

斜拉桥面内竖向固有振动模型及特性影响的有限差分分析

陈柯帆¹, 李源^{1,2†}, 贺拴海^{1,2}, 王康¹, 殷怡萍¹, 宋一凡^{1,2}

(1. 长安大学公路学院, 陕西 西安 710064;

2. 旧桥检测与加固技术交通行业重点实验室(长安大学), 陕西 西安 710064)

摘要:为研究精确且方便的斜拉桥面内竖向模态频率及振型计算方法,建立了用于模拟斜拉桥面内竖向固有振动行为的主梁集中质量参数体系动力学模型.该模型考虑了拉索对主梁的竖向弹性支承作用及对主梁不同截面的水平索力投影,通过引入微梁段两侧剪力以模拟主梁弯曲刚度、拉索间运动耦合作用.基于微梁段间的弯矩平衡和有限差分法,得到了不同体系斜拉桥面内竖向固有振动的频率方程和振型函数,编制了求解程序.通过分别代入相关研究中算例参数、某斜拉桥参数并对比模态参数理论计算结果、实测频率值,验证了本文建模方法及公式的精确度、适用性.参数分析结果表明:斜拉桥低阶面内竖向频率受主梁轴力影响较大,轴力增大后会发生低阶频率的跃迁现象;发生断索对各阶频率值的影响效应与拉索锚固处主梁质点的对应阶次振型参与系数相关.

关键词:斜拉桥;固有振动;动力学模型;有限差分法;模态分析

中图分类号:U441.3 **文献标志码:**A

Influence Analysis on In-plane Vertical Natural Vibration Model of Cable-stayed Bridges Based on Finite Difference Method

CHEN Kefan¹, LI Yuan^{1,2†}, HE Shuanhai^{1,2}, WANG Kang¹, YIN Yiping¹, SONG Yifan^{1,2}

(1. School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2. Key Laboratory of Transport Industry of Bridge Detection & Reinforcement Technology (Chang'an University), Xi'an 710064, China)

Abstract: To propose a precise and convenient solution method for in-plane vertical modes of cable-stayed bridges, a new dynamic model comprised of lumped mass beam segments was established in this paper, which was used to simulate the in-plane vertical natural vibration behavior of cable-stayed bridges. In the model, the cables were reduced to vertical elastic supports and external forces on the girder in the horizontal direction. Additionally, the shear forces on both sides of the micro beam-segment were introduced to simulate the actions of the beam's bending stiffness and the coupled interaction between the cables. Based on the moment equilibrium between the beam segments and the finite difference method, the solutions of the in-plane vertical modal frequencies and shapes

* 收稿日期:2022-06-15

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51978062), National Natural Science Foundation of China(51978062);陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2020JQ-377, 2021JM-174, 2022JQ-415), Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province(2020JQ-377, 2021JM-174, 2022JQ-415)

作者简介:陈柯帆(1995—),男,四川洪雅人,长安大学博士研究生

† 通信联系人, E-mail:liyuan@chd.edu.cn

of cable-stayed bridges of different systems can be obtained. A computational solution program was also developed. The theoretical solutions were compared to field-test results from an actual bridge, confirming that the model and method proposed in this paper can accurately calculate the modal properties of in-plane vertical modes of cable-stayed bridges. The results through parametric analysis showed that the effect of the beam's axial force was more significant on the low-order modal. The phenomenon of a transition on the low-order mode was observed when the axial force was increased to a high value. Moreover, when the cable is broken, the influence on each mode is related to the corresponding mode participation coefficient of the beam segment anchored with the cable.

Key words: cable-stayed bridges; natural vibration; dynamic model; finite difference method; modal analysis

斜拉桥美观、经济、跨越能力强,近年来备受桥梁工程师青睐^[1].与此同时,斜拉桥整体结构复杂,柔度大、阻尼低、刚度不足导致其非线性行为极为突出^[2].尤其当拉索局部模态与斜拉桥整体模态频率比处于“1:2”或“1:1”等固定比例区间时^[3-6],容易在环境激励下,引发拉索剧烈振动,给桥梁安全运营带来了极大隐患.因此,除了目前仅有的有限元方法外^[7-9],如何建立准确的斜拉桥整体动力模型来便捷而又准确地计算斜拉桥竖向整体模态参数,对推动斜拉桥应用与发展至关重要^[10].

近年来,国内外学者围绕斜拉桥整体动力学建模方法,尤其对于斜拉桥主梁在多点弹性支撑作用下的力学行为模拟与分析做了大量研究工作.吴庆雄等^[11]进行了单索-梁结构和二索-梁结构模型固有振动试验,建立了多索-梁结构动力学模型,讨论了斜拉索对索梁结构面内固有振动特性的影响;Cao等^[12]和李专干等^[13]通过建立主梁的分段函数,将主梁和拉索等效为若干独立梁段,基于拉索锚固处的边界条件得到了刚塔柔梁斜拉桥整体动力学建模的运动方程,讨论了结构对称性对动力特性的影响;赵文忠等^[14]通过分段函数求解了三索结构的动力方程,研究了拉索一阶和二阶频率比条件对共振的影响;Cong等^[15]、Kang等^[16-18]、苏潇阳等^[19]建立了多梁弹簧动力学模型,运用传递矩阵法给出了不同体系下斜拉桥整体动力学模型动力学微分控制方程,提出了不同体系斜拉桥竖向刚度评估方法.在此基础上,该课题组还对索拱结构^[20-21]、悬索结构^[22]的面内外固有振动模态参数进行了系统分析与研究.

受限于现有动力学建模方法与整体模态参数计算过程的烦冗,目前关于斜拉桥整体竖向模态的理论计算方法大多高度简化甚至忽略索力水平投影、

振动时拉索间的耦合影响作用、主梁弯曲刚度等因素对结构振动特性的影响,或是迭代解析方法烦琐、复杂,不利于在实际斜拉桥工程中推广与应用.

