

谐波传动空间相伴运动的共轭理论与特性分析

董博,董惠敏[†],王德伦,张楚
(大连理工大学机械工程学院,辽宁大连 116024)

摘要:谐波传动轮齿的相对运动在柔轮壳体空间弹性变形条件下属于空间共轭运动,空间共轭理论是决定其运动与力的传递及综合性能的核心因素.为此,提出了一种基于相伴方法的谐波传动空间共轭运动模型.通过壳体的半无矩理论及各构件间的运动关系,建立壳体中性层母线的直纹面运动方程;根据准不动线条件与中性层母线的直纹面运动,推导出谐波传动轮齿的瞬轴面方程.采用空间运动的相伴方法研究瞬轴面与共轭齿面之间的内在联系,以瞬轴面为原曲面、刚/柔轮齿面为相伴曲面,推导出刚性齿面空间相伴运动的共轭条件式,形成空间相伴运动的共轭模型.将啮合点的相对运动转化为绕瞬轴的螺旋运动,分析瞬轴与啮合点法矢的关系特性;将空间共轭运动退化为平面共轭运动,分析空间共轭与平面共轭的约束特性;将啮合面约束为准不动面,分析准不动面条件下的空间共轭运动特性.从实例仿真分析可知,谐波传动刚性轮齿的平面运动是空间运动退化后的一种特殊运动,谐波传动退化后的空间运动与平面运动一致,这验证了本文所述空间共轭模型与运动特性的正确性.

关键词:谐波传动;空间共轭;相伴方法;瞬轴面;运动学

中图分类号:TH132.43

文献标志码:A

Conjugate Theory and Characteristic Analysis of Spatial Concomitant Motion of Harmonic Drive

DONG Bo, DONG Huimin[†], WANG Delun, ZHANG Chu

(College of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The relative motion between the gear teeth of harmonic drive belongs to the spatial conjugate motion under the spatial elastic deformation condition of the flexspline shell, and its spatial conjugate theory is the core factor that determines its motion and force transmission and comprehensive performance. For this purpose, a spatial conjugate motion model for harmonic drive is proposed based on adjoint approach. By means of the semi-moment theory of the shell and the kinematics between the components, the ruled surface motion equation of the neutral layer generatrix of the shell is established. According to the quasi-fixed line condition and the ruled surface motion of neutral layer generatrix, the axode equation of the gear teeth in harmonic drive is derived. The internal relationship between the axodes and the conjugate tooth surfaces is studied by the adjoint approach. Taking the axodes as the original surfaces and the tooth surfaces of the circular spline / flexspline as the concomitant surfaces, the conjugate condition formula of the spatial concomitant motion of the rigid tooth surface is derived, and the conjugate model of the space con-

* 收稿日期:2021-08-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375065), National Natural Science Foundation of China(51375065)

作者简介:董博(1989—),男,河南周口人,大连理工大学博士研究生

[†] 通信联系人, E-mail: donghm@dlut.edu.cn

comitant motion is formed. The relative motion between the meshing points is transformed into the spiral motion around the instantaneous axis, and the relationship between the instantaneous axis and the normal vector of the meshing point is analyzed. The spatial conjugate motion is degenerated into the planar conjugate motion, and the constraint properties of the spatial conjugate and planar conjugate are analyzed. The plane of action is constrained as a quasi-fixed surface, and the spatial conjugate motion characteristics under the condition of quasi-fixed surface are analyzed. Finally, through the simulation analysis of an example, it can be seen that the plane motion of the rigid gear teeth of harmonic drive is a special motion after the degradation of spatial motion, and the spatial motion after the degradation of harmonic drive is consistent with the plane motion, which verifies the correctness of the spatial conjugate model and motion characteristics described in this paper.

Key words: harmonic drive; space conjugation; adjoint approach; axode; kinematics

谐波齿轮传动在刚性轮齿假设条件下,对于杯型柔轮(一般谐波传动都是杯型柔轮)轮齿间的相对运动在柔轮波发生器作用下属于轴线倾斜的空间共轭运动。目前,谐波齿轮传动轮齿共轭运动的常用方法是采用轴线平行的平面共轭理论进行分析和对主截面进行平面齿形设计^[1-9]。但针对由柔轮空间变形引起的轮齿的空间啮合造成的其他截面的干涉,王家序等^[1]通过线性关系改变柔轮齿根处的壁厚实现其他截面的无干涉啮合,并在后续的改进中^[2-4]通过合理调整柔轮齿径向位置的方法,实现空间无干涉啮合;范元勋等^[5]和 Yu 等^[6]通过改变壁厚和修改变位系数方法实现其他截面的无干涉啮合;Dong 等^[7-9]采用离散方法将空间问题离散为若干平面问题,建立瞬心线法研究轮齿的三维共轭运动,论证了轮齿共轭齿廓应为三维空间曲面。以上的研究为谐波齿轮传动的空间啮合运动提供了可行的研究思路与方法,但均将谐波传动轮齿的空间相对运动问题简化为平面运动问题,以截面齿形代替空间齿形或是对其进行修正。虽然,以平面共轭运动近似处理谐波传动的空间共轭运动不失为一种简单的处理方法,但并非谐波齿轮传动的真实共轭运动,难以揭示轮齿运动的本质。为此,本文从根本上考虑谐波传动柔轮壳体的空间弹性变形,研究轮齿的空间共轭运动及其特性,为空间齿形设计和强度与寿命研究^[10]奠定理论基础。

在谐波齿轮传动中,轮齿视为刚体,由于刚体的空间相对运动可以描述为与刚体分别固连的瞬轴面的滚动和滑动^[11-12],因此轮齿的相对运动可以分解为绕瞬轴的转动和沿瞬轴的移动,其瞬轴面能够表示刚性轮齿的空间相对运动,隐含了刚性轮齿空间运动的内在信息。相伴方法是刚体相对运动分析中

的一种常用方法^[13],以瞬轴面为原曲面,刚性轮齿的齿面为瞬轴面的相伴曲面,采用相伴方法研究瞬轴面与共轭齿面间的内在联系,能够直接揭示刚性轮齿空间相对运动的本质。

为了研究谐波齿轮传动轮齿的空间真实啮合运动,本文提出一种基于相伴方法的谐波传动空间共轭运动模型。将刚/柔轮齿面的相对运动转化为瞬轴面的滚动与滑动,采用瞬轴面和一对共轭齿面的相伴运动方法,推导出谐波传动空间共轭条件式,进而建立瞬轴面与共轭齿面相伴运动的共轭模型;通过所建立的空间共轭模型,分别研究了瞬轴与共轭点法矢的关系特性、空间共轭的退化与约束特性、啮合面为准不动面的空间共轭特性;最后通过实例仿真对空间共轭模型与运动特性进行了验证,为谐波传动的空间共轭理论提供了一种新的共轭运动分析方法。

