

一种基于极值特征值之差的全盲多天线频谱感知算法

雷可君^{1,2}, 杨喜^{1†}, 向长青¹, 汪旭明¹, 田堃¹, 谭哲雯¹, 夏舜晖³

(1. 吉首大学通信与电子工程学院, 湖南吉首 416000;

2. 湖南大学信息科学与工程学院, 湖南长沙 410082;

3. 湖南邮电职业技术学院, 湖南长沙 410015)

摘要:提出了一种新的基于接收信号取样协方差矩阵(SCM)极值特征值之差的多天线频谱感知算法 BDDEE, 其以 SCM 的最大最小特征值之差与接收信号平均能量之比作为感知判决量, 在检测过程中摆脱了对噪声方差的依赖, 且无须使用主用户信号及无线传输信道等相关参数. 在此基础上, 基于有限维 Wishart 随机矩阵有序特征值分布的相关结果, 从理论上提出了一种精确的虚警概率和判决门限的分析和计算方法; 更进一步, 考虑到次级用户计算和存储资源的限制, 利用高维 Wishart 随机矩阵中极值特征值的分布理论, 通过融合最大和最小特征值极限分布所对应的判决门限, 提出了一种低计算复杂度的判决门限计算方法. 综合考虑检测性能和虚警性能指标来看, 新算法比经典的 CAV、MME 和 DMME 算法具有更优的感知性能, 在样本数目有限的条件下能获得更加稳健的检测结果, 数值仿真结果证明了所提 BDDEE 算法的有效性.

关键词: 认知无线电; 频谱感知; 极值特征值; 随机矩阵; Tracy-Widom 分布

中图分类号: TN925 **文献标志码:** A

A Total Blind Multi-antenna Spectrum Sensing Algorithm Based on Difference of Extreme Eigenvalues

LEI Kejun^{1,2}, YANG Xi^{1†}, XIANG Changqing¹, WANG Xuming¹, TIAN Kun¹,
TAN Zhewen¹, XIA Shunhui³

(1. School of Communication and Electronic Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China;

2. College of Computer Science and Electronic Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China;

3. Hunan Post and Telecommunication College, Changsha 410015, China)

Abstract: A new BDDEE (Blind Detector based on Difference of Extreme Eigenvalues) multi-antenna spectrum sensing algorithm based on the difference between the extreme eigenvalues of the received signal sample covariance matrix (SCM) is proposed. It uses the ratio of the difference between the maximum and minimum

* 收稿日期:2023-02-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62161012, 61861019, 62141503), National Natural Science Foundation of China(62161012, 61861019, 62141503); 湖南省教育厅科学研究项目(21A0335, 21C1410), Scientific Research Project of Department of Education of Hunan Province(21A0335, 21C1410); 国家级大学生创新创业训练项目(202110531029), National Innovation and Entrepreneurship Training Program for College Students(202110531029)

作者简介:雷可君(1979—), 女, 湖南永州人, 吉首大学教授, 博士

† 通信联系人, E-mail: ynkej@163.com

eigenvalues of the SCM and the average energy of the received signal as the sensing decision. The proposed BDDEE algorithm breaks away from the dependence on the noise variance in the detection process and does not need to use the relevant parameters such as the primary user signal and the wireless transmission channel. On this basis, using the results of the ordered eigenvalue distribution of the finite-dimensional Wishart random matrix, an accurate analysis and calculation method for false-alarm probability and decision threshold is proposed theoretically. Furthermore, considering the limitation of computing and storage resources of secondary users, a decision threshold calculation method with low computational complexity is proposed by combining the decision threshold corresponding to the maximum and minimum eigenvalue limiting distribution by using the distribution theory of limiting eigenvalues in the high-dimensional Wishart random matrix. From the comprehensive consideration of detection performance and false-alarm performance, the proposed BDDEE algorithm has better sensing performance than the traditional CAV (Covariance Absolute Value), MME (Maximum Minimum Eigenvalue) and DMME (Difference between the Maximum and the Minimum Eigenvalues) algorithms, and can obtain more robust detection results under the condition of limited sample number, which is verified by the various numerical simulation results.

Key words: cognitive radio; spectrum sensing; extreme eigenvalues; random matrix; Tracy-Widom distribution

随着移动通信、物联网、云计算和大数据等新一代信息技术的飞速发展,各种新的无线应用不断涌现,无线移动数据流量需求呈现爆炸式增长.在这种背景之下,无线通信对频谱资源的需求急剧增长,势必使得未来频谱供需矛盾日益突出^[1-3].频谱共享通过采用各种新技术及政策等综合手段提高现有频谱资源利用率,以达到有效缓解频谱资源供需矛盾的目的,从而引起了各国政府与学界的高度重视^[4].认知无线电(Cognitive Radio, CR)是实现频谱共享的一种重要手段,而频谱感知则是实现CR的基础和关键技术^[5-8].

在实际的频谱感知过程中,由于环境噪声和接收设备噪声不确定性的存在,次级用户很难获得准确的噪声方差信息^[9];同时,由于次级用户和主用户之间通常不存在合作和协调,故次级用户也难以获得无线信道及主用户信号的统计先验信息.因此,设计避免使用无线信道、主用户信号和噪声方差等相关统计参数的全盲频谱感知算法在CR中具有特别重要的应用价值^[10-12].基于接收信号取样协方差矩阵(Sample Covariance Matrix, SCM)和基于特征值的检测是其中两类极具代表性的算法.前者以协方差绝对值(Covariance Absolute Value, CAV)检测^[13]为代表,其以SCM的非对角元和对角元绝对值之和的比构造感知判决量.由于CAV检测算法很好地捕捉了多天线接收信号之间的统计相关特征,故其在相关信号检测过程中表现出优良的检测性能.后者