针对此问题,本文通过离散斜拉桥多点弹性支撑梁的集中质量参数体系,建立了一种新的斜拉桥面内竖向整体动力学模型.该模型考虑了斜拉索对主梁的竖向弹性支撑作用与对水平梁截面的轴力影响,引入微梁段两侧的剪力以模拟主梁弯曲刚度、拉索间振动耦合等影响作用,通过微梁段间的弯矩平衡和有限差分法,修正了不同结构体系斜拉桥面内竖向整体动力学模型的运动方程,结合特征值法给出了斜拉桥面内竖向模态频率及振型计算方法.通过对比参考文献中动力学模型算法案例分析结果与某斜拉桥的实测值,进一步验证了本文关于斜拉桥面内竖向运动参数体系建模方法的适用性和正确性.本文计算方法无须建立大量细化的有限元模型,运用MATLAB、Excel等软件按编码流程即可准确、快速地估算斜拉桥面内竖向模态频率及振型,简化了计算过程,便于工程应用.

1 多点弹性支撑梁的离散模型

约定下标“B”和“C”分别表示梁和索;下标“i”和“j”分别表示索和梁序号($i \in [1, I], j \in [1, J]$).为便于区别有索区梁段与无索区梁段,对于Ci#拉索锚固处的有索区梁段表示为Bj#梁段.建立如图1(a)所示的多索-主梁模型.由于桥面质量远大于拉索质量,本文忽略了拉索振动对主梁振动的影响,将Ci#拉索竖向视为Bj#梁段的弹性支承 k_{BCi} ^[7,10,23-24],水平方向的索力投影等效为Bj#梁段的轴向荷载 H_{BCi} ,定义 H_c 为支座水平力,如图1(b)所示.为了精确模拟和

求解具有分布质量、荷载和多点弹性支撑作用下斜拉桥主梁的动力行为,不考虑主梁的纵向运动,本文将主梁进一步简化为 J 个间距 d 相同、彼此铰接、带有 I 个竖向弹力支承和 I 个不同轴力的集中质量参数体系,主梁的质量和荷载均被视为作用在这些集中质量点之上,独立梁段间彼此通过理想铰连接,如图 1(c)所示。

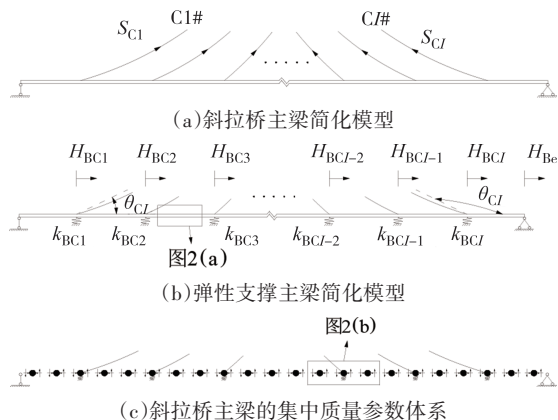


图 1 斜拉桥主梁离散模型的简化流程

Fig.1 The reduction process of main beam of cable-stayed bridges

图 1(b)中, C_i 拉索对 B_j 梁段竖向弹性支承系数 k_{BCi} 为^[7,10,23-24]:

$$k_{BCi} = \frac{E_{Ci} A_{Ci} \sin^2 \theta_{Ci}}{l_{Ci}} \quad (1)$$

式中: E_{Ci} 、 A_{Ci} 分别为 C_i 拉索的弹性模量及截面积; θ_{Ci} 表示 C_i 拉索轴线与主梁大里程方向夹角; l_{Ci} 表示 C_i 拉索上下端锚固点轴向距离. 由于拉索振动中的索力增量远小于拉索初始索力,对于拉索索力的水平投影本文仅考虑初始索力^[25-26]. 因此,主梁上水平轴力 H_{BCi} 和支座水平力 H_{Be} (下标 e 表示边界) 满足:

$$H_{BCi} = S_{Ci} \cos \theta_{Ci}, \quad (2)$$

$$H_{Be} + \sum_{i=1}^I S_{Ci} \cos \theta_{Ci} = 0. \quad (3)$$

式中: S_{Ci} 表示 C_i 拉索初始索力. 图 1(c)中,独立梁段彼此铰接,通过引入离散梁段的左右侧剪力以模拟具有分布质量的主梁竖向弯曲刚度、拉索间振动耦合作用在振动过程中的相互影响. 梁段间的受力如图 2(a)所示,梁段处的受力如图 2(b)和(c)所示。

图 2 中, $F_{B(j-1,j)}$ 、 $F_{B(j,j+1)}$ 表示梁段左右两侧的剪力; $N_{B(j-1,j)}$ 、 $N_{B(j,j+1)}$ 表示梁段左右两侧的轴力; $\bar{M}_{B_{j-1}}$ 、 \bar{M}_{B_j} 表示相邻梁段间的节段左右两侧受到的弯矩作

