和 $K_i F_3$ 进行无量纲化后分析其沿桩截面

径向位置的变化情况。

$$K_r - R(\bar{r}) = \frac{K_r F_3(\bar{r}) - K_r F_3(0)}{K_r F_3(0)} \quad (58)$$

$$K_i - R(\bar{r}) = \frac{K_i F_3(\bar{r}) - K_i F_3(0)}{K_i F_3(0)} \quad (59)$$

式中： $K_r - R$ 和 $K_i - R$ 分别为 $K_r F_3$ 和 $K_i F_3$ 的无量纲参数； $\bar{r} = r/r_0$ ，为半径 r 的无量纲参数； $K_r F_3(0)$ 和 $K_i F_3(0)$ 分别为桩中心处第三峰值点动刚度和动阻尼值。

不同桩径(长径比)情况下， $K_r - R$ 和 $K_i - R$ 随无量纲径向位置 \bar{r} 的变化规律如图6所示。由图6可见， $K_r - R$ 和 $K_i - R$ 均为负值，结合式(58)和(59)的定义可知，桩中心处的动刚度和动阻尼值最大，且呈现由桩中心向桩边缘减小的趋势。此外，随着桩径的增大(桩长径比减小)，桩边缘处与桩中心处动力阻抗值的差距增大，也就是说大直径桩动力阻抗的径向不均匀性更为明显，因此，本文提出的三维桩身模型对于大直径桩纵向振动问题适用性更好。

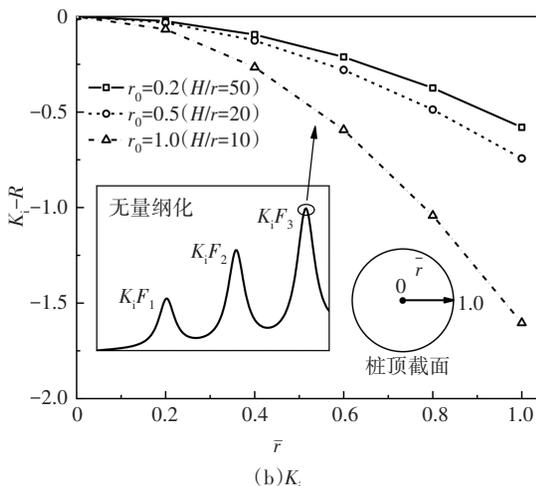
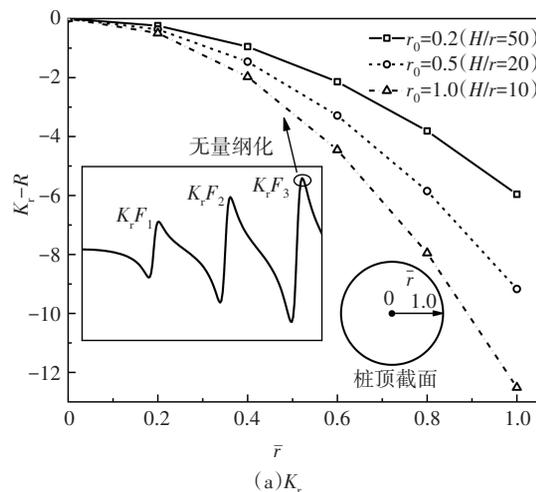


图6 桩身径向位置对桩顶动力阻抗的影响

Fig.6 Effect of radial location of pile cross-section on the dynamic impedance of pile head

3.2.2 三维虚土桩参数的影响

三维虚土桩桩长对桩顶动力阻抗的影响如图 7 所示.为进一步对比分析本文提出的三维虚土桩与已有一维虚土桩模型的差异,图 7 同时给出了桩顶动力阻抗随一维虚土桩长度的变化情况,图中 H^{1DFP} 即为一维虚土桩的桩长.由图可见,三维虚土桩模型与一维虚土桩模型计算结果差异性主要体现在以下两个方面:

- 1) 基于三维虚土桩模型计算所得桩顶动力阻抗振动幅值和频率均较一维虚土桩模型小;
- 2) 三维虚土桩桩长对动力阻抗的振幅和频率均有较明显影响,具体而言三维虚土桩桩长的增加会使得桩顶动力阻抗振幅和频率减小,不同地,一维虚土桩桩长对桩顶动力阻抗的影响则可忽略.