主要包括各种以SCM的最大和(或)最小特征值构造的各种启发式算法,尤以文献[14]提出的基于SCM的最大和最小特征值之比(Maximum Minimum Eigenvalue, MME)的检测算法为代表.该算法只需要利用接收信号数据即可计算相应的感知判决量,而无须利用其他特征参数,具有全盲检测特征,适应范围广泛.注意到接收信号SCM最大和最小特征值的变化集中反映了主用户信号能量特征和相关特征的变化,因而MME算法在频谱检测过程中表现出优异的检测性能.值得注意的是,SCM的最大和最小特征值之比的精确统计分布的分析非常复杂,这使得MME算法的精确感知判决门限的求解过程变得十分复杂^[15-17],不适于对检测时间有严格限制的认知无线电系统.尽管文献[18]和[19]探讨了渐近条件下感知判决门限不同的近似求解方法,然而由于引入的近似误差较大,这些方法在样本数目有限的感知应用场景中不能获得最佳的检测性能.文献[20]以SCM的最大和最小特征值之差作为感知判决量,通过对噪声方差进行估计,提出了一种新的DMME (Difference between the Maximum and the Minimum Eigenvalues)频谱感知算法,获得了比能量检测算法更优的感知性能.在此基础上,文献[21]通过进一步对判决门限设置进行优化,获得了一种性能更优的改进算法.尽管DMME算法是一种极具竞争力的全新频谱感知算法,但是其仍然存在以下三方面的问题并限制了该算法的进一步应用:其一,感知判决过

程依赖于噪声方差的精确估计,然而该值只有在样本数目很大的条件下才能获得,在样本数目有限的条件下该估计值将存在着较大的误差,进而影响判决结果的可靠性;其二,噪声方差估计以秩1接收信号为前提,然而在实际感知场景中,次级用户的多天线接收信号通常由多个主用户信号叠加而成,此时接收信号的统计协方差矩阵不再是秩1矩阵,使得DMME算法在这种情况下不再最优;其三,相应的理论判决门限是在样本数目和天线数目同时趋于无穷的条件下得到的,然而在两者均有限的感知场景中,判决门限的设置将出现较大偏差,进而引起错误的判决结果.

有鉴于此,本文提出了一种新的基于SCM极值特征值之差的多天线频谱感知算法BDDEE(Blind Detector based on Difference of Extreme Eigenvalues),其以最大特征值和最小特征值之差与多天线接收信号平均能量之比作为感知判决量,在判决过程中摆脱了对噪声方差的估计;在此基础上,从理论上提出了一种精确虚警性能和判决门限的计算方法.与此同时,通过融合最大特征值和最小特征值极限分布所对应的判决门限,提出了一种低计算复杂度且在接收信号样本和天线数目有限的条件下仍然具有可靠感知性能的判决规则.所提算法在检测过程中无须使用主用户信号、传输信道以及噪声方差等相关参数,具有全盲感知特点,适用范围广.仿真结果表明,新算法具有比经典的CAV、MME和DMME算法更为优越的感知性能.

1 数学模型

假定次级用户配置的天线数目为 M .分别标记第 $n(n=1,2,\dots,N)$ 时刻次级用户所对应的 $M \times 1$ 维多天线接收信号向量、经过无线信道的主用户接收信号向量和噪声向量为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T \\ \mathbf{s}(n) = [s_1(n), s_2(n), \dots, s_M(n)]^T \\ \boldsymbol{\eta}(n) = [\eta_1(n), \eta_2(n), \dots, \eta_M(n)]^T \end{cases} \quad (1)$$

式中:上标 T 表示向量的转置运算符号; $x_m(n)$ 、 $s_m(n)$ 和分别表示第 $m(m=1,2,\dots,M)$ 根天线上的接收信号、主用户接收信号, $\eta_m(n) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 为高斯白噪声分量.不失一般性,假定噪声与主用户接收信号之间统计独立,且为高斯白噪声.由统计信号检测理论可知,判断待检测的授权频段是否被占用的问题可

以转化为如下的二元假设检验问题:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{x}(n) = \boldsymbol{\eta}(n), n = 1, 2, \dots, N \\ H_1: \mathbf{x}(n) = \mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\eta}(n), n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2)$$

式中: H_0 和 H_1 分别表示授权频段空闲和被占用两种状态.从检测次级用户接收信号协方差矩阵差异的角度,上述二元假设检验问题则可以重新表述如下:

$$\begin{cases} H_0: \mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] = \sigma^2 \mathbf{I}_M \\ H_1: \mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] = \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M \end{cases} \quad (3)$$

式中: \mathbf{R}_x 表示次级用户端多天线接收信号的统计协方差矩阵, $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{s}(n)\mathbf{s}^T(n)]$ 表示经过无线信道之后的主用户接收信号的统计协方差矩阵; \mathbf{I}_M 表示 $M \times M$ 维单位矩阵.从式(3)可以看出,在 H_0 状态下,接收信号的统计协方差矩阵 \mathbf{R}_x 为一个对角矩阵;与之相对,在 H_1 状态下,主用户信号的出现以及无线信道的共同影响使得 \mathbf{R}_x 通常不再是一个对角阵.注意到在实际的检测过程中,次级用户通常无法获得接收信号的统计协方差矩阵信息,因此在处理过程中通常使用接收信号的取样协方差矩阵来代替相应的统计协方差矩阵,其利用有限的接收信号样本向量进行计算:

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) \quad (4)$$

由大数定理可知,当接收信号的样本数目 N 很大时有 $\mathbf{R}_x \rightarrow \hat{\mathbf{R}}_x$.注意到当信道中没有主用户信号时,接收信号的取样协方差矩阵等于噪声取样协方差矩阵,即有:

$$\hat{\mathbf{R}}_{\eta} \triangleq \hat{\mathbf{R}}_x | H_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\eta}(n)\boldsymbol{\eta}^T(n) \quad (5)$$

2 基于极值特征值之差的全盲多天线频谱感知算法

2.1 感知判决量及判决规则

由式(3)可知,在 H_0 和 H_1 两种状态下,多天线接收信号的统计协方差矩阵分别为 $\mathbf{R}_x = \sigma^2 \mathbf{I}_M$ 和 $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M$.因此,在 H_0 状态下,次级用户接收信号统计协方差矩阵 \mathbf{R}_x 的所有特征值均等于 σ^2 .另一方面,标记主用户接收信号的统计协方差矩阵 \mathbf{R}_s 的特征值为 $\rho_i(i=1,2,\dots,M)$,同时不妨假定 $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_M$.则由矩阵理论不难知道,在 H_1 状态下, \mathbf{R}_x 的特征值可以表示为 $\lambda_i = \rho_i + \sigma^2(i=1,2,\dots,M)$.基于上述事实可知,主用户信号的出现使得在 H_0 和 H_1 两种状态下 \mathbf{R}_x 的最大特征值和最小特征值之差

$\Delta(\mathbf{R}_x) \triangleq \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ 之间存在着明显的差异, 而通过检测这种差异性正好可以判断主用户信号是否出现. 为了避免在感知判决过程中使用噪声方差信息, 进一步引入如下指示量:

$$\tilde{T}_{\text{BDDEE}} = \frac{\Delta(\mathbf{R}_x)}{\text{tr}(\mathbf{R}_x)/M} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\text{tr}(\mathbf{R}_x)/M} \quad (6)$$

式中: $\text{tr}(\mathbf{R}_x)$ 表示 \mathbf{R}_x 的迹. 注意到在 H_0 和 H_1 两种状态下 $\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M$ 分别表征了次级用户各天线上的平均噪声功率和平均接收信号能量, 显然该值恒大于 0.