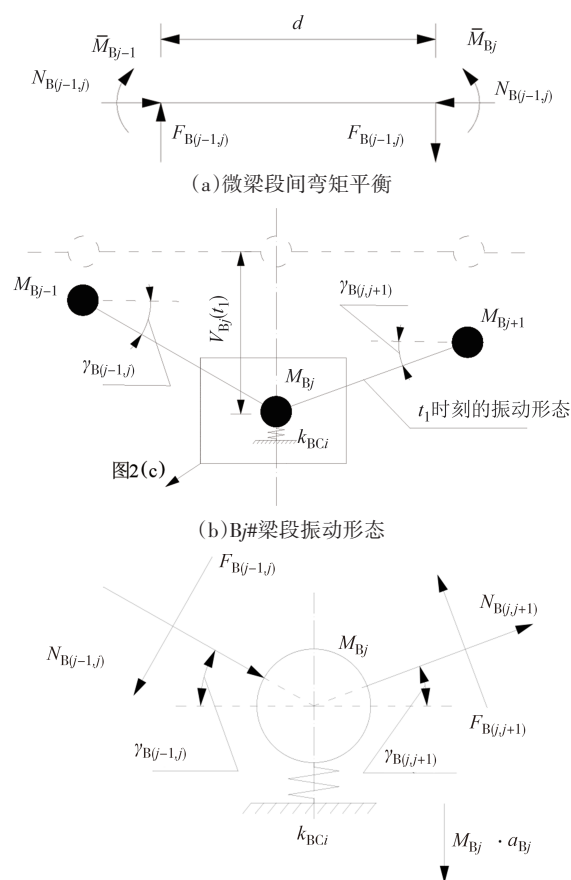


图 2 微梁段受力示意图

Fig.2 The force schematic of the micro-beam segment

用; $\gamma_{B(j-1,j)}$ 、 $\gamma_{B(j,j+1)}$ 表示相邻梁段运动夹角; a_{B_j} 表示梁段运动加速度. 考虑系统初始为平衡状态,基于 D' Alembert 原理可以得到 B_j 梁段在竖向的动力平衡方程:

$$\begin{aligned} -M_{B_j} \ddot{V}_{B_j}(t) - c_{B_j} \dot{V}_{B_j}(t) - F_{B(j-1,j)} \cos \gamma_{B(j-1,j)} + \\ F_{B(j,j+1)} \cos \gamma_{B(j,j+1)} - N_{B(j-1,j)} \sin \gamma_{B(j-1,j)} + \\ N_{B(j,j+1)} \sin \gamma_{B(j,j+1)} - k_{BCi} \cdot V_{B_j} \cdot \delta(j-j_i) - \\ k_T \cdot V_{B_j} \cdot \delta(j-j_T) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $V_{B_j}(t)$ 表示 B_j 梁段与时间相关的竖向振动位移变化因子,后文中简写为 V_{B_j} ; k_{BCi} 表示斜拉桥主塔对主梁面内竖向自由运动的刚度弹簧系数,需依据图纸和规范,以及不同结构体系下塔-梁处的边界条件进行取值. $\delta(j-j_i)$ 为狄拉克(Dirac)函数,由式(5)~式(6)定义:

$$\delta(j-j_i) = 0, j \neq j_i, \quad (5)$$

$$\delta(j-j_i) = 1, j = j_i. \quad (6)$$

值得注意的是,靠近边界的梁段需根据结构体

$$\kappa_T = \frac{k_T}{M_{Bj}} \cdot \delta(j - j_T). \quad (24)$$

式(20)中: ψ_{Bj} 单位与频率一致,是Bj#梁段的局部模态频率方程,表征了Bj#梁段参与整体模态的模态频率,由 κ_{Dj} 、 κ_{Cj} 、 κ_{Sj} 、 κ_T 构成。 κ_{Dj} 表示索力水平投影,即主梁轴力对Bj#梁段局部模态频率的影响; κ_{Cj} 表示拉索竖向弹性支承作用的影响; κ_{Sj} 表示主梁轴力的影响,系数 λ_j 与斜拉桥边界条件有关,具体形式如附表1所示; κ_T 表征了不同结构体系主塔的影响。

2.2 基于特征值法的结构模态分析

参数体系的自由振动方程组——式(17)实际上是一个J维的齐次方程组,方程有解的前提是系数矩阵行列式为0。因此,不计结构阻尼,根据式(17)构造结构特征矩阵形式如下:

$$\mathbf{M}_{Bj} \cdot \ddot{\mathbf{V}}_{Bj} + \mathbf{K}_{Bj} \cdot \mathbf{V}_{Bj} = 0. \quad (25)$$

式中: \mathbf{M}_{Bj} 表示质量对角矩阵; \mathbf{K}_{Bj} 表示主梁的等效刚度矩阵。根据简谐振动理论,构造频率表达式:

$$\Delta = \mathbf{K}_{Bj} - \omega_v^2 \cdot \mathbf{M}_{Bj} = (\tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{Z}} + \kappa_{Cj} + \kappa_T) - \omega_v^2 \cdot \mathbf{M}_{Bj}. \quad (26)$$

式中: $\tilde{\mathbf{T}}$ 、 $\tilde{\mathbf{Z}}$ 分别为主梁轴力及剪力的等效系数矩阵,其具体形式如附录2所示。特征方程式(25)的齐次解是斜拉桥面内固有振动频率 ω_v 的函数,将满足各阶方程的频率值代入式(26)可以解得J个一维向量 ϕ_v ,对应即为该阶竖向振型下各个梁段对应的形状变化坐标,按序依次相连即为该阶斜拉桥面内竖向固有振型,由式(27)定义:

$$[\phi_v, \omega_v] = \text{eig}(\mathbf{K}_{Bj} \cdot \mathbf{M}_{Bj}^{-1}). \quad (27)$$

式中:eig表示求解矩阵特征值与特征向量。采用以上计算公式和流程求解斜拉桥的面内竖向固有振动模态参数,在确定质量矩阵并根据相应结构边界条件选择和编辑相应轴力与剪力系数矩阵后,仅需借助MATLAB、Excel等工具就能简单地计算和求解固有振动频率和振型,无须进行大量细化的有限元建模分析。本文依托MATLAB编制了运行算法程序,其流程如图3所示。

2.3 参考文献算例验证

以2020年Cong团队的双索-梁结构理论解析研

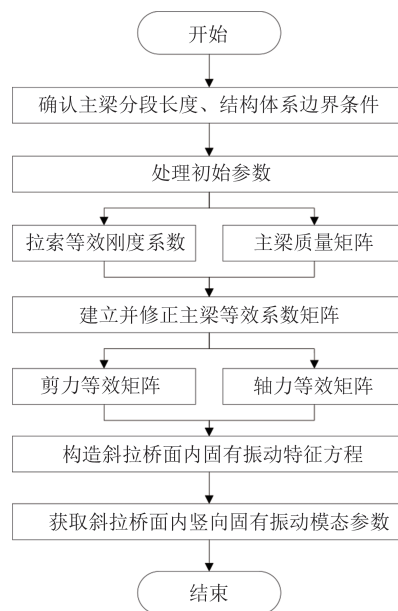


图3 斜拉桥面内竖向固有振动模态参数计算流程

Fig.3 The computation solution process of a cable-stayed bridge's in-plane vertical natural vibration modal properties