1 轮齿空间运动的动定瞬轴面

1.1 柔轮壳体中性层母线上的坐标系

谐波传动由波发生器、刚轮和柔轮 3 个构件组成,通常刚轮固定,波发生器输入,柔轮输出,其空间运动分析基于 3 种基本假设:

- 1) 柔轮齿刚性不变形,仅在齿槽中部发生变形。
- 2) 柔轮壳体变形时,柔轮杯底不变形。
- 3) 柔轮壳体中性层与轮齿对称面的交线为一条直线(母线),且相对杯底做三维空间运动。

根据假设,柔轮壳体中性层母线的空间运动是由柔轮啮合端的弹性变形约束及杯底的不变形约束共同确定的。在啮合端,由壳体的半无矩理论可知,其径向位移 w 、周向位移 v 、法向转角 μ 和轴向位移 u 是关于转角 φ (柔轮啮合端相对波发生器长轴转角)

函数. 因此, 在杯底不变形约束条件下, 由柔轮齿啮合端中性层母线与齿宽中截面交点的径向位移 w 、周向位移 v 、法向转角 μ 和轴向位移 u 由壳体的半无矩理论可得:

$$\begin{cases} w = w_0 \cos 2\varphi \\ v = -\int w d\varphi = -0.5w_0 \sin 2\varphi \\ \mu = (1/r_b)(v + \partial w/\partial\varphi) = -(5/2r_b)w_0 \sin 2\varphi \\ u = -r_b \int (\partial v/\partial z) d\varphi = -(r_b/4l_0)w_0 \cos 2\varphi \end{cases} \quad (1)$$

式中: w_0 为柔轮变形时的最大径向变形量 ($w_0 = mc^*$, m 为模数, c^* 为径向变形系数); r_b 为柔轮中性层变形前的半径; l_0 为中性层母线与齿宽中截面交点距杯底的距离.

为了准确地表达谐波传动刚性轮齿间的空间相对运动, 建立 5 个笛卡尔直角坐标系: 刚轮坐标系为 $S_C: \{O_C, X_C, Y_C, Z_C\}$, 柔轮啮合端轮齿坐标系为 $S_f: \{O_f, X_f, Y_f, Z_f\}$, 柔轮过渡坐标系 $S_i: \{O_i, X_i, Y_i, Z_i\}$, 柔轮输出端坐标系 $S_r: \{O_r, X_r, Y_r, Z_r\}$, 波发生器坐标系为 $S_W: \{O_W, X_W, Y_W, Z_W\}$, 各坐标系间的相对位置关系如图 1 所示, 其中, S_f 与 S_i 建立在中性层母线与齿宽中截面交点处, Z_f 轴沿着中性层母线方向, Z_i 轴与 Z_W 轴平行, Y_C 轴为刚轮齿槽对称线, Y_f 轴为柔轮齿对称线, Y_W 轴为波发生器的长轴方向, Z_W 轴为波发生器回转方向, 其相关的运动参数如表 1 所示.

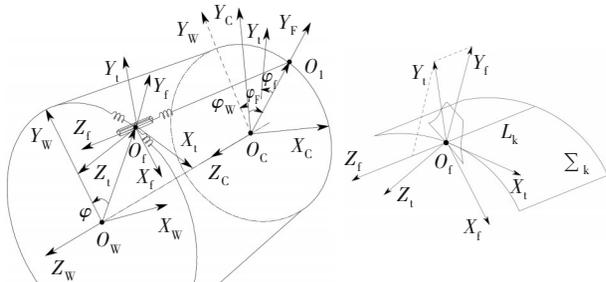


图 1 谐波传动空间坐标系

Fig.1 Spatial coordinates of harmonic drive

表 1 谐波传动运动参数

Tab.1 Motion parameters of harmonic drive

符号	意义
φ_W	Y_W 轴相对 Y_C 轴的逆时针转角
φ_F	Y_f 轴相对 Y_C 轴的顺时针转角
φ_i	Y_i 轴相对 Y_C 轴的转角 ($\varphi_i = \mu$)
φ	柔轮啮合端相对波发生器长轴转角

根据谐波传动原理, 谐波传动刚性轮齿的输入、输出的转角满足:

$$\begin{cases} \varphi_W = \varphi(Z_f/Z_C), \\ \varphi_F = \varphi(Z_f - Z_C)/Z_f \end{cases} \quad (2)$$

式中: Z_f 为柔轮齿数; Z_C 为刚轮齿数.

式(2)建立了各转角与变量 φ 之间的函数关系 $\varphi_W(\varphi)$ 、 $\varphi_F(\varphi)$.

1.2 中性层母线的直纹面运动

以刚性柔轮齿固连的中性层母线 L_k 为参考直线, 则参考直线 L_k 与齿宽中截面的交点为 O_f , 其空间运动轨迹形成直纹面 Σ_k , 如图 1 所示, 则在坐标系 S_f 下的直纹面 Σ_k^f 的矢量方程可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^f(\varphi, \lambda_f) = \mathbf{R}_{O_f}^f(\varphi) + \lambda_f \mathbf{l}_k^f(\varphi) \\ \mathbf{l}_k^f(\varphi) = \frac{\mathbf{R}_{O_f}^f - \mathbf{R}_{O_i}^f}{|\mathbf{R}_{O_f}^f - \mathbf{R}_{O_i}^f|} \\ \mathbf{R}_{O_i}^f = [0, r_b, 0]^T, \mathbf{R}_{O_f}^f = [v, r_b + w, l_0 + u]^T \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{R}_{O_f}^f$ 、 $\mathbf{R}_{O_i}^f$ 分别为点 O_f 、 O_i 点在 S_f 下的矢量, \mathbf{l}_k^f 为中性层母线在 S_f 下的单位矢量; λ_f 为直纹面 Σ_k^f 的直母线参数.