由上面的分析可知, 当主用户信号未出现时有 $\Delta(\mathbf{R}_x)|_{H_0} = 0$, 此时 $\tilde{T}_{\text{BDDEE}} = 0$; 而当主用户信号出现时则有 $\Delta(\mathbf{R}_x)|_{H_1} = \rho_1 - \rho_M > 0$, 同时结合 $\text{tr}(\mathbf{R}_x)/M > 0$ 这一事实, 相应地则有 $\tilde{T}_{\text{BDDEE}} > 0$. 值得一提的是, 当多天线接收信号的能量和相关性越大时, 在 H_0 和 H_1 两种状态下最大和最小特征值之间的差异将变得越明显, 越有利于进行感知判决. 因此, \tilde{T}_{BDDEE} 可以作为判断主用户信号是否出现的检测量, 相应的感知判决规则为:

$$\tilde{T}_{\text{BDDEE}} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\text{tr}(\mathbf{R}_x)/M} \stackrel{H_1}{\geq} \tau \quad (7)$$

由于式(7)所示判决规则需要完全已知接收信号的统计特征才能计算出 \mathbf{R}_x , 因此在实际应用中无法实现. 如前所述, 在实际处理过程中通常使用取样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 来代替统计协方差矩阵 \mathbf{R}_x . 相应地, λ_{\max} 和 λ_{\min} 将分别由 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 的最大特征值 l_{\max} 和最小特征值 l_{\min} 来代替. 感知判决规则需要重新表述为:

$$T_{\text{BDDEE}} = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M} \stackrel{H_1}{\geq} \tau \quad (8)$$

式中: τ 表示感知判决门限. 在实际感知过程中接收信号样本数目的限制使得在 H_0 状态时实际判决量 T_{BDDEE} 与理想判决量 \tilde{T}_{BDDEE} 之间存在偏差, 此时 T_{BDDEE} 是一个随机量而非常量, 因此相应的判决门限 τ 也不再为恒定值 0, 而需要根据设定的目标虚警概率进行相应设置.

接下来从理论上分析式(8)所示的感知判决规则的全盲检测特征. 由随机矩阵理论的结果可知, 当接收信号样本数目充分大时, 在 H_0 状态为真时有如下结论成立^[14, 22]:

$$l_{\max}|_{H_0} \approx \frac{\sigma^2}{N} (\sqrt{N} + \sqrt{M})^2 = \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2 \quad (9)$$

$$l_{\min}|_{H_0} \approx \frac{\sigma^2}{N} (\sqrt{N} - \sqrt{M})^2 = \sigma^2 (1 - \sqrt{c})^2 \quad (10)$$

式中: $c = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N (0 < c < 1)$. 由此可得:

$$\Delta(\hat{\mathbf{R}}_x)|_{H_0} = l_{\max}|_{H_0} - l_{\min}|_{H_0} \rightarrow 4\sqrt{c}\sigma^2 \quad (11)$$

与此同时, 在 H_0 状态下, 当接收信号样本数目充分大时, 取样协方差矩阵近似等于高斯白噪声的统计协方差矩阵, 即有:

$$\hat{\mathbf{R}}_x|_{H_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\eta}(n) \boldsymbol{\eta}^T(n) \approx \mathbf{R}_\eta = \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (12)$$

故有

$$\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)|_{H_0} \approx \text{tr}(\mathbf{R}_\eta) = M\sigma^2 \quad (13)$$

将式(11)和(13)代入感知判决量表达式可得

$$T_{\text{BDDEE}}|_{H_0} = \frac{\Delta(\hat{\mathbf{R}}_x)}{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M}|_{H_0} \rightarrow 4\sqrt{c} \quad (14)$$

注意到 $\Delta(\hat{\mathbf{R}}_x) = l_{\max} - l_{\min}$ 对应于文献[20]和[21]中 DMME 算法的感知判决量. 对照式(11)和(14)不难看出, 本文所设计的感知判决量 T_{BDDEE} 在 H_0 状态下趋向于一个常数, 避免了对噪声方差的依赖, 故相应的判决门限设置也不依赖于噪声方差参数; 且 T_{BDDEE} 的计算只依赖于接收信号数据, 而不需要主用户信号及无线信道信息, 具有全盲检测特征. 因此, 本文所提出的 BDDEE 算法很好地克服了传统 DMME 算法的缺点, 具有更加广泛的适用性.

2.2 虚警性能及判决门限计算

在频谱感知过程中, 需要根据实际要求控制目标虚警概率 $P_f = P(T_{\text{BDDEE}} > \tau | H_0)$, 即只存在噪声的条件下次级用户误报授权信道被占用的概率. 因此, 需要对 H_0 状态下感知判决量 T_{BDDEE} 的概率分布进行分析, 然后在此基础上获得理论判决门限 τ .