究结果为对比对象^[14,28],该研究通过简化斜拉桥为多索-梁动力学模型,考虑结构构件间的几何非线性边界条件,基于传递矩阵法研究了多索斜拉结构的固有振动特性与面内外振动响应。其研究模型如图4所示。

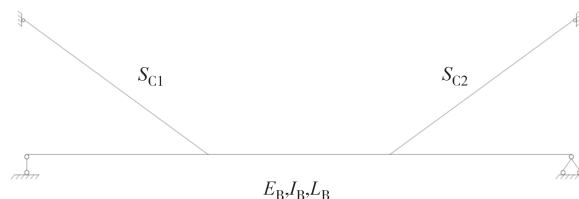


图4 文献[14,28]双索-梁结构示意图

Fig.4 Schematic of a double-cable-beam structure in the references [14,28]

本文代入了文献[14,28]参数,选取主梁划分节段参数 $d=1\text{ m}$,即 $J=300, I=2$,运用MATLAB软件根据图3计算流程编写计算程序,讨论和对比多索斜拉结构的面内固有振动频率及以主梁为主要振型的前五阶振动模态,如表1所示。

表1 两索-梁结构面内竖向固有振动频率

Tab.1 In-pane vertical natural vibration frequencies of the two-cable-beam structure

数据来源	一阶(V1)	二阶(V2)	三阶(V3)	四阶(V4)	五阶(V5)
文献 ^[14,28] 有限元解	0.136 0	0.230 7	0.434 9	0.784 0	1.214 7
文献 ^[14,28] 解析解	0.135 5	0.230 7	0.435 4	0.784 8	1.216 2
本文解析解($d=1$)	0.136 0	0.230 8	0.435 0	0.783 9	1.214 4
与文献有限元解误差/%	0.00	0.43	0.23	0.13	0.25

根据表1,本文解析法得到的频率数值平均绝对误差仅为0.2%,精确度超过了原文解析方法绝对误差1.4%.分别按照本文有限元数值模拟与解析法求解该结构以主梁为主的前五阶固有振型,如图5所示.

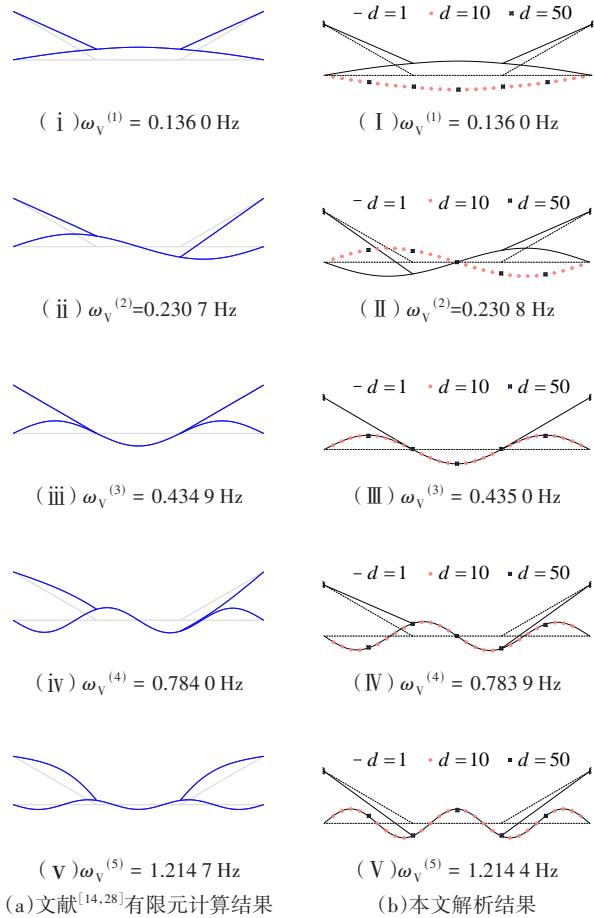


图5 两索-梁结构的竖向振型

Fig.5 Vertical modal shapes of the two cable-beam structure

图5显示两种方法得到的结构振型一致性良好,进一步验证了本文计算方法的有效性和准确性.

3 斜拉桥固有振动特性及影响性分析

3.1 斜拉桥模态分析

以我国西北地区某混凝土斜拉桥为对象开展固有振动特性及其影响参数分析.该桥全长166.8 m (39 m+88.8 m+39 m),采用三跨双台、双塔、双索面对称布置,墩塔处固结,为半漂浮支承体系,其立面图如图6所示.钢筋混凝土主梁由节段预制双箱梁和预制行车道板组合形成,箱梁高1.2 m,桥面净宽8.5 m.在两箱梁间锚固板处设横系梁一道,纵向长约0.22 m,为方便引用,汇总主梁各截面参数设置如表2所示;全桥现有48根斜拉索,从小里程边跨至大里程边跨方向以C1#~C24#对单索面拉索依次编号,参数如表3所示(仅示出一侧,另一侧参数与之相近,斜拉索弹性模量经恩斯特公式修正后取200 GPa).

表2 主梁参数设置表

Tab.2 Parameters of the beam

截面位置	弹性模量/GPa	惯性矩/m ⁴	截面面积/m ²
边跨横系梁	28.0	0.41	2.40
边跨主梁	28.0	1.15	8.75
中跨横系梁	31.5	0.32	1.92
中跨主梁	31.5	1.09	8.27

根据桥梁结构形式,采用商业有限元软件对该桥进行动力特性分析,得到该结构前三阶自振频率、振型特征,如图7所示.