为便于刚性轮齿的运动分析, 需建立各坐标系间的位置关系. 将 S_f 下的直纹面 Σ_k^f 经坐标变换转化到 S_C 坐标系中, 则中性层母线的直纹面 Σ_k^f 在 S_C 中的空间运动轨迹为直纹面 Σ_k^c , 如图 2 所示, 则直纹面 Σ_k^c 的矢量方程可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_k^c(\varphi, \lambda_c) = \mathbf{R}_{O_f}^c(\varphi) + \lambda_c \mathbf{l}_k^c(\varphi) \\ \mathbf{R}_{O_f}^c(\varphi) = \mathbf{B}_{CF} \mathbf{R}_{O_f}^f, \mathbf{l}_k^c(\varphi) = \mathbf{B}_{CF} \mathbf{B}_{Fi} \mathbf{k}_f \\ \mathbf{B}_{CF} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_F & -\sin \varphi_F & 0 \\ \sin \varphi_F & \cos \varphi_F & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{Fi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\mathbf{R}_{O_f}^c$ 为 O_f 点在 S_C 下的矢量; \mathbf{l}_k^c 为中性层母线 O_f 点在 S_C 下的单位矢量, \mathbf{B}_{CF} 、 \mathbf{B}_{Fi} 、 \mathbf{B}_{Fi} 分别为 S_f 相对 S_C 、 S_f 相对 S_f 、 S_i 相对 S_f 的旋转矩阵. 令 a_{ij} 为旋转矩阵 \mathbf{B}_{Fi} 的元素, 则 S_i 相对 S_f 的旋转矩阵 \mathbf{B}_{Fi} 及 \mathbf{B}_{Fi} 可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{Fi} = \mathbf{B}_{Fi} \mathbf{B}_{Fi}, \mathbf{B}_{Fi} = (a_{ij}), i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \\ \mathbf{i}_f = \mathbf{j}_i \times \mathbf{l}_k^f = a_{11} \mathbf{i}_F + b_{11} \mathbf{j}_F + c_{11} \mathbf{k}_F \\ \mathbf{k}_f = \mathbf{l}_k^f \times \mathbf{i}_f = a_{33} \mathbf{i}_F + b_{33} \mathbf{j}_F + c_{33} \mathbf{k}_F \\ \mathbf{j}_f = \mathbf{k}_f \times \mathbf{i}_f = a_{22} \mathbf{i}_F + b_{22} \mathbf{j}_F + c_{22} \mathbf{k}_F \end{cases} \quad (5)$$

式中: \mathbf{i}_i 、 \mathbf{j}_i 、 \mathbf{k}_i 分别为坐标系 S_i 的单位方向矢量; \mathbf{i}_F 、 \mathbf{j}_F 、 \mathbf{k}_F 分别为坐标系 S_f 的单位方向矢量.

式(3)~式(5)建立了各坐标系间的位置关系及中性层母线的直纹面方程.

1.3 轮齿的动定瞬轴面

刚性轮齿的空间相对运动可以描述为与轮齿分别固连的瞬轴面的滚动与滑动,若直线 L_s 恰为轮齿空间相对运动的瞬时运动螺旋轴(瞬轴 ISA),则直线 L_s 需满足准不动条件^[21]:直线上各点 P_i 的速度相等;方向沿着直线方向不变.

从而满足 $d\mathbf{l}^c/d\varphi = 0$ (速度相等)、 $(d\mathbf{R}_p^c/d\varphi) \times \mathbf{l}^c = 0$ (方向不变).瞬轴 L_s 在 S_c 下的运动轨迹形成定瞬轴面 Γ_c ,如图 2 所示,由准不动条件①可求得瞬轴的单位方向矢量为:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{l}^c}{d\varphi} = 0, \mathbf{l}^c = \mathbf{B}_{CF} \mathbf{B}_{FI} \mathbf{l}^f \\ \mathbf{l}^f = [\sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \sin \theta_2, \cos \theta_1]^T \end{cases} \quad (6)$$

式中: \mathbf{l}^f 、 \mathbf{l}^c 分别为瞬轴在 S_f 、 S_c 下的单位矢量; θ_1 、 θ_2 为矢量 \mathbf{l}^f 在 S_f 下的方向角, θ_1 为矢量 \mathbf{l}^f 与 Z_f 轴之间的夹角, θ_2 为 X_f 轴与矢量 \mathbf{l}^f 在坐标平面 $O_f-X_fY_f$ 上投影量的夹角.

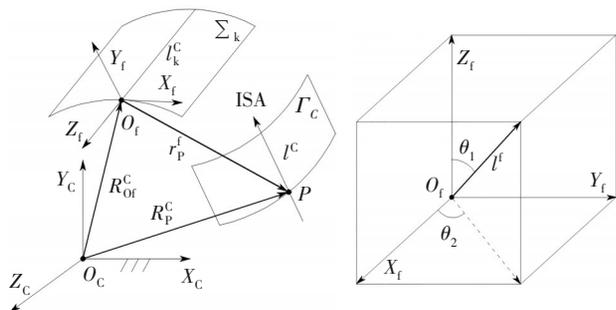


图 2 中性层母线的直纹面与瞬轴面

Fig.2 Ruled surface of neutral layer generatrix and axode

将式(4)、式(5)中的 \mathbf{B}_{CF} 、 \mathbf{B}_{FI} 代入式(6),可获得两个独立标量方程,因此可求出瞬轴的方向 \mathbf{l}^c 与变量 φ 之间的关系 ($\theta_1(\varphi)$ 、 $\theta_2(\varphi)$).

由准不动条件②可求得瞬轴的位置矢量为:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{R}_p^c}{d\varphi} \times \mathbf{l}^c = 0, \mathbf{R}_p^c = \mathbf{R}_{Of}^c + \mathbf{r}_p^c \\ \mathbf{r}_p^c = \mathbf{B}_{CF} \mathbf{B}_{FI} \mathbf{r}_p^f, \mathbf{r}_p^f = [u_1, u_2, u_3]^T \end{cases} \quad (7)$$

式中: \mathbf{R}_p^c 为瞬轴上 P 点在 S_c 下的矢量; \mathbf{r}_p^c 为瞬轴上 P 点在 S_f 下的矢量; u_1 、 u_2 、 u_3 为 P 点在 S_f 下的相对坐标分量.

将式(6)中的 $\theta_1(\varphi)$ 、 $\theta_2(\varphi)$ 代入式(7),可获得 3 个标量方程,因此可求出瞬轴的位置矢量与变量 φ 之间的关系 ($u_1(\varphi)$ 、 $u_2(\varphi)$ 、 $u_3(\varphi)$). 联立式(6)和式(7)可获得 S_f 下的动瞬轴面 Γ_f 、 S_c 下的定瞬轴面 Γ_c . 动定瞬轴面可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_c = \mathbf{R}_p^c + \lambda_c \mathbf{l}^c \\ \mathbf{R}_f = \mathbf{r}_p^f + \lambda_f \mathbf{l}^f \end{cases} \quad (8)$$

式中: λ_c 为定瞬轴面 Γ_c 的直母线参数, λ_f 为动瞬轴面 Γ_f 的直母线参数.