2.2.1 精确虚警性能及判决门限理论分析

标记接收信号取样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 的有序特征值为 $l_{\max} = l_1 > l_2 > \dots > l_M = l_{\min} > 0$. 注意在 H_0 假设为真时, 由于 $\boldsymbol{\eta}(n) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_M)$, 相应地 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 服从自由度为 N , 协方差矩阵为 $\sigma^2 \mathbf{I}_M/N$ 的中心 Wishart 分布, 标记为 $\hat{\mathbf{R}}_x|_{H_0} \sim \mathcal{W}_M(N, \sigma^2 \mathbf{I}_M/N)$. 因此, $\hat{\mathbf{R}}_x$ 特征值的联合概率密度函数可以表示为^[23]:

$$f_1(l_1, l_2, \dots, l_M) = \frac{\pi^{M^2/2} \left(\frac{2\sigma^2}{N}\right)^{-MN/2}}{\Gamma_M\left(\frac{M}{2}\right) \Gamma_M\left(\frac{N}{2}\right)} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^M l_i\right).$$

$$\prod_{i=1}^M l_i^{\frac{N-M-1}{2}} \prod_{i < j} (l_i - l_j) \quad (15)$$

式中:

$$\begin{cases} \Gamma_M\left(\frac{M}{2}\right) = \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{M-i+1}{2}\right) \\ \Gamma_M\left(\frac{N}{2}\right) = \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{N-i+1}{2}\right) \end{cases} \quad (16)$$

考虑到 $M-i+1$ 和 $N-i+1$ 为正整数, 因此 $\Gamma((M-i+1)/2)$ 和 $\Gamma((N-i+1)/2)$ 可以通过利用 Gamma 函数的性质 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 和 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ 递推得到. 由此可得 $\hat{\mathbf{R}}_x|H_0$ 最大和最小特征值的联合分布为:

$$f_{l_1, l_M}(l_1, l_M) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} f_{l_1, l_2, \dots, l_M} dl_2 dl_3 \cdots dl_{M-1} \quad (17)$$

有必要指出的是, $f(l_1, l_M)$ 可以进一步表示为张量的紧凑形式^[24].

标记 $T_1 = l_{\max} - l_{\min}$ 和 $T_2 = \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M$, 则 $T_{\text{BDDDEE}} = T_1/T_2$. 注意到 T_1 是两个随机变量的差, 因此在 H_0 状态下 T_1 的概率密度函数可以进一步表示为:

$$f_{T_1}(t_1) = \left[\int_0^{+\infty} f_{l_1, l_M}(u, u - t_1) du \right] I_{\{t_1 > 0\}} \quad (18)$$

式中: $f_{l_1, l_M}(u, u - t_1)$ 由式(17)确定; $I_{\{t_1 > 0\}}$ 表示示性函数, 当 $t_1 > 0$ 时函数取值为 1, 否则取值为 0. 注意到在 H_0 状态下有:

$$\frac{N \text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)}{\sigma^2} | H_0 \sim \chi_{NM}^2 \quad (19)$$

式中: χ_{NM}^2 表示自由度为 NM 的中心卡方分布. 因此有 $T_2 | H_0 \sim \sigma^2 \chi_{NM}^2 / MN$, 进一步由概率论的知识可知 $T_2 | H_0$ 的概率密度函数可以表示为:

$$f_{T_2}(t_2) = \frac{(MN/2\sigma^2)^{NM/2}}{\Gamma(NM/2)} t_2^{\frac{NM}{2}-1} \exp\left(\frac{-MNt_2}{2\sigma^2}\right) \quad (20)$$

因此, 运用概率论的知识可知 $T_{\text{BDDDEE}}|H_0 = T_1/T_2 | H_0$ 的概率密度函数可以表示为:

$$f_{T_{\text{BDDDEE}}}(t) = \left[\int_0^{+\infty} |t_2| f_{T_1, T_2}(t \cdot t_2, t_2) dt_2 \right] I_{\{t > 0\}} \quad (21)$$

式中: $f_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$ 表示 T_1 和 T_2 的联合概率密度函数. 因此要获得 $T_{\text{BDDDEE}}|H_0$ 的概率密度函数, 理论上需要先求得 $f_{T_1, T_2}(t_1, t_2)$. 然而, T_1 和 T_2 的统计相关关系未知, 因此要获得该联合分布函数变得十分困难. 在假定 T_1 和 T_2 统计独立的情况下则有:

$$f_{T_{\text{BDDDEE}}}(t) = \left[\int_0^{+\infty} |t_2| f_{T_1}(t \cdot t_2) f_{T_2}(t_2) dt_2 \right] I_{\{t > 0\}} \quad (22)$$

式中: $f_{T_1}(t \cdot t_2)$ 和 $f_{T_2}(t_2)$ 分别由式(18)和式(20)得到. 标记 $F_{\text{non-asy}}(t)$ 为感知判决量在 H_0 状态下对应的累积分布函数, 则有:

$$P_f = \int_{\tau}^{+\infty} f_{T_{\text{BDDDEE}}}(t) dt = 1 - F_{\text{non-asy}}(\tau) \quad (23)$$

因此, 在给定目标虚警概率 P_{FA} 的条件下, 相应的非渐近理论判决门限可以表示为:

$$\tau_{\text{non-asy}} = F_{\text{non-asy}}^{-1}(1 - P_{\text{FA}}) \quad (24)$$

2.2.2 低复杂度虚警概率及判决门限计算

上节从理论上给出了一种分析和求解精确虚警性能和判决门限的方法, 然而该判决量的概率分布涉及复杂函数及其多重积分, 没有闭式表达且计算十分复杂, 与此同时后续对累积分布函数求逆运算也无法直接进行. 因此, 精确的虚警性能和判决门限计算方法仅具有理论价值, 难以应用到实际的计算和存储资源非常有限的次级用户频谱感知过程中. 因此, 本节利用随机矩阵理论的最新结果给出一种实用的近似虚警概率和判决门限计算方法. 为了分析的方便, 首先引入随机矩阵理论中关于极值特征值分布的两个相关定理^[14, 18].

定理 1: 假定 $\lim_{M, N \rightarrow \infty} M/N = c$ ($0 < c < 1$), 则 $(Nl_{\max}/\sigma^2 - \mu_1)\nu_1^{-1}$ 在 H_0 状态下依概率 1 收敛于 1 阶 Tracy-Widom 分布, 其中 $\mu_1 = (\sqrt{N-1} + \sqrt{M})^2$, $\nu_1 = (\sqrt{N-1} + \sqrt{M})[(N-1)^{-1/2} + M^{-1/2}]^{1/3}$.

定理 2: 假定 $\lim_{M, N \rightarrow \infty} M/N = c$ ($0 < c < 1$), 则 $(Nl_{\min}/\sigma^2 - \mu_2)\nu_2^{-1}$ 在 H_0 状态下依概率 1 收敛于 1 阶 Tracy-Widom 分布, 其中 $\mu_2 = (\sqrt{N} - \sqrt{M})^2$, $\nu_2 = (\sqrt{N} - \sqrt{M})(N^{-1/2} - M^{-1/2})^{1/3}$.