为进一步对比和验证本文解析公式的正确性,采用实桥实测、有限元分析、本文解析三种方法对该桥

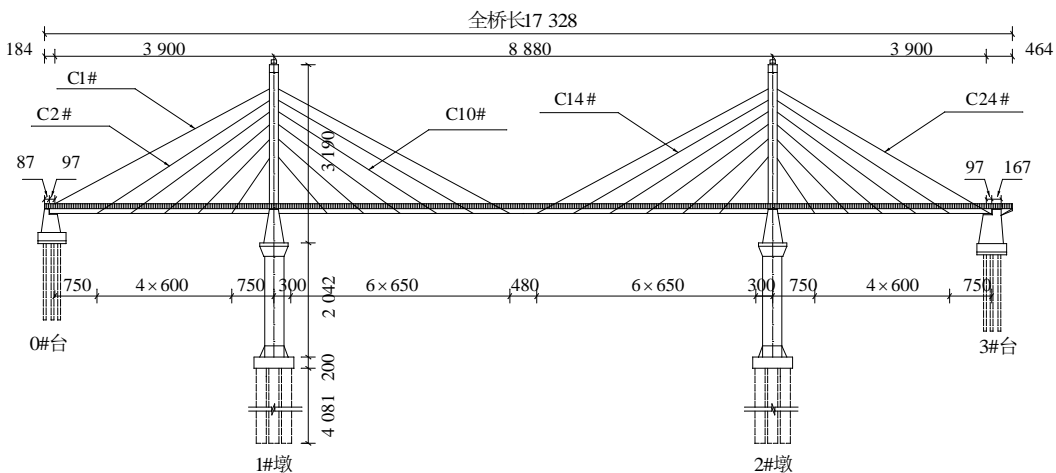
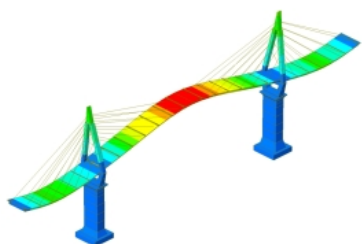


图6 桥梁立面图(单位:cm)

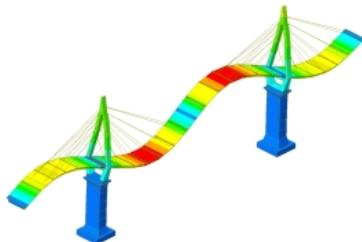
Fig.6 Bridge elevation drawing (unit: mm)

表 3 斜拉索参数设置表
Tab.3 Parameters of stay cables

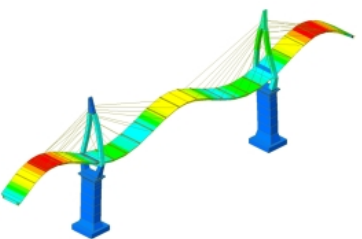
编号	索力/ kN	面积/m ²	索长/ m	编号	索力/ kN	面积/m ²	索长/ m
LC1#	828.8	0.001 7	44.82	LC13#	749.0	0.001 4	45.26
LC2#	756.5	0.001 4	37.29	LC14#	749.0	0.001 4	38.59
LC3#	601.4	0.001 2	31.12	LC15#	614.2	0.001 4	31.99
LC4#	532.4	0.001 2	24.91	LC16#	490.1	0.001 2	25.38
LC5#	424.5	0.001 2	18.65	LC17#	449.9	0.001 2	18.75
LC6#	416.7	0.001 2	12.29	LC18#	409.2	0.001 2	12.11
LC7#	428.0	0.001 2	12.12	LC19#	416.7	0.001 2	12.29
LC8#	452.5	0.001 2	18.75	LC20#	444.7	0.001 2	18.65
LC9#	510.8	0.001 2	25.38	LC21#	585.8	0.001 2	24.91
LC10#	614.2	0.001 4	31.99	LC22#	616.0	0.001 2	31.12
LC11#	771.2	0.001 4	38.59	LC23#	799.7	0.001 4	37.29
LC12#	794.5	0.001 4	45.27	LC24#	743.7	0.001 7	44.82



(a) 第一阶振型($f_1=0.903$ Hz)



(b) 第二阶振型($f_2=1.441$ Hz)



(c) 第三阶振型($f_3=1.973$ Hz)

图 7 有限元法得到的斜拉桥前三阶固有振动模态参数
Fig.7 The first-three order natural modes of the cable-stayed bridge by the finite element model

进行自振特性分析.设置参考算例参数详情如下所示:

1#算例(Referred Case 1#, RC1),实体结构有限元法:根据实际桥梁结构形式,采用商业有限元软件对该桥进行动力特性分析,识别该结构自振频率、振型特征等.

2#算例(Referred Case 2#, RC2),现场实测法:在桥梁边跨 $0.4L$ (L 表示跨径)截面及中跨跨中截面布设加速度传感器,应用脉动激励法进行桥梁结构的振动试验,识别大桥前3阶整体模态的动力特性参数,采用DHSAS频谱分析及模态分析软件对其进行快速傅里叶变换得到相应的功率谱图,再对其作进一步的频谱分析可得到桥梁结构的自振频率、阻尼比.现场动载试验布置如图8所示.



(a) 现场测试基频 (b) 进行动载试验

图 8 现场动载试验

Fig.8 On-site dynamic load test

3#算例(Referred Case 3#, RC3),简化模型解析法:根据本文动力简化模型及振动方程,塔梁连接处按照图纸取 $k_T = 5.3 \times 10^9$ N/m,大小里程结合墩采用简支边界条件,位于主梁同一截面的双索考虑为动力弹簧的并联关系,基于式(17)采取微梁段长度 $d_1 = 0.1$ m,运用MATLAB软件根据图3计算流程编写计算程序,对该结构的面内竖向模态频率和振型进行了计算和分析.