2 空间相伴运动的共轭模型

2.1 齿面与瞬轴面的相伴运动

以动瞬轴面 Γ_f 和定瞬轴面 Γ_c 为原曲面,则柔轮刚性齿面 C_f 与刚轮刚性齿面 C_c 分别为 Γ_f 和 Γ_c 的相伴曲面,如图 3 所示.由于瞬轴面的腰线具有唯一性,能够反映出瞬轴面的几何特征,因此由公式(8)可得由腰线为准线的动定瞬轴面可表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i(\varphi, \lambda_i) = \boldsymbol{\rho}_i + \lambda_i \mathbf{l}^i, i = f, c \\ \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}_p^i + b_i \mathbf{l}^i, b_i = -(\frac{d\mathbf{R}_p^i}{d\varphi} \cdot \frac{d\mathbf{l}^i}{d\varphi}) / (\frac{d\mathbf{l}^i}{d\varphi})^2 \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{\rho}_i$ 为瞬轴面的腰线在 S_i 下的矢量; b_i 为腰准距.

式(9)建立了瞬轴腰线 $\boldsymbol{\rho}_i$ 及腰准距 b_i 与变量 φ 之间的函数关系 ($\boldsymbol{\rho}_i(\varphi)$ 、 $b_i(\varphi)$).

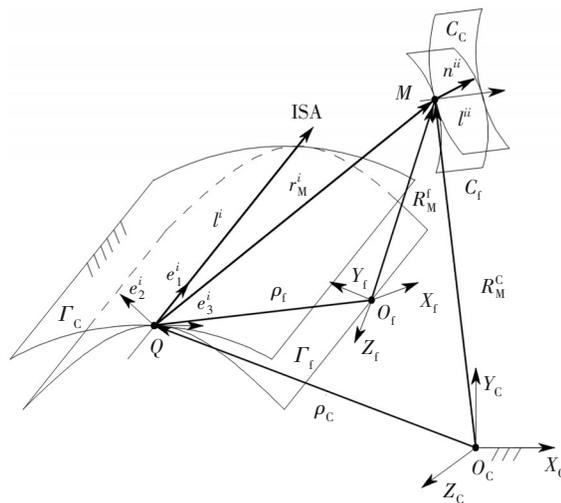


图 3 刚性齿面与瞬轴面的相伴运动

Fig.3 Concomitant motion of rigid tooth surfaces and axodes

在动定瞬轴面的腰线 $\boldsymbol{\rho}_i(\varphi)$ 上分别建立 Frenet 标架 $S^i: \{\boldsymbol{\rho}_i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$, 其中, $\mathbf{e}_1^i = \mathbf{l}^i$, $\mathbf{e}_2^i = d\mathbf{l}^i/d\sigma_i$, $\mathbf{e}_3^i = \mathbf{e}_1^i \mathbf{e}_2^i$, 且 S^i 与 S^c 在任意时刻重合,它们之间的关系满足 $d\sigma_f = d\sigma_c = |d\mathbf{l}^c/d\varphi| d\varphi$ (σ_f/σ_c 为动定瞬轴面的直母线单位方向矢量的球面像曲线弧长参数). Frenet 标架 $S^i: \{\boldsymbol{\rho}_i, \mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$ 的微分运算公式可表示为: $d\boldsymbol{\rho}_i/d\sigma_i = \alpha_i \mathbf{e}_1^i + \gamma_i \mathbf{e}_2^i$, $d\mathbf{e}_1^i/d\sigma_i = \mathbf{e}_2^i$, $d\mathbf{e}_2^i/d\sigma_i = -\mathbf{e}_1^i + \beta_i \mathbf{e}_3^i$, $d\mathbf{e}_3^i/d\sigma_i = -\beta_i \mathbf{e}_2^i$, 其中: α_i 为瞬轴面 Γ_i 的腰线切矢与直母线 \mathbf{l}^i 夹角函数; β_i 为瞬轴面 Γ_i 直母线 \mathbf{l}^i 球面像曲线的测地

曲率; γ_i 为瞬轴面的分布函数. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为瞬轴面的结构参数, 描述了瞬轴面的形状和结构特性, 可表示为:

$$\begin{cases} \alpha_i = \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}_i}{d\varphi} \cdot \boldsymbol{l}^i \right) \bigg/ \left| \frac{d\boldsymbol{l}^i}{d\varphi} \right|, \beta_i = \left(\boldsymbol{l}_k^i, \frac{d\boldsymbol{l}^i}{d\varphi}, \frac{d^2\boldsymbol{l}^i}{d\varphi^2} \right) \bigg/ \left| \frac{d\boldsymbol{l}^i}{d\varphi} \right|^3 \\ \gamma_i = \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}_i}{d\varphi}, \boldsymbol{l}^i, \frac{d\boldsymbol{l}^i}{d\varphi} \right) \bigg/ \left| \frac{d\boldsymbol{l}^i}{d\varphi} \right|^2 \end{cases} \quad (10)$$

在刚性齿面的假设条件下, 设轮齿齿面 C_i 为直纹面, 齿面 C_i 上的点 M 在轮齿坐标系 S_i 下的位置矢量为 \boldsymbol{R}_M^i , 直纹面上的 M 点在 Frenet 标架下的位置矢量为 \boldsymbol{r}_M^i , 轮齿齿面直母线的方向矢量在 Frenet 标架 S^i 下为 \boldsymbol{l}^i , 轮齿齿面在 M 点处的法矢在 Frenet 标架 S^i 下为 \boldsymbol{n}^i . 由于瞬轴面 Γ_i 与轮齿齿面 C_i 为两个相伴曲面, 因此在轮齿坐标系 S_i 下齿面 C_i 的位置矢量 \boldsymbol{R}_M^i 可表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_M^i(\varphi, \lambda_{ii}) = \boldsymbol{R}_M^i + \lambda_{ii}\boldsymbol{l}^i = (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{r}_M^i) + \lambda_{ii}\boldsymbol{l}^i \\ \boldsymbol{r}_M^i = u_1\boldsymbol{e}_1^i + u_2\boldsymbol{e}_2^i + u_3\boldsymbol{e}_3^i \\ \boldsymbol{l}^i = l_1\boldsymbol{e}_1^i + l_2\boldsymbol{e}_2^i + l_3\boldsymbol{e}_3^i \\ \boldsymbol{n}^i = \boldsymbol{l}^i \times (d\boldsymbol{r}_M^i/d\varphi) = n_1\boldsymbol{e}_1^i + n_2\boldsymbol{e}_2^i + n_3\boldsymbol{e}_3^i \end{cases} \quad (11)$$

式中: u_1, u_2, u_3 为 M 点在 Frenet 标架 S^i 中的相对坐标分量; l_1, l_2, l_3 为方向矢量 \boldsymbol{l}^i 在 Frenet 标架 S^i 中的相对坐标分量; n_1, n_2, n_3 为 M 点处的法矢 \boldsymbol{n}^i 在 Frenet 标架 S^i 中的相对坐标分量.