下面通过融合基于最大和最小特征值极限分布的两种近似方法所对应的判决门限, 提出了一种非渐近条件下仍然具有可靠感知性能的判决门限计算方法. 结合虚警概率的定义和式(8)可知:

$$P_f = P\left(\frac{M(l_{\max} - l_{\min})}{\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)} > \tau_1\right) \quad (25)$$

在 H_0 状态下, 利用式(13)可以得到如下近似表达:

$$P_f \approx P\left(\frac{l_{\max} - l_{\min}}{\sigma^2} > \tau_1\right) \quad (26)$$

注意到 $l_{\min} \rightarrow \sigma^2(1 - \sqrt{c})^2$, 结合式(26)可得:

$$P_f \approx P\left(l_{\max} > \sigma^2\left[\tau_1 + (1 - \sqrt{c})^2\right]\right) \quad (27)$$

进一步可以得到:

$$P_f \approx P\left(\frac{Nl_{\max}/\sigma^2 - \mu_1}{\nu_1} > \frac{N\left[\tau_1 + (1 - \sqrt{c})^2\right] - \mu_1}{\nu_1}\right) \quad (28)$$

结合定理 1 可知:

$$P_f = 1 - F_1\left(\frac{N\left[\tau_1 + (1 - \sqrt{c})^2\right] - \mu_1}{\nu_1}\right) \quad (29)$$

式中: $F_1(\cdot)$ 表示 1 阶 Tracy-Widom 分布的累积分布函数, 其定义为^[14]:

$$F_1(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^\infty [q(u) + (u-t)q^2(u)]du\right\} \quad (30)$$

式中: $q(u)$ 为 Painlevé II 非线性微分方程 $q''(u) - uq(u) - 2q^3(u) = 0$ 的解. 故相应的判决门限可以表示为:

$$\tau_1 = \frac{\nu_1 F_1^{-1}(1 - P_f) + \mu_1}{N} - (1 - \sqrt{c})^2 \quad (31)$$

式中: $F_1^{-1}(x)$ 表示 1 阶 Tracy-Widom 分布的逆累积分布函数.

上面以最大特征值的极限分布作为基础, 结合最小特征值的渐近值, 推导了 BDDEE 算法的一种渐近虚警概率及判决门限表达式. 类似地, 利用最小特征值的极限分布, 并结合最大特征值的渐近值, 可以获得 BDDEE 算法的近似判决门限的另外一种表达式. 注意到 $l_{\max} | H_0 \rightarrow \sigma^2(1 + \sqrt{c})^2$, 故渐近虚警概率又可以表示为:

$$P_f \approx P\left(\frac{\sigma^2(1 + \sqrt{c})^2 - l_{\min}}{\sigma^2} > \tau_2\right) \quad (32)$$

式(32)可以等价表示为:

$$P_f \approx P\left(l_{\min} < \sigma^2\left[(1 + \sqrt{c})^2 - \tau_2\right]\right) \quad (33)$$

因此虚警概率可以进一步表示为:

$$P_f \approx P\left(\frac{Nl_{\min}/\sigma^2 - \mu_2}{\nu_2} > \frac{N\left[(1 + \sqrt{c})^2 - \tau_2\right] - \mu_2}{\nu_2}\right) \quad (34)$$

由定理 2 可知:

$$P_f \approx 1 - F_1\left(\frac{N\left[(1 + \sqrt{c})^2 - \tau_2\right] - \mu_2}{\nu_2}\right) \quad (35)$$

相应的判决门限为:

$$\tau_2 = (1 + \sqrt{c})^2 - \frac{\nu_2 F_1^{-1}(1 - P_f) + \mu_2}{N} \quad (36)$$

由于分别以最大或最小特征值极限分布获得的判决门限均存在偏差, 为获得更加可靠的感知结果, 我们通过融合上述两种极限分析方法所获得的判决门限结果作为最终的判决门限值. 为简单计, 取 τ_1 和 τ_2 的平均值作为 BDDEE 算法的判决门限, 则有:

$$\tau = \frac{\nu_1 F_1^{-1}(1 - P_f) - \nu_2 F_1^{-1}(1 - P_f) + \mu_1 - \mu_2 + 4\sqrt{MN}}{2N} \quad (37)$$

2.3 BDDEE 检测算法流程

综合以上的分析过程, 所提出的 BDDEE 算法的检测流程如下:

步骤 1 次级用户对多天信号进行采样, 根据式(4)计算接收信号的取样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}_x$.

步骤 2 对 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 进行特征值分解, 由此得到最大特征值 l_{\max} 和最小特征值 l_{\min} , 并计算 $\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M$. 在此基础上, 次级用户计算感知判决量 $T_{\text{BDMME}} = (l_{\max} - l_{\min})/\text{tr}(\hat{\mathbf{R}}_x)/M$.

步骤 3 根据式(37)计算感知判决门限 τ .

步骤 4 感知判决: 当 $T_{\text{BDMME}} \geq \tau$ 时, 次级用户判定主用户信号存在, 授权信道不能使用; 当 $T_{\text{BDMME}} < \tau$ 时, 则判定主用户信号未出现, 授权信道可以使用.

2.4 算法复杂度分析

所提 BDDEE 算法的计算复杂度主要来源于感知判决量和判决门限的计算. 其中, 感知判决量的计算复杂度主要包括两部分: $\hat{\mathbf{R}}_x$ 的乘法和加法的计算量为 $\mathcal{O}(NM^2)$; 感知判决量的计算包括 SCM 的特征值计算和迹运算两部分, 前者的计算量为 $\mathcal{O}(M^3)$, 后者仅需 $M - 1$ 次加法和 1 次除法. 判决门限的计算主要包括 1 阶 Tracy-Widom 逆累积分布函数的计算, 文献[25]提供了一种基于三次样条插值的简单的实时计算方法. 为了使用的方便, 表 1 给出了一些常用的 1 阶 Tracy-Widom 逆累积分布函数值的对照情况. 与经典的 MME 算法相比, 只增加了求 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 迹的平均运算, 即增加了 $M - 1$ 次加法和 1 次除法. 因此, 本文所提 BDDEE 算法具有与 MME 等经典的基于特征值的全盲频谱感知算法相当的计算复杂度.