汇总以上工况下得到的该桥以主梁面内竖向为主要振型的前三阶自振频率,如表4所示.

表 4 斜拉桥面内竖向固有振动频率

工况	In-plane vertical natural vibration frequencies of the cable-stayed bridge		
	一阶(V1)	二阶(V2)	三阶(V3)
RC1	0.903	1.441	1.973
RC2	0.879	1.536	1.953
RC3	0.882	1.492	1.860

表4中,若以实桥测得的模态参数为标准,有限元法得到的结果的绝对误差平均值为3.3%,而本文解析法得到的结果的绝对误差平均值为2.7%.此外,相较于其他两种结果,实测频率值整体偏小,这是由于该桥建设时间较长,结构刚度在通行运营中有所下降.汇总RC1和RC3工况下得到的该斜拉桥前三阶竖向固有振型,如图9所示.

图9中两种工况下结构面内竖向前三阶振型一致性良好,上述情况进一步说明了本文方法计算斜

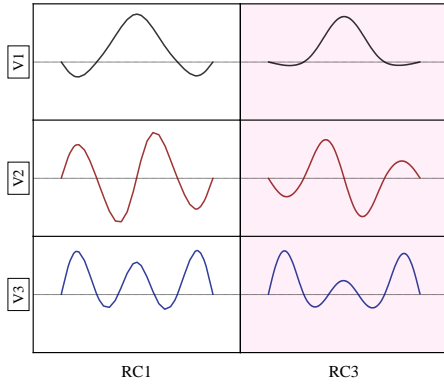


图9 RC1、RC3工况下的斜拉桥前三阶面内竖向振型
Fig.9 The first three order modes of cable-stayed bridge under the conditions of RC1 and RC3

拉桥面内竖向固有振动模态参数的精确性和适用性.

3.2 梁轴力对斜拉桥竖向模态的影响

为研究索力水平投影为梁提供的轴向力对斜拉桥面内竖向振动模态参数的影响,引入 μ_a 表示轴向力对B $\#$ 梁段动平衡方程的放大系数,由式(28)定义:

$$\mathbf{K}_B = \tilde{\mathbf{I}} + \mu_a \cdot \tilde{\mathbf{E}} + \kappa_{Gi} + \kappa_T. \quad (28)$$

按照本文解析法研究成果,基于RC3参数设置,图10展示了轴力对斜拉桥固有振型的影响,图11展示了轴力对斜拉桥固有振动频率的影响.

由图10可知轴力对结构振型影响不大.图11引入 $k_V^{(n)}$ 表示对应第 n 阶的斜拉桥面内竖向频率 $\omega_V^{(n)}$

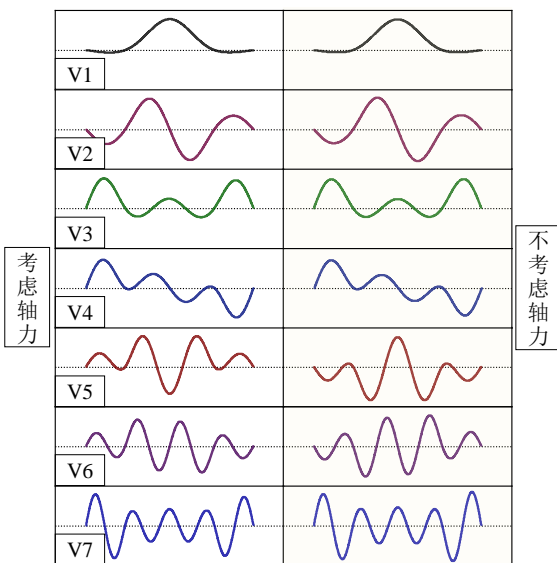


图10 轴力对斜拉桥竖向固有振型的影响

Fig.10 Influence of the axial force on the vertical natural modes of the cable-stayed bridge

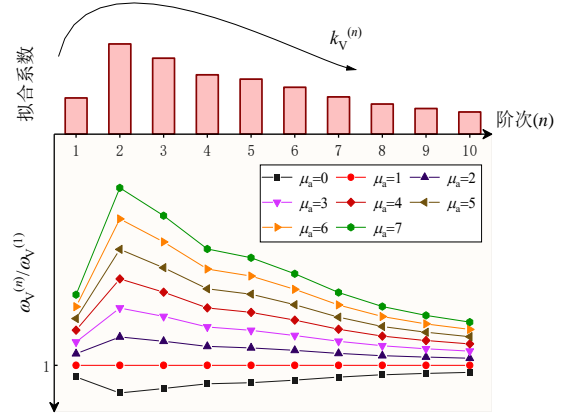


图11 梁轴力对斜拉桥面内竖向频率的影响

Fig.11 Influence trends of the beam's axial force on the in-plane vertical frequencies of the cable-stayed bridge

和 μ_a 的一阶线性拟合斜率, $k_V^{(n)}$ 值越大,表明频率受到轴力的影响越明显.因此,由图11可得,轴力对结构面内竖向基频影响效应较弱,而后随着阶次增加,轴力影响效应递减.这进一步表明轴力对结构面内低阶频率变化影响较明显.此外,梁轴向力的增加将进一步降低结构频率,表明轴向力增加将降低结构整体的等效刚度,这与文献[29]结论一致.可见当轴力增大到一定程度时,结构整体刚度将降低至0,此时结构失稳.为进一步研究这个问题,继续增大 μ_a ,汇总其与结构前五阶关系,如图12所示.