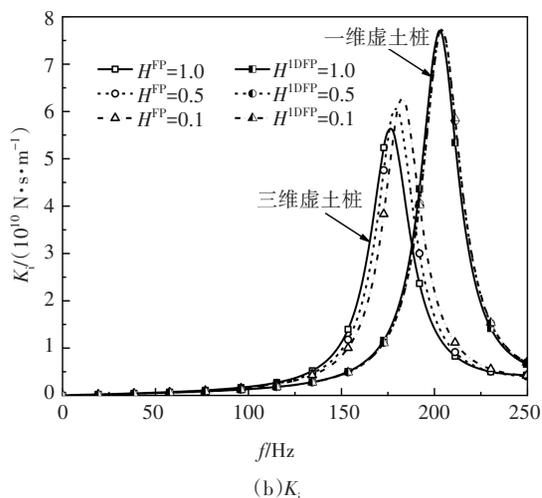
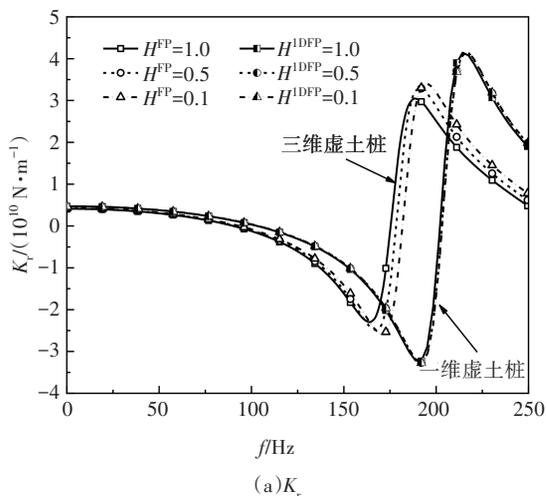


图 7 虚土桩桩长对桩顶动力阻抗的影响

Fig.7 Effect of length of TFSP(FSP) on the dynamic impedance of pile head

因可归结为:一维虚土桩模型将实体桩和虚土桩简化为 Euler-Bernoulli 杆,仅考虑桩身纵向波动效应的影响,而三维虚土桩模型中实体桩和虚土桩控制方程均基于三维连续介质理论建立,可同时考虑实体桩和桩底土层的纵向和径向波动效应.

结合现象与原因不难发现,实体桩桩身径向波动效应会使得桩顶动力阻抗振动幅值和频率减小,也就是说对于大直径桩采用一维杆模型计算其纵向动力阻抗会过高地估计共振幅值和频率,这对于大直径桩的抗振防振设计是不利的.此外,虚土桩的径向波动效应同样会引起桩顶动力阻抗振幅和频率的减小,且此种减小效应随着虚土桩桩长的增加而更加明显.

三维虚土桩(即桩底土层)剪切模量对桩顶动力阻抗的影响如图 8 所示.由图可见,三维虚土桩剪切

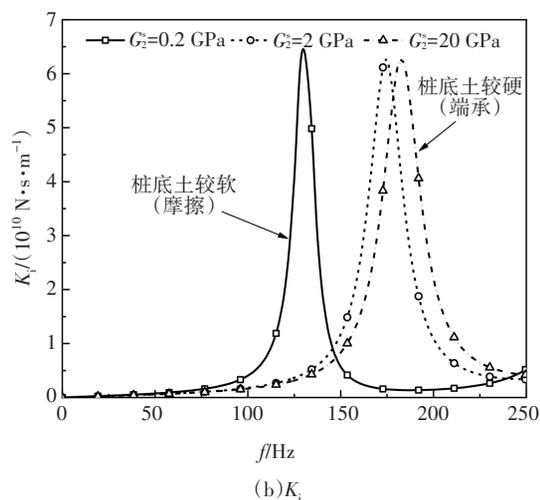
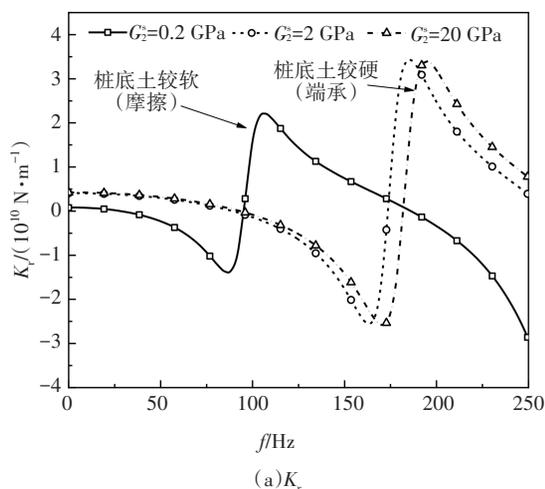