表1 1阶Tracy-Widom逆累积分布函数值

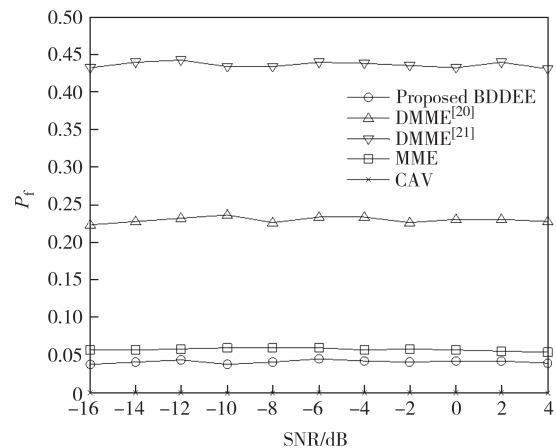
Tab. 1 Numerical table for the inverse cumulative distribution function of the Tracy-Widom distribution of order 1

P_f	$F_1^{-1}(P_f)$	$F_1^{-1}(1 - P_f)$
0.01	-3.90	2.02
0.05	-3.18	0.98
0.10	-2.78	0.45
0.30	-1.91	-0.59
0.50	-1.27	-1.27
0.70	-0.59	-1.91
0.90	0.45	-2.78
0.95	0.98	-3.18
0.99	2.02	-3.90

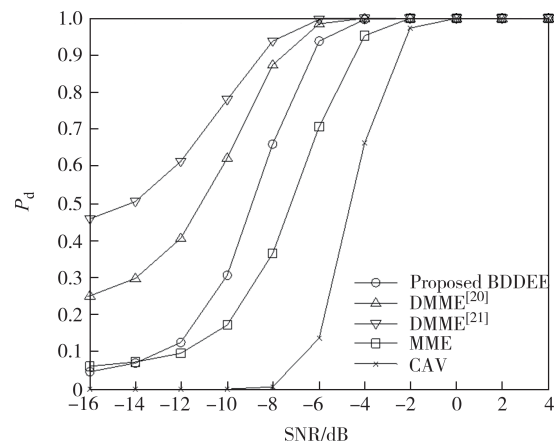
3 数值仿真与分析

图1和图2综合考查了当接收信号样本数目 $N=50$, 天线数目分别为 $M=15$ 和 25 , 目标虚警概率为 $P_f \leq 0.1$ 时, 本文所提的BDDEE算法与CAV^[13]、MME^[14]和DMME^[20-21]等经典的全盲多天线感知算法在不同信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)条件下的实际虚警概率(P_f)和检测概率(P_d)对比情况. 其中, DMME算法分别给出了文献[20]和[21]中两种不同的判决门限计算方法所得到的性能曲线. 本文所提BDDEE算法的判决门限由式(37)给出. 在仿真过程中, 设置Monte Carlo实验次数为10 000次, 天线信号相关模型采用指数衰减模型, 其中天线间相关系数设置为0.9. 需要指出的是, 检测性能和虚警性能在CR技术中都有特殊的重要性, 即在符合给定的目标虚警概率条件下, 感知算法对应的检测概率越高, 意味着次级用户在通信过程中对主用户造成的干扰越小; 而如果实际虚警概率越大则意味着次级用户将丢失越多的使用空闲频谱的机会, 造成频谱使用效率下降. 因此, 在考查某个给定频谱感知算法的感知性能时, 需要同时评估检测概率和虚警概率这两个性能指标. 图1和图2的结果表明, 所提BDDEE和经典的MME、CAV等三种全盲感知算法的实际虚警概率值均满足与设定的目标虚警概率要求, 即三种算法均能正确设置判决门限值, 从而保证感知结果的可靠性; 但是, 所提的BDDEE算法在这三种算法当中具有最高的检测概率, MME算法次之, 而CAV算法则给出了最低的检测概率. 另一方面, 单独从检测概率来看, 文献[20]和[21]中DMME算法取得了更

高的检测概率; 但其对应的实际虚警概率远高于预定的目标虚警概率($P_f \leq 0.1$), 具体地, 当 $M=15$ 时, 上述两种DMME算法的实际平均虚警概率分别达到22.93%和43.58%; 当 $M=25$ 时则分别达到27.91%和42.20%. 这表明在样本数目有限的条件下, 两种DMME算法均给出了偏低的感知判决门限, 从而造成了虚高的检测概率. 因此, 与所提BDDEE算法相比, 两种DMME算法均产生了不可靠的感知结果, 从而浪费了次级用户使用空闲授权频段的机会. 更进一步, 对比图1和图2不难看出, 随着天线数目的增多, 所提BDDEE算法对应的实际虚警概率仍然满足设定要求, 且检测性能优良. 因此, 综合虚警性能和检测性能来看, 所提BDDEE算法在上述五种算法当中具有最佳的感知性能, 在样本数目有限的条件下具有更加稳健的性能表现.

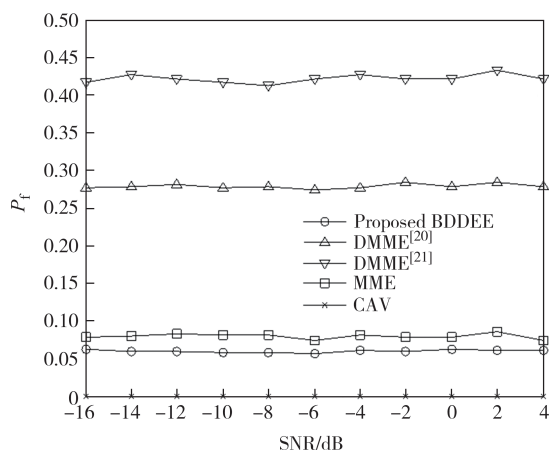


(a) 实际虚警概率曲线

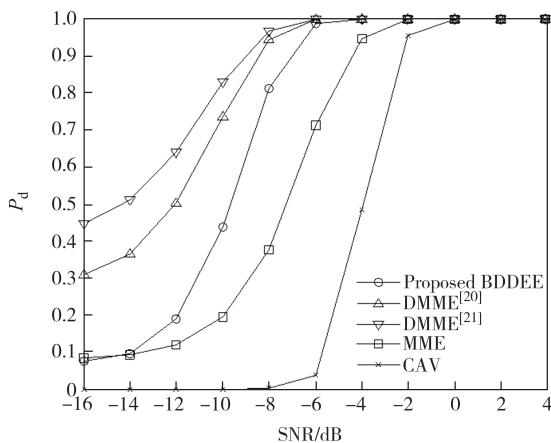


(b) 检测概率曲线

图1 不同信噪比条件下实际虚警概率和检测概率曲线 ($N=50, M=15$)Fig. 1 Actual false-alarm probability and detection probability curves under different signal-to-noise ratios ($N=50, M=15$)