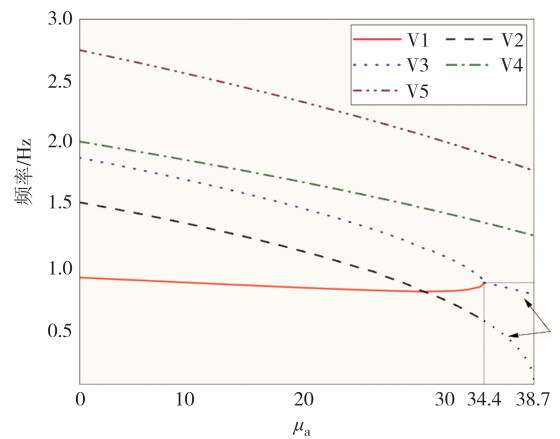


图12 μ_a 与结构前五阶频率关系

Fig.12 Relation between the first-five order in-plane vertical frequencies with μ_a

图12显示, $\mu_a < 28$ 时,V1~V5随轴力增大而呈现线性缓慢下降.当 μ_a 达到30左右时,V1发生频率跃迁现象,此时尽管V2频率数值低于V1,但V1的振型是结构的一阶振型.当 μ_a 达到34.4时,V1~V3值产生共轭对称解,其频域信号值幅值相同而相位不同,

而V2在 μ_s 接近38.7时急速下降为0,此时斜拉桥一阶固有振动频率为0,结构整体失稳.表明从轴力角度考虑,该桥目前暂无整体失稳风险,只有当轴力达到现有轴力38倍以后会出现整体失稳现象.此外,随着结构轴力的增大,结构基频将发生跃迁,结构体系内易产生非线性内共振,需进行更深入的研究.

3.3 断索对斜拉桥面内竖向模态的影响

从式(20)与式(22)中可发现,斜拉桥拉索为主梁提供了轴力与弹性支撑作用(k_{BCi}),为结构提供了有效刚度.因此,结构的固有振动模态频率与每一根拉索息息相关.以此实体结构为背景,模拟单拉索出现断裂的极端情况对结构固有振动频率及振型的影响,图13显示了该工况下低阶频率变化规律.

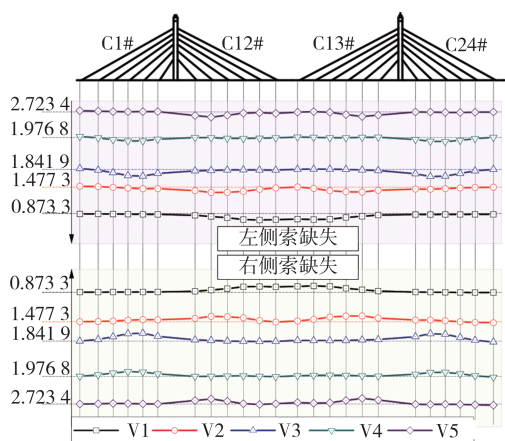


图13 不同位置的拉索断裂对结构V1~V5频率的影响

Fig.13 Influence on the V1~V5-order modal frequencies when cables of different positions broke down

拉索的索力水平投影对主梁产生的轴压力降低了整体刚度,而其竖向弹性支撑作用则增大了整体刚度,两者作用下使得断索对结构基频影响较小,如图13所示.此外,左右侧索面断索后影响效应变化规律基本一致,其中中跨拉索断裂对V1、V2和V5影响较大,而边跨拉索对V3和V4影响较大,对比图10中结构前五阶面内竖向振型,表明断索后的影响效应与该拉索对应的主梁质点的振型参与系数相关.拉索发生损伤甚至断裂会改变结构整体频率,因此,当此情况发生时需进一步考虑结构因局部-整体模态耦合发生非线性共振的问题.

4 结论

1)本文方法考虑了主梁截面的变刚度、变轴力作用,建立的斜拉桥整体模态动力学模型更贴近工

程实际结构.通过代入已有文献中理论模型算例参数并对比其理论计算结果,本文方法计算结果平均误差率为0.2‰;代入某斜拉桥参数并对比其面内竖向固有振动频率实测值,本文方法计算结果误差率为2.7%,进一步说明本文解析方法具有较高的精确度和较好的适用性.

2)斜拉桥低阶面内竖向固有振动频率随着轴力增加而降低,振型基本无变化,当轴力增加到一定值后,结构的低阶面内竖向整体模态频率将发生频率跃迁、分叉现象.

3)斜拉桥发生断索对整体结构固有振动频率影响较小,断索对各阶频率值影响效应与拉索锚固处主梁的对应阶次振型参与系数相关.

4)本文方法为快速计算斜拉桥整体模态频率以避免斜拉桥整体-局部模态耦合而发生非线性内共振问题提供了有效帮助.下一步将考虑拉索、主塔与主梁间几何非线性边界条件,通过建立更加细化的斜拉桥整体动力学模型开展斜拉桥的相关非线性共振研究.

参考文献

- [1] 赵跃宇,蒋丽忠,王连华,等.索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析[J].土木工程学报,2004,37(3):69-72.
ZHAO Y Y, JIANG L Z, WANG L H, et al. The dynamical modelling theory and internal resonance of cable-beam composite structure[J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(3): 69-72. (in Chinese)
- [2] 吴庆雄,罗秋芳,王文平,等.振动松弛对斜索参数振动的影响分析[J].工程力学,2014,31(S1):182-188.
WU Q X, LUO Q F, WANG W P, et al. Influence analysis of vibration loosening on nonlinear parametric vibrations of inclined cables[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(S1): 182-188. (in Chinese)
- [3] WEBER B. Nonlinear stay cable - bridge deck interaction [C]// Proceedings of International Conference on Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures. Cham: Springer, 2017.
- [4] 孙测世.大跨度斜拉桥非线性振动试验研究[D].长沙:湖南大学,2015.
SUN C S. Experimental study of nonlinear vibrations of long-span cable-stayed bridge [D]. Changsha: Hunan University, 2015. (in Chinese)
- [5] CAETANO E. Cable vibrations in cable-stayed bridges [M]. Zurich: IABSE, 2007.
- [6] 赵跃宇,王涛,康厚军,等.斜拉桥双索与桥面耦合的非线性参数振动特性分析[J].湖南大学学报(自然科学版),2008,35(10):1-5.