式(11)建立了齿面与瞬轴面的相伴运动关系.

2.2 基于相伴方法的共轭条件

由空间共轭基本原理可知, 啮合点处的相对运动速度在齿面公法线方向的投影为零, 结合 2.1 节齿面与瞬轴面的相伴运动, 则齿面上共轭点的相对运动速度可表示为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}^{cf} = \frac{d\boldsymbol{R}_M^i}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}_M^i}{d\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{dt} \\ \frac{d\boldsymbol{R}_M^i}{d\sigma_i} = (\alpha_i - u_2 + \frac{du_1}{d\sigma_i})\boldsymbol{e}_1^i + (u_1 - u_3\beta_i + \frac{du_2}{d\sigma_i})\boldsymbol{e}_2^i + (\gamma_i + u_2\beta_i + \frac{du_3}{d\sigma_i})\boldsymbol{e}_3^i \end{cases} \quad (12)$$

将式(11)与式(12)代入 $\boldsymbol{n}^i \cdot \boldsymbol{V}^{cf} = 0$, 可得基于相伴运动的齿面共轭条件式为:

$$\begin{aligned} (\alpha_i - u_2 + \frac{du_1}{d\sigma_i})n_1 + (u_1 - u_3\beta_i + \frac{du_2}{d\sigma_i})n_2 + (\gamma_i + u_2\beta_i + \frac{du_3}{d\sigma_i})n_3 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

共轭条件式(13)由瞬轴面的结构参数 ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$)、共轭齿面参数 ($u_1, u_2, u_3, l_1, l_2, l_3$) 及齿面微分参数 ($du_1/d\sigma_i, du_2/d\sigma_i, du_3/d\sigma_i$) 三部分组成, 通过共轭条件式(13)建立了瞬轴面与共轭齿面之间的内在联系, 能够清晰明了地表达出采用相伴方法的空间共轭运动机理.

2.3 共轭方程及共轭齿面求解方法

共轭齿面的接触线 \boldsymbol{l}^i 在 Frenet 标架 S^i 下的运动轨迹形成啮合面, 啮合面上任意点只要满足共轭条件式(13)便能成为共轭点, 因此联立式(11)与共轭条件式(13), 可得共轭齿面的共轭方程为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}_M^i(\varphi, \lambda_{ii}) = \boldsymbol{\rho}_i + (u_1 + \lambda_{ii}l_1)\boldsymbol{e}_1^i + (u_2 + \lambda_{ii}l_2)\boldsymbol{e}_2^i + (u_3 + \lambda_{ii}l_3)\boldsymbol{e}_3^i \\ (\alpha_i - u_2 + \frac{du_1}{d\sigma_i})n_1 + (u_1 - u_3\beta_i + \frac{du_2}{d\sigma_i})n_2 + (\gamma_i + u_2\beta_i + \frac{du_3}{d\sigma_i})n_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中: $(u_1 + \lambda_{ii}l_1)\boldsymbol{e}_1^i + (u_2 + \lambda_{ii}l_2)\boldsymbol{e}_2^i + (u_3 + \lambda_{ii}l_3)\boldsymbol{e}_3^i$ 为 Frenet 标架 S^i 下共轭齿面 C_i 的接触线 \boldsymbol{l}^i 的运动轨迹 (啮合面 T_i), 由于任意时刻 Frenet 标架下 S^c 与 S^f 相互重合, 因此在 Frenet 标架下 S^c 与 S^f 的啮合面具有相同的表达式.

式(14)建立了满足相伴运动共轭条件的共轭齿面方程, 并清楚表达出了在 Frenet 标架 S^i 下的啮合面的方程, 在 Frenet 标架 S^i 下的啮合面可作为连接瞬轴面与共轭齿面的桥梁.

谐波传动空间共轭齿面的求解问题可以概述为 3 类基本求解问题: 第 1 类是已知一对轮齿的其中一个 (刚轮或柔轮) 齿面及运动规律, 求啮合面及另一与其共轭的齿面; 第 2 类是已知啮合面及运动规律, 求空间共轭的一对轮齿 (刚轮和柔轮) 齿面; 第 3 类为已知一对轮齿的其中一个 (刚轮或柔轮) 齿面及啮合面, 求运动规律及另一共轭柔轮 (或刚轮) 齿面. 以第 2 类问题为例, 说明共轭齿面的求解方法:

1) 已知在 Frenet 标架 S^i 下的一个啮合面 T_i , 根据式(11)确定啮合面的位置矢量 \boldsymbol{r}_M^i 、方向矢量 \boldsymbol{l}^i 及法向矢量参数 \boldsymbol{n}^i ;

2) 联立式(1)~式(8), 并代入瞬轴面式(9)确定瞬轴面的腰线矢量 $\boldsymbol{\rho}_i(\varphi)$ 及瞬轴方向矢量 $\boldsymbol{l}^i(\varphi)$;

3) 将腰线 $\boldsymbol{\rho}_i(\varphi)$ 及方向矢量 $\boldsymbol{l}^i(\varphi)$ 代入式(10), 求得瞬轴面的结构参数 ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$);

4) 将瞬轴面的结构参数 ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$)、啮合面参数 ($u_j, l_j, n_j, j=1, 2, 3$) 及齿面微分参数 ($du_j/d\sigma_i$) 代入共

轭条件式(13),求得啮合面参数所对应的运动参数 φ 值;

5)将运动参数 φ 值代入式(14),求得空间共轭的刚轮齿面 C_c 及柔轮齿面 C_f .

3 空间相伴共轭运动的特性

3.1 瞬轴与共轭点法矢的关系特性

由于空间任意一点处的相对速度和这个点绕瞬轴做一定的螺旋运动时的线速度相同,因此,当空间共轭齿面的接触线在任意瞬时均为直线时,在任意瞬时接触线上任意一点的相对速度均等于该点绕瞬轴做一定螺旋运动时的线速度.相对速度可表示为 $V^{cf} = dR_M^i/d\varphi = \omega_i l^i \times r_M^i + v_i l^i$ (ω_i 为啮合点的相对速度绕瞬轴的回转角速度, v_i 为该点的相对速度沿瞬轴的滑动速度),将其代入空间共轭基本原理公式 $n^{ii} \cdot V^{cf} = 0$ 可得:

$$n^{ii} \cdot V^{cf} = \omega_i (n^{ii}, l^i, r_M^i) + v_i n^{ii} \cdot l^i = 0 \quad (15)$$

由式(15)可知,当混合积 $(n^{ii}, l^i, r_M^i) = 0$ 时,矢量 n^{ii}, l^i, r_M^i 共面 (n^{ii} 与 l^i 必在一个平面上),此时若想齿面共轭,需要 $n^{ii} \cdot l^i = 0$ (n^{ii} 与 l^i 必相互垂直),因此此时 n^{ii} 与 l^i 必垂直且相交,此时可得出结论:啮合点的公法线与瞬轴垂直相交的充要条件为混合积 (n^{ii}, l^i, r_M^i) 为零.瞬轴与啮合点的公法线垂直并相交是空间共轭的一个特例.