(a)实际虚警概率曲线



(b)检测概率曲线

图 2 不同信噪比条件下实际虚警概率和检测概率曲线 ($N=50, M=25$)

Fig. 2 Actual false-alarm probability and detection probability curves under different signal-to-noise ratios ($N=50, M=25$)

为了考察接收信号样本数目 N 对所提 BDDEE 算法检测性能的影响,图 3 给出了当 N 分别取 30、50、100 和 150 时 BDDEE 算法在不同信噪比条件下的检测概率曲线.仿真过程中设置目标虚警概率为 0.1,天线数目 $M=10$.图 3 的仿真结果清楚表明,在给定样本数目的条件下,随着信噪比的增加,BDDEE 算法的检测概率也提升.例如,当样本数目固定为 $N=150$ 时,信噪比从 -16 dB 增加到 -8 dB,算法所对应的检测概率从 4.17% 相应上升到 96.52%;与此同时,随着样本数目的增加,BDDEE 算法的检测概率提升.例如,当给定信噪比为 -8 dB 时,所提算法在样本数目为上述四种取值时所对应的检测概率分别为 26.92%、48.16%、84.16% 和 96.36%.

为了考察天线数目 M 对所提 BDDEE 算法检测性能的影响,图 4 给出了当目标虚警概率为 0.1,样本数目 $N=50$,天线数目 M 分别设置为 5、10、20 和 30

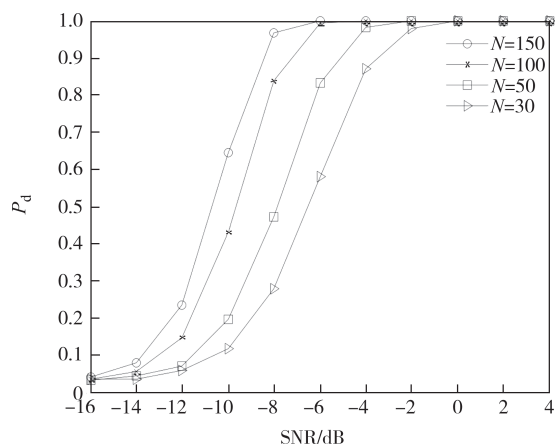


图 3 不同的接收信号样本数目条件下检测概率曲线 ($M=10$)
Fig. 3 Detection probability curves with different numbers of received signal samples ($M=10$)

时,所提 BDDEE 算法在不同信噪比条件下检测概率的对比曲线.从仿真结果不难看出,所提算法的检测概率随着天线数目的增加而增加.因此,在实际的检测过程中,可以通过增加天线的数目提升 BDDEE 算法的性能.其原因在于,随着天线数目的增加,次级用户可以收集到更多的接收信号相关信息,从而有利于在判决过程中做出正确的判断.

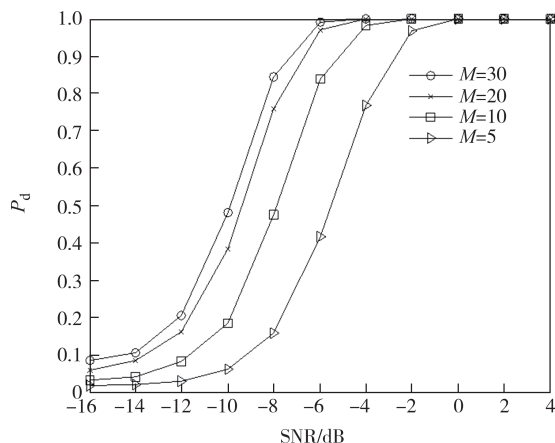


图 4 不同的天线数目条件下检测概率曲线 ($N=50$)
Fig. 4 Detection probability curves with different numbers of antennas ($N=50$)

图 5 考察了天线相关系数对所提 BDDEE 算法检测性能的影响.在仿真过程中虚警概率设置为 0.1,样本数目设置 $N=50$,天线数目固定为 $M=10$.仿真结果清楚地表明,当天线相关系数 (r) 分别取 0.3、0.5、0.7 和 0.9 时,所提算法的检测概率随着天线相关系数的增大而显著增大.其原因在于,随着天线相关系数的增大,取样协方差矩阵的最大特征值和最小特征值的差值变得越来越大,BDDEE 算法能够很好地

收集这些变化特征,从而可以得到更为准确的感知判决结果.因此,在实际的频谱感知过程中,可以采用增强接收信号相关性的技术,例如减小天线间隔或者对接收信号过采样等,以获得相关性更强的取样信号,从而进一步提升BDDEE算法的检测性能.

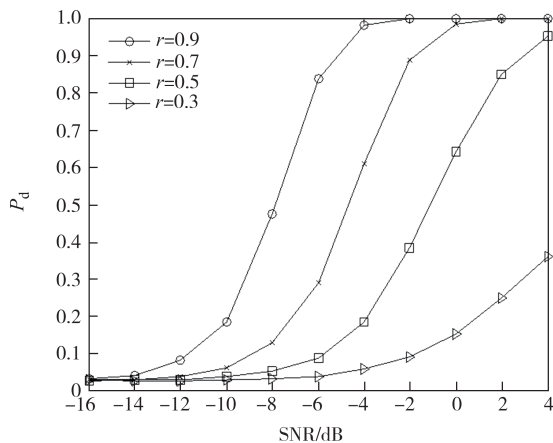


图5 不同的天线相关系数条件下检测概率曲线
($N=50, M=10$)

Fig. 5 Detection probability curves with different antenna correlation coefficients ($N=50, M=10$)

4 结论

提出了一种基于SCM极值特征值之差的多天线频谱感知算法BDDEE,其以最大最小特征值之差与多天线接收信号平均能量之比作为感知判决量,在判决过程中摆脱了对噪声方差的估计,且无须使用主用户信号、无线信道以及噪声方差等参数,具有全盲检测的特征.在此基础上,基于有限维Wishart随机矩阵有序特征值分布的相关结果,从理论上提出了一种BDDEE算法精确虚警概率和判决门限的分析和计算方法;与此同时,考虑到次级用户计算和存储资源的限制,利用最新的高维随机矩阵理论中关于极值特征值的分布结果,通过融合最大和最小特征值极限分布所对应的近似判决门限,提出了一种低计算复杂度的判决门限计算方法.仿真结果表明,与CAV、MME算法相比,所提BDDEE算法获得了更高的检测概率,从而有利于保护主用户之间的通信不受干扰;而与DMME及其改进算法相比,则能获得更加可靠的检测结果,从而有利于次级用户提高频谱使用效率.