- ZHAO Y Y, WANG T, KANG H J, et al. Performance study of the nonlinear parametric vibration of coupled bridge decks and two cables [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2008, 35(10): 1-5. (in Chinese)
- [7] LOU P, ZENG Q Y. Formulation of equations of motion of finite element form for vehicle-track-bridge interaction system with two types of vehicle model [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, 62(3): 435-474.
- [8] 吴庆雄, 王文平, 陈宝春. 索梁结构非线性振动有限元分析 [J]. *工程力学*, 2013, 30(3): 347-354.
WU Q X, WANG W P, CHEN B C. Finite element analysis for nonlinear vibration of cable-beam structure [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(3): 347-354. (in Chinese)
- [9] 胡建华, 王连华, 赵跃宇. 索结构几何非线性分析的悬链线索单元法 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2007, 34(11): 29-32.
HU J H, WANG L H, ZHAO Y Y. A catenary cable element for the nonlinear analysis of cable structures [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2007, 34(11): 29-32. (in Chinese)
- [10] 龚平, 苏潇阳, 蔡向阳, 等. 拉索对斜拉桥竖向频率的影响研究 [J]. *振动工程学报*, 2018, 31(6): 957-965.
GONG P, SU X Y, CAI X Y, et al. The influence of cables on vertical frequency of cable-stayed bridge [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(6): 957-965. (in Chinese)
- [11] 吴庆雄, 王文平, 陈宝春. 多索-梁结构固有振动特性分析 [J]. *工程力学*, 2017, 34(1): 109-116.
WU Q X, WANG W P, CHEN B C. Natural vibration analysis of multi-cables-stayed beam structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(1): 109-116. (in Chinese)
- [12] CAO D Q, SONG M T, ZHU W D, et al. Modeling and analysis of the in-plane vibration of a complex cable-stayed bridge [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(26): 5685-5714.
- [13] 李专干, 宋敦海, 曹登庆, 等. 一类单塔斜拉桥固有频率及模态的计算与分析 [J]. *应用力学学报*, 2016, 33(6): 1038-1044.
LI Z G, SONG M T, CAO D Q, et al. Calculation and analysis of natural frequencies and mode shapes of a cable-stayed bridge with a single rigid tower [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, 33(6): 1038-1044. (in Chinese)
- [14] 赵文忠, 康健, 梁栋. 索梁结构面内耦合振动机理研究 [J]. *重庆交通大学学报(自然科学版)*, 2019, 38(8): 20-26.
ZHAO W Z, KANG J, LIANG D. In-plane coupled vibration mechanism of cable-beam structure [J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2019, 38(8): 20-26. (in Chinese)
- [15] CONG Y Y, KANG H J, YAN G R, et al. Modeling, dynamics, and parametric studies of a multi-cable-stayed beam model [J]. *Acta Mechanica*, 2020, 231(12): 4947-4970.
- [16] KANG H J, SU X Y, PI Z H. Planar nonlinear dynamic analysis of cable-stayed bridge considering support stiffness [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 107(2): 1545-1568.
- [17] 康厚军, 解维东, 郭铁丁. CFRP索斜拉梁面内自由振动建模及参数分析 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2016, 43(9): 18-25.
KANG H J, XIE W D, GUO T D. Modeling and parameters analysis on in-plane free vibration of cable-stayed beam [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2016, 43(9): 18-25. (in Chinese)
- [18] 康厚军, 苏潇阳, 龚平, 等. 漂浮式独塔斜拉桥竖弯刚度评估新方法 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2017, 44(11): 126-134.
KANG H J, SU X Y, GONG P, et al. A new method for vertical bending stiffness evaluation of floating single-tower cable-stayed bridge [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2017, 44(11): 126-134. (in Chinese)
- [19] 苏潇阳, 康厚军, 丛云跃. 混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 26-32.
SU X Y, KANG H J, CONG Y Y. Dynamic theory for evaluation on vertical bending stiffness of multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 26-32. (in Chinese)
- [20] KANG H J, XIE W D, GUO T D. Modeling and parametric analysis of arch bridge with transfer matrix method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, 40(23/24): 10578-10595.
- [21] 苏潇阳, 康厚军, 皮梓豪, 等. 斜拉桥多索-浅拱-弹性约束模型及面内自由振动 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2021, 48(7): 138-144.
SU X Y, KANG H J, PI Z H, et al. Elastically constrained multi-cable-stayed shallow-arch model in cable-stayed bridge and its in-plane free vibration research [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2021, 48(7): 138-144. (in Chinese)
- [22] WANG Z Q, KANG H J, SUN C S, et al. Modeling and parameter analysis of in-plane dynamics of a suspension bridge with transfer matrix method [J]. *Acta Mechanica*, 2014, 225(12): 3423-3435.
- [23] 赵跃宇, 杨相展, 刘伟长, 等. 索-梁组合结构中拉索的非线性响应 [J]. *工程力学*, 2006, 23(11): 153-158.
ZHAO Y Y, YANG X Z, LIU W Z, et al. Non-linear response of cables in cable-stayed beam structure [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(11): 153-158. (in Chinese)
- [24] 康厚军, 赵跃宇, 蒋丽忠. 参数振动和强迫振动激励下超长拉索的面内非线性振动 [J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2011, 42(8): 2439-2445.
KANG H J, ZHAO Y Y, JIANG L Z. In-plane nonlinear vibration of super long stay cables under parametric and forced excitations [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2011, 42(8): 2439-2445. (in Chinese)
- [25] PENG J, XIANG M J, WANG L H, et al. Nonlinear primary resonance in vibration control of cable-stayed beam with time delay feedback [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 137: 106488.
- [26] 唐艺玮, 彭剑, 符翔, 等. 多输入时滞反馈控制下的斜拉梁主共振响应 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(5): 92-96.
TANG Y W, PENG J, FU X, et al. Primary resonance response of cable-stayed beam under multi-input time-delayed feedback