图 8 虚土桩剪切模量对桩顶动力阻抗的影响

Fig.8 Effect of shear modulus of TFSP on the dynamic impedance of pile head

引起这两种模型计算结果呈现上述差异性的原

模量主要影响桩顶动力阻抗的共振频率,共振频率随着桩底土层剪切模量的增加而增大。 $G_2^s = 0.2 \text{ GPa}$ 时极大峰值频率与 $G_2^s = 20 \text{ GPa}$ 时极小峰值频率相对应,这体现出了典型的摩擦桩和端承桩振动特性差异。也就是说,本文所提的三维虚土桩模型不仅对于摩擦桩纵向振动问题具有很好的适用性,而且可以通过调整虚土桩剪切模量将该模型应用于端承桩动力特性分析中。

4 结论

本文基于三维黏弹性连续介质理论,将桩底一维虚土桩模型拓展到三维情况,建立了一种可同时考虑桩身和桩底土径向波动效应的三维虚土桩模型,并推导得出大直径浮承桩桩顶动力阻抗解析解,进而分析了桩顶径向位置及三维虚土桩参数对桩顶动力阻抗的影响情况,计算分析结果表明:

1)大直径桩顶动刚度和动阻尼呈现由桩中心向桩边缘减小的趋势,且桩长径比越小桩顶动力阻抗的径向不均匀性越明显。

2)实体桩桩身径向波动效应会使得桩顶动力阻抗振动幅值和频率减小,对于大直径桩采用一维杆模型计算其纵向动力阻抗会过高地估计共振幅值和频率,不利于大直径桩的抗振防振设计。

3)虚土桩的径向波动效应使得桩顶动力阻抗振幅和频率减小,且此种减小效应随着虚土桩桩长的增加而更加明显。

4)三维虚土桩模型不仅对于大直径浮承桩纵向振动问题具有更好的适用性,而且可以通过调整虚土桩参数将其应用于端承桩动力特性分析中。

本文所得解析解可通过MATLAB实现公式简化计算,进一步结合其中的GUI控件可建立简单、易用的人机交互界面,以便实际工程中桩基动力设计和现场完整性检测的应用。

参考文献

- [1] 郑长杰,丁选明,栾鲁宝,等.低应变瞬态荷载作用下基桩动力响应解析解[J].土木工程学报,2019,52(11):79-85.
ZHENG C J, DING X M, LUAN L B, *et al.* Simplified analytical solution for the dynamic response of piles subjected to low-strain transient loadings[J]. China Civil Engineering Journal, 2019, 52(11): 79-85. (In Chinese)
- [2] 王奎华,刘鑫,吴君涛,等.考虑横向惯性下填砂竹节管桩纵向振动特性[J].湖南大学学报(自然科学版),2020,47(5):58-69.
WANG K H, LIU X, WU J T, *et al.* Longitudinal vibration characteristics of sand-filled nodular pipe pile considering lateral inertial effect[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2020, 47(5): 58-69. (In Chinese)
- [3] MENG K, CUI C Y, LIANG Z M, *et al.* A new approach for longitudinal vibration of a large-diameter floating pipe pile in viscoelastic soil considering the three-dimensional wave effects[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 128: 103840.
- [4] 官文杰,吴文兵,蒋国盛,等.饱和土中非完全黏结管桩纵向振动特性研究[J].湖南大学学报(自然科学版),2021,48(1):46-58.
GUAN W J, WU W B, JIANG G S, *et al.* Study on vertical vibration characteristics of incompletely bonded pipe pile in saturated soil[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2021, 48(1): 46-58. (In Chinese)
- [5] MYLONAKIS G. Winkler modulus for axially loaded piles[J]. Géotechnique, 2001, 51(5): 455-461.
- [6] WANG K H, YANG D Y, ZHANG Z Q, *et al.* A new approach for vertical impedance in radially inhomogeneous soil layer[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 36(6): 697-707.
- [7] WU W B, WANG K H, ZHANG Z Q, *et al.* Soil-pile interaction in the pile vertical vibration considering true three-dimensional wave effect of soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2013, 37(17): 2860-2876.
- [8] FAGHIH NIA TORSHIZI M, SAITOH M, ÁLAMO G M, *et al.* Influence of pile radius on the pile head kinematic bending strains of end-bearing pile groups[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2018, 105: 184-203.
- [9] 孟坤,崔春义,许成顺,等.基于虚土桩模型的三维饱和介质中浮承桩纵向振动特性分析[J].岩土力学,2019,40(11):4313-4323.
MENG K, CUI C Y, XU C S, *et al.* Longitudinal vibration characteristics of floating pile in three-dimensional saturated soils based on virtual soil pile model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(11): 4313-4323. (In Chinese)
- [10] 卢一为,丁选明,刘汉龙,等.均匀黏弹性地基中X形桩纵向振动响应简化解析方法[J].岩土力学,2021,42(9):2472-2479.
LU Y W, DING X M, LIU H L, *et al.* Simplified analytical solution for vertical vibration of X-section pile in homogeneous viscoelastic soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2021, 42(9): 2472-2479. (In Chinese)
- [11] MUKI R, STERNBERG E. Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod[J]. Interna-