参考文献

- [1] SAFDAR MALIK T, RAZZAQ MALIK K, AFZAL A, et al. RL-IoT: reinforcement learning-based routing approach for cognitive radio-enabled IoT communications [J]. IEEE Internet of Things Journal, 2023, 10(2): 1836-1847.
- [2] TIAN D X, ZHOU J S, WANG Y P, et al. Channel access optimization with adaptive congestion pricing for cognitive vehicular networks: an evolutionary game approach [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2020, 19(4): 803-820.
- [3] 王金龙, 徐煜华, 陈瑾. 无线通信网络智能频谱协同与对抗[J]. 中国科学: 信息科学, 2020, 50(11): 1767-1780.
WANG J L, XU Y H, CHEN J. Intelligent spectrum collaboration and confrontation in wireless communication networks [J]. Scientia Sinica (Informationis), 2020, 50(11): 1767-1780. (in Chinese)
- [4] 张传福, 赵立英, 张宇. 5G移动通信系统及关键技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2018.
ZHANG C F, ZHAO L Y, ZHANG Y. 5G mobile communication system and its key technologies [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2018. (in Chinese)
- [5] 胡志刚, 汤海冰. 认知无线电系统的最优帧长设计[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(1): 98-102.
HU Z G, TANG H B. Optimal frame duration for cognitive radio system [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2013, 40(1): 98-102. (in Chinese)
- [6] 吴晓晓, 李刚强, 张胜利. 分布式协作频谱感知网络中恶意节点检测和定位方法研究[J]. 电子学报, 2022, 50(6): 1370-1380.
WU X X, LI G Q, ZHANG S L. Detection and localization of malicious nodes in distributed cooperative spectrum sensing network [J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(6): 1370-1380. (in Chinese)
- [7] ALI A, HAMOUDA W. Advances on spectrum sensing for cognitive radio networks: theory and applications [J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2017, 19(2): 1277-1304.
- [8] 孙佳琛, 王金龙, 丁国如, 等. 频谱知识图谱: 面向未来频谱管理的智能引擎[J]. 通信学报, 2021, 42(5): 1-12.
SUN J C, WANG J L, DING G R, et al. Spectrum knowledge graph: an intelligent engine facing future spectrum management [J]. Journal on Communications, 2021, 42(5): 1-12. (in Chinese)
- [9] CAPTAIN K, JOSHI M. SNR wall for generalized energy detector in the presence of noise uncertainty and fading [J]. Physical Communication, 2019, 32: 172-184.
- [10] ZHAO W J, LI H, JIN M L, et al. Eigenvalues-based universal spectrum sensing algorithm in cognitive radio networks [J]. IEEE Systems Journal, 2021, 15(3): 3391-3402.
- [11] AWIN F, ABDEL-RAHEEM E, TEPE K. Blind spectrum sensing approaches for interweaved cognitive radio system: a tutorial and short course [J]. IEEE Communications Surveys &

- Tutorials, 2019, 21(1): 238–259.
- [12] ZHAO W J, ALI S S, JIN M L, et al. Extreme eigenvalues-based detectors for spectrum sensing in cognitive radio networks [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2022, 70(1): 538–551.
- [13] ZENG Y H, LIANG Y C. Spectrum-sensing algorithms for cognitive radio based on statistical covariances [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2009, 58(4): 1804–1815.
- [14] ZENG Y, LIANG Y C. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2009, 57(6): 1784–1793.
- [15] KORTUN A, RATNARAJAH T, SELLATHURAI M, et al. On the performance of eigenvalue-based cooperative spectrum sensing for cognitive radio [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(1): 49–55.
- [16] MATTHAIYOU M, MCKAY M R, SMITH P J, et al. On the condition number distribution of complex wishart matrices [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(6): 1705–1717.
- [17] ZHANG W S, WANG J J, SUN J, et al. Standard condition number distributions of finite wishart matrices for cognitive radio networks [J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(5): 4630–4634.
- [18] PENNA F, GARELLO R, SPIRITO M A. Cooperative spectrum sensing based on the limiting eigenvalue ratio distribution in wishart matrices [J]. *IEEE Communications Letters*, 2009, 13(7): 507–509.
- [19] SHAKIR M Z, RAO A L, ALOUINI M S. On the decision threshold of eigenvalue ratio detector based on moments of joint and marginal distributions of extreme eigenvalues [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2013, 12(3): 974–983.
- [20] 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之差的频谱感知技术研究 [J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(11): 2571–2575.
- WANG Y X, LU G Y. DMM based spectrum sensing method for cognitive radio systems [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(11): 2571–2575. (in Chinese)
- [21] 卢光跃, 弥寅, 包志强. 特征值极限分布的改进合作频谱感知 [J]. *信号处理*, 2014, 30(3): 261–267.
- LU G Y, MI Y, BAO Z Q. Novel cooperative spectrum sensing based on limiting eigenvalue distribution [J]. *Journal of Signal Processing*, 2014, 30(3): 261–267. (in Chinese)
- [22] BAI Z D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, a review [C]//*Advances in Statistics*. National University of Singapore. World Scientific, 2008: 611–677.
- [23] MUIRHEAD R J. *Aspects of Multivariate Statistical Theory* [M]. New York: Wiley, 1982.
- [24] CHIARI M, ZANELLA A. Joint distribution of an arbitrary subset of the ordered eigenvalues of Wishart matrices [C]//2008 IEEE 19th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications. Cannes: IEEE, 2008: 1–6.
- [25] 杨喜, 田冲, 方如意, 等. 基于数值分析理论的低复杂度 MED 算法 [J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2022, 49(10): 24–33.
- YANG X, TIAN C, FANG R Y, et al. Low complexity MED algorithm based on numerical analysis theories [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2022, 49(10): 24–33. (in Chinese)