3.2 空间共轭退化为平面共轭的约束特性

当轴线倾斜的空间共轭运动约束为平行轴线时,谐波传动的空间共轭运动就退化为平面共轭运动.因此,平面共轭运动是空间共轭运动的一种特殊形式.为了说明本模型同样适用于平面共轭运动,将谐波传动轮齿的空间共轭问题退化为平面共轭问题(如柔轮为桶形的复式谐波传动,柔轮中性层为柱面^[14]),瞬轴球面像曲线的弧长 σ_i 与准线运动参数 φ 不再相关,因此需重新定义 Frenet 标架.在动定瞬轴面的腰线 ρ_i 上分别重新建立 Frenet 标架 $S_i^i: \{\rho_i, E_1^i, E_2^i, E_3^i\}$,其中, E_1^i 为腰线 ρ_i 的弧长切线方向, E_2^i 为腰线的主法矢方向, $E_3^i = E_1^i \times E_2^i$,则 S_i^i 与 S_i^i 在任意时刻均相互重合,它们之间的关系满足 $ds_i = ds_c = |d\rho_i|$. Frenet 标架 S_i^i 的微分运算式可表示为: $d\rho_i/ds_i = E_1^i$, $dE_1^i/ds_i = k_i E_2^i$, $dE_2^i/ds_i = -k_i E_1^i + \tau_i E_3^i$, $dE_3^i/ds_i = -\tau_i E_2^i$, 其中: $k_i = |d^2\rho_i/ds_i^2|$ 为腰线 ρ_i 在 Q 点处曲率, $\tau_i = (d\rho_i/ds_i, d^2\rho_i/ds_i^2, d^3\rho_i/ds_i^3)/|d^2\rho_i/ds_i^2|^2$ 为腰线 ρ_i 在 Q 点处的挠率.

则基于相伴运动的齿面共轭条件式(13)可转化为:

$$\begin{aligned} (1 - k_i u_2 + \frac{du_1}{ds_i}) n_1 + (k_i u_1 - \tau_i u_3 + \frac{du_2}{ds_i}) n_2 + \\ (\tau_i u_2 + \frac{du_3}{ds_i}) n_3 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

谐波传动轮齿的空间共轭运动退化为平面共轭运动后,动定瞬轴面(退化为两柱面)及共轭齿面在其直母线方向 (Z_i 轴方向) 不产生运动,仅在平面 $X_i Y_i$ 内运动,由式(15)可知,退化为平面共轭运动后,共轭齿面法矢 n^{ii} 与啮合点位置矢量 r_M^i 共线且瞬轴相交于 Q 点,退化后的空间共轭运动在平面 $X_i Y_i$ 内的投影如图4所示.

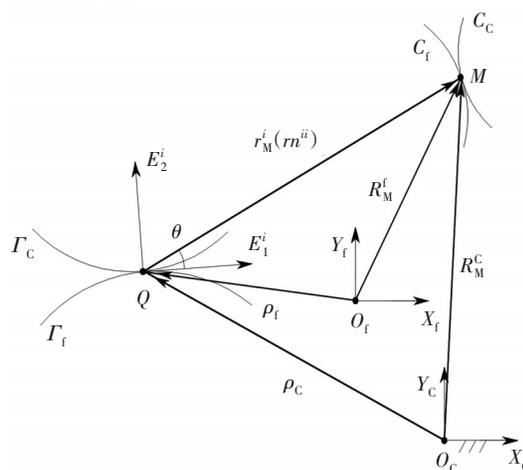


图4 空间共轭退化后的平面相伴运动
Fig.4 Plane concomitant motion after space conjugate degeneration

设 (r_i, θ_i) 为啮合点 M 在 S_f^i 下的极坐标位置,则由公式(11)可得共轭齿面法矢 $n^{ii} (n_1 = \cos\theta, n_2 = \sin\theta, n_3 = 0)$ 及啮合点位置矢量 $r_M^i (u_1 = r \cos\theta, u_2 = r \sin\theta, u_3 = 0)$, 将其代入式(16)可得退化后平面共轭运动的共轭条件为 $dr + \cos\theta ds = 0$, 这与文献[15]推导的结论一致,验证了采用相伴方法的谐波传动刚性轮齿共轭条件的正确性.

3.3 啮合面为准不动面的共轭特性

为证明本文所提出的空间相伴运动共轭模型的通用性与统一性,以啮合面为准不动面(接触线为直线且满足准不动线条件,接触线与啮合线共面)为例,通过本文第2节内容,分析其空间共轭运动特性.如图5所示,由于啮合面为平面 T_i ,设过瞬轴面腰线上的 Q 点做啮合面 T_i 的垂线并与啮合面相交于 M 点,则啮合面 T_i 上的 M 点在 Frenet 标架 S^i 下的位置矢

量可表示为 $r_M^i = pn_j e_j^i$, 其中, p 为瞬轴面腰线上的 Q 点到啮合面 T_i 的距离, 当啮合面 T_i 为准不动面时 ($dR_M^i/d\sigma_i \cdot n^{ii} = 0, dn^{ii}/d\sigma_i = 0$), 将 $n^{ii} = n_j e_j^i$ 与 $R_M^i = \rho_i + r_M^i$ 代入准不动面条件可得: $dn_1/d\sigma_i = n_2, dn_2/d\sigma_i = -n_1 + \beta_1 n_3, dn_3/d\sigma_i = -\beta_1 n_2, dp/d\sigma_i = -\alpha_1 n_1 - \gamma_1 n_3$, 设 C, D 分别为异面直线 l^i 与 n^{ii} 公垂线的垂足, 在 Frenet 标架 S^i 下 C 点及 D 点的位置矢量可表示为 $R_C^i = v_0 e_1^i, R_D^i = r_M^i + \mu l^i - u_0 n^{ii}$, 且满足: $R_{CD}^i \cdot n^i = 0, R_{CD}^i \cdot e_1^i = 0$, 与齿面共轭条件式(13)联立可得

$$\begin{cases} R_{CD}^i = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \frac{n_1}{1 - n_1^2} (-n_3 e_2^{(i)} + n_2 e_3^{(i)}) \\ u_0 = (n_1 \sqrt{1 - n_1^2} \mu + n_1 b_1 - p) / (1 - n_1^2) \\ v_0 = (-n_1 p + \sqrt{1 - n_1^2} \mu + b_1) / (1 - n_1^2) \end{cases} \quad (17)$$

式中: α^*, β^* 为动定瞬轴面的诱导结构参数, 且 $\alpha^* = \alpha_c - \alpha_f, \beta^* = \beta_c - \beta_f$.