- tional Journal of Solids and Structures, 1970, 6(1):69-90.
- [12] ZHENG C J, KOURETZIS G P, SLOAN S W, *et al.* Vertical vibration of an elastic pile embedded in poroelastic soil [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2015, 77:177-181.
- [13] 杨冬英, 王奎华. 非均质土中基于虚土桩法的桩基纵向振动[J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, 44(10): 2021-2028.
YANG D Y, WANG K H. Vertical vibration of pile based on fictitious soil-pile model in inhomogeneous soil [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2010, 44(10): 2021-2028. (In Chinese)
- [14] 吴文兵, 王奎华, 杨冬英, 等. 成层土中基于虚土桩模型的桩基纵向振动响应[J]. 中国公路学报, 2012, 25(2):72-80.
WU W B, WANG K H, YANG D Y, *et al.* Longitudinal dynamic response to the pile embedded in layered soil based on fictitious soil pile model [J]. China Journal of Highway and Transport, 2012, 25(2):72-80. (In Chinese)
- [15] KRAWCZUK M, GRABOWSKA J, PALACZ M. Longitudinal wave propagation. Part I—Comparison of rod theories [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295(3/4/5):461-478.
- [16] 吕述晖, 王奎华, 吴文兵. 考虑横向惯性效应时黏弹性支承桩纵向振动特性研究[J]. 振动工程学报, 2016, 29(4): 679-686.
LÜ S H, WANG K H, WU W B. Longitudinal vibration of viscoelastic bearing piles considering transverse inertia effect [J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(4): 679-686. (In Chinese)
- [17] 李振亚, 王奎华. 考虑横向惯性效应时非均质土中大直径桩纵向振动特性及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(1): 243-253.
- LI Z Y, WANG K H. Vertical vibration of a large diameter pile embedded in inhomogeneous soil considering the transverse inertia effect and its applications [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(1):243-253. (In Chinese)
- [18] 杨骁, 刘慧, 蔡雪琼. 端承粘弹性桩纵向振动的轴对称解析解[J]. 固体力学学报, 2012, 33(4): 423-430.
YANG X, LIU H, CAI X Q. Axisymmetrical analytical solution for vertical vibration of end-bearing viscoelastic pile [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(4): 423-430. (In Chinese)
- [19] 孟坤, 崔春义, 许成顺, 等. 考虑径向波动效应的黏弹性支承桩纵向振动阻抗研究[J]. 振动工程学报, 2019, 32(2):296-304.
MENG K, CUI C Y, XU C S, *et al.* Vertical dynamic impedance of floating pile considering the radial wave effect [J]. Journal of Vibration Engineering, 2019, 32(2):296-304. (In Chinese)
- [20] LIU X, NAGGAR M H E, WANG K H, *et al.* Theoretical analysis of three-dimensional effect in pile integrity test [J]. Computers and Geotechnics, 2020, 127:103765.
- [21] MENG K, SU H F. Analytical model of large-diameter viscoelastic floating pile and application in pile low-strain integrity testing [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2022, 158: 107296.
- [22] CHOW Y K, PHOON K K, CHOW W F, *et al.* Low strain integrity testing of piles: three-dimensional effects [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2003, 129(11): 1057-1062.