由式(17)可知, 公垂线 R_{CD}^i 与参数 μ 无关, 因此, 对于空间共轭齿面, 当啮合面为准不动面时, 其接触线 l^i 上任任意点的法矢与瞬轴夹角相等且法矢与瞬轴公垂线的距离恒定.

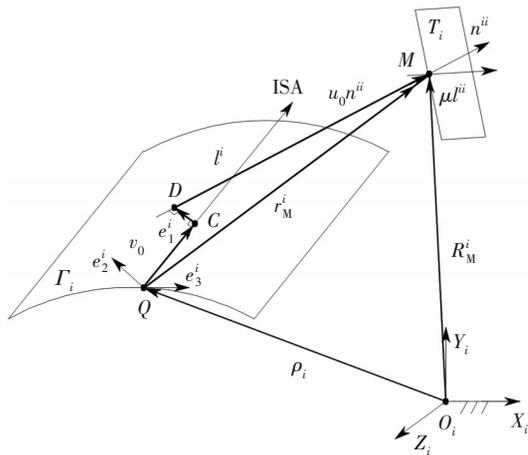


图5 啮合面为准不动面的相伴运动
Fig.5 Concomitant motion of meshing surface with quasi-fixed surface

3.4 实例仿真验证

实例采用凸轮的外轮廓线为余弦曲线的波发生器, 刚轮固定、波发生器输入、杯型柔轮杯底输出, 谐波传动结构如图6所示, 仿真参数如表2所示. 基于本文所建立的瞬轴面的空间相伴共轭方法, 采用 MATLAB 编程对谐波传动的空间运动进行仿真分析, 以检验该方法的准确性. 运动参数 φ 的取值范围

为 $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, 以表2的具体参数仿真轮齿的共轭相伴运动, 仿真结果如图7所示.

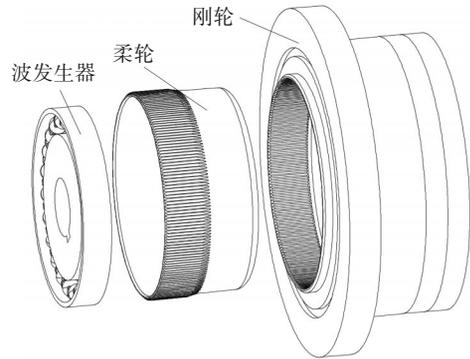
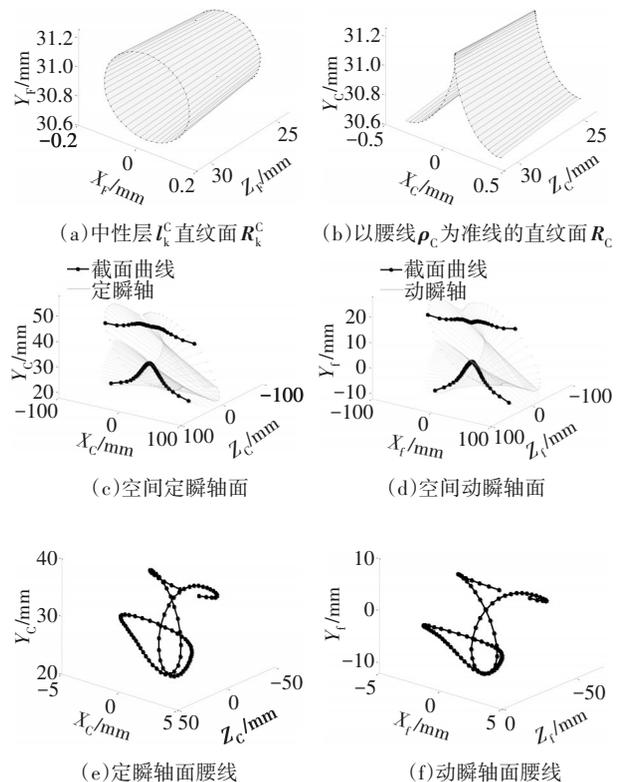


图6 谐波传动结构图
Fig.6 Structural diagram of harmonic drive

表2 仿真参数
Tab.2 Simulation parameters

参数	意义	数值
Z_F	柔轮齿数	240
Z_C	刚轮齿数	242
l_0	齿宽中截面距杯底距离/mm	27.3
r_b	柔轮中性层半径/mm	30.192
m	模数	0.26
c^*	径向变形系数	1



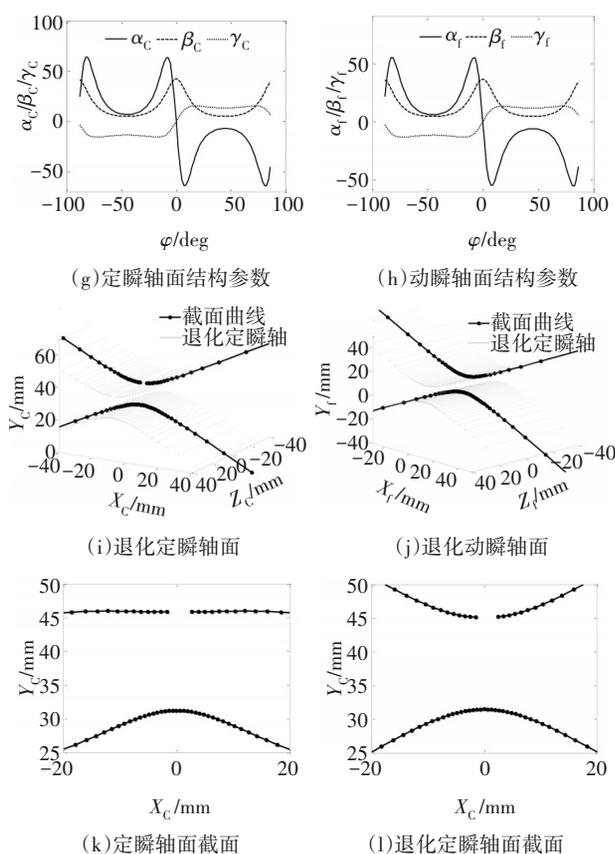


图 7 轮齿空间相伴运动的仿真结果

Fig.7 Simulation results of spatial concomitant motion between gear teeth

由图 7(a)和图 7(b)可知:中性层母线 l_k^c 在 S_c 下的直纹面 R_k^c 关于平面 $X_c Y_c$ 对称,形状为柔轮壳体齿宽前端尖装、齿宽后端尖装变凸的特殊曲面;中性层以腰线 ρ_c 为准线的直纹面 R_c 同样关于平面 $X_c Y_c$ 对称, R_c 与 R_k^c 为不同准线下同一直纹面的不同描述. 由图 7(c)~图 7(l)可知:

- 1) 退化前瞬轴的运动为空间运动,退化后瞬轴的运动为平面运动;
- 2) 退化前后截面均呈现沿 Y 轴对称且不封闭的轨迹线;
- 3) 退化后在开口处存在两条沿 Y 轴对称交叉的渐近线,退化后的瞬轴面截面曲线与文献[16]所述平面瞬心线一致,进一步验证了本文模型的准确性;
- 4) 空间运动与退化平面运动为 2 种不同的运动,说明本文所建立的空间共轭模型的重要意义.

4 结 论

本文所建立的谐波传动空间相伴运动共轭模

型,能够全面考虑柔轮壳体的空间弹性运动,即符合环型柔轮的空间共轭运动的谐波传动,也适用于桶形柔轮的平面共轭运动(如复式谐波传动). 本文的主要贡献有:

- 1) 基于相伴方法建立了谐波传动空间共轭运动模型,以瞬轴面为原曲面,刚性齿面为相伴曲面,推导出基于相伴运动的齿面共轭条件式,建立了瞬轴面的结构参数与共轭齿面参数之间的内在联系,几何意义明确,简明直观.
- 2) 通过瞬轴与共轭齿面法矢的关系特性与分析表明:啮合点的公法线与瞬轴垂直相交的充要条件为混合积 (n^i, l^i, r_m^i) 为零,瞬轴与啮合点的公法线垂直并相交是空间共轭的一个特例.
- 3) 通过空间共轭退化为平面共轭的约束特性与分析表明:谐波传动刚性轮齿的平面运动为空间运动退化后的一种特殊运动,退化后的空间运动的瞬轴面截面曲线与平面运动的瞬心线一致,由此可知空间运动退化后的运动与平面运动一致,模型对一般谐波传动和复式谐波传动具有适应意义.

4) 通过啮合面为准不动面的共轭特性与分析表明:对于空间共轭齿面,当啮合面为准不动面时,在任意共轭瞬时,其接触线上任意点的法矢与瞬轴夹角相等,且接触线上任意点的法矢与瞬轴公垂线的距离恒定.

参考文献

[1] 王家序,袁攀,谭春林,等. 基于齿条近似法的谐波传动空间齿廓设计方法[J]. 吉林大学学报(工学版),2017,47(4):1121-1129.
WANG J X, YUAN P, TAN C L, et al. Spatial tooth profile design of harmonic drive by rack approximation method[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2017, 47(4):1121-1129. (In Chinese)

[2] 王家序,周祥祥,李俊阳,等. 杯形柔轮谐波传动三维双圆弧齿廓设计[J]. 浙江大学学报(工学版),2016,50(4):616-624.
WANG J X, ZHOU X X, LI J Y, et al. Three dimensional profile design of cup harmonic drive with double-circular-arc common-tangent tooth profile [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2016, 50(4):616-624. (In Chinese)

[3] 王家序,周祥祥,李俊阳,等. 公切线式双圆弧齿廓谐波齿轮传动设计[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2016,43(2):56-63.
WANG J X, ZHOU X X, LI J Y, et al. Design of double-circular-

- arc and common tangent tooth profile of harmonic drive[J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2016, 43(2): 56-63. (In Chinese)
- [4] 周祥祥. 三维双圆弧齿廓谐波传动的齿形设计与分析[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
ZHOU X X. Three dimensional profile design and analysis of harmonic drive with double-circular-arc common-tangent tooth profile[D]. Chongqing: Chongqing University, 2016. (In Chinese)
- [5] 范元勋, 王华坤, 宋德锋. 谐波传动共轭齿廓的运动学仿真研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2002, 34(5): 447-450.
FAN Y X, WANG H K, SONG D F. Kinematics computerized simulation for conjugate tooth profiles of harmonic drive[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2002, 34(5): 447-450. (In Chinese)
- [6] YU Z J, LING S Y, WANG X D, *et al.* Study on tooth profile design of harmonic drive with deformation model of flexspline [J]. Meccanica, 2021, 56(7): 1883-1904.
- [7] DONG H M, WANG D L, TING K L. Elastic kinematic and geometric model of harmonic gear drives [C]//Proceedings of ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, August 3-6, 2008, Brooklyn, New York, USA. 2009: 717-725.
- [8] DONG H M, TING K L, WANG D L. Kinematic fundamentals of planar harmonic drives [J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(1): 1-8.
- [9] DONG H M, WANG D L, TING K L. Kinematic effect of the compliant cup in harmonic drives [J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(5): 1-7.
- [10] 叶南海, 邓鑫, 何韵, 等. 谐波柔轮力学分析与疲劳寿命研究 [J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(2): 18-25.
YE N H, DENG X, HE Y, *et al.* Study on mechanical analysis and fatigue life of harmonic flexspline [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2018, 45(2): 18-25. (In Chinese)
- [11] 李特文. 齿轮几何学与应用理论 [M]. 国楷, 叶凌云, 范琳, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2008: 123-136.
LI T W. Gear geometry and applied theory [M]. Translated by GUO K, YE L Y, FAN L, *et al.* Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2008: 123-136.
- [12] 吴序堂. 齿轮啮合原理 [M]. 2版. 西安: 西安交通大学出版社, 2009: 155-166.
WU X T. Theory of gear engagement [M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2009: 155-166. (In Chinese)
- [13] 王德伦, 汪伟. 机构运动微分几何学分析与综合 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2015: 270-305.
WANG D L, WANG W. Kinematic differential geometry and saddle synthesis of linkages [M]. Beijing: China Machine Press, 2015: 270-305. (In Chinese)
- [14] 陈晓霞. 基于侧隙评价的谐波齿轮圆弧齿廓设计及状态仿真研究 [D]. 天津: 天津工业大学, 2012: 36-45.
CHEN X X. Arc tooth profile design and simulation research of harmonic drive based on mesh backlash assessment [D]. Tianjin: Tianjin University of Technology, 2012: 36-45. (In Chinese)
- [15] DONG H M, TING K L, YU B W, *et al.* Differential contact path and conjugate properties of planar gearing transmission [J]. Journal of Mechanical Design, 2012, 134(6): 1-11.
- [16] 董惠敏, 董博, 王德伦, 等. 基于瞬心线的谐波传动双圆弧齿形设计方法 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2020, 48(4): 55-60.
DONG H M, DONG B, WANG D L, *et al.* Double circular arc tooth profile design method of harmonic drives based on centrodes [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2020, 48(4): 55-60. (In Chinese)