第 51 卷 第 7 期　　湖南大学学报（自然科学版）　　Vol.51，No.7
2024 年 7 月　　Journal of Hunan University（Natural Sciences）　　Jul. 2024

文章编号：1674-2974（2024）07-0062-10　　DOI：10.16339/j.cnki.hdxbzkb.2024068

模态测试不确定性影响因素分析及传感器布置应用

王志宇 [1]，陈华钊 [1]，施袁锋 [1,2†]，张惊朝 [3]，戴靠山 [1,2]
［1. 四川大学 建筑与环境学院，四川 成都 610065；
2. 深地科学与工程教育部重点实验室（四川大学），四川 成都 610065；
3. 中国建筑第八工程局有限公司，四川 成都 610093］

摘　要：模态测试结果的准确性会受测试数据采集、数据处理、建模假设和参数估计等不确定性因素的影响. 为研究模态测试中模态参数的不确定性水平及不同影响因素对其的影响规律，本文采用状态空间模型和费希尔信息矩阵的快速模态参数不确定性分析方法，探讨包括振动信号的采样时长、采样频率、采样信噪比和结构的阻尼比等多种因素对模态参数不确定性水平的影响，同时提出利用模态参数不确定性水平来优化传感器布置策略的实用性建议. 结果表明：模态参数的不确定性水平随采样时长、采样频率、信噪比和传感器数量的增加而降低，随结构阻尼比的增大而升高；对于均匀分布结构，多数传感器布置在结构顶部和中上部，少数布置在中下部时，模态参数的整体不确定性水平较低，是一种相对较优的传感器布置方案.

关键词：模态测试；不确定性分析；费希尔信息矩阵；状态空间方法
中图分类号：TU311.3　　**文献标志码**：A

Analysis of Influencing Factors on Uncertainty in Modal Testing and its Application on Sensor Layout Scheme

WANG Zhiyu[1]，CHEN Huazhao[1]，SHI Yuanfeng[1,2†]，ZHANG Jingzhao[3]，DAI Kaoshan[1,2]
［1. College Architecture & Environment，Sichuan University，Chengdu 610065，China；
2. Key Laboratory of Deep Earth Science and Engineering（Sichuan University），Ministry of Education，Chengdu 610065，China；
3. China Construction Eight Engineering Division Corp.，Ltd.，Chengdu 610093，China］

Abstract：The accuracy of modal test results is affected by uncertain influencing factors such as data acquisition，data processing，and parameter estimation. To study the uncertainty levels of modal parameters and their behaviors under different influencing factors in modal testing，a fast uncertainty quantification analysis method based on the state space model and Fisher information matrix（FIM）is adopted. The influence of multiple factors including data duration，sampling frequency，signal-to-noise ratio，and damping ratio of vibration signal on the uncertainty levels of modal parameters is discussed，and a practical way for optimizing the sensor layout scheme

* 收稿日期：2023-10-31
基金项目：国家自然科学基金资助项目（52278512），National Natural Science Foundation of China（52278512）；科技部重点研发计划资助项目（2022YFE0113600），MOST Key Research and Development Plan（2022YFE0113600）；四川省自然科学基金资助项目（2022NSFC0432），Sichuan Provincial Natural Science Foundation（2022NSFC0432）
作者简介：王志宇（1980—），男，四川成都人，四川大学副教授，博士
† 通信联系人，E-mail：shiyuanfeng@scu.edu.cn

through uncertainty analysis is proposed. Results show that the uncertainty level of modal parameters decreases with the increase of data duration, sampling frequency, signal-to-noise ratio, and the number of sensors, and increases with the increase of damping ratio; for uniformly distributed structures, the majority of the sensors at the upper and middle region of the structure and only a few at the lower region is a preferred sensor layout scheme with small overall uncertainty of modal parameters.

Key words: modal testing; uncertainty analysis; Fisher information matrix; state-space methods

---

模态测试和分析是从实测的结构动力响应中提取结构的频率、阻尼和振型等动力特性. 模态分析目前已被广泛用于航空航天、机械和土木工程等领域中的振动故障排除、结构模型修正、设计优化、结构振动控制以及基于振动的结构健康监测和损伤识别等[1-2].

按结构系统输入激励是否已知,将模态分析分为试验模态分析(Experimental Modal Analysis, EMA)和运行模态分析(Operational Modal Analysis, OMA)[1]. OMA是利用结构在环境激励下运行时的响应数据,与EMA相比,OMA具有无须额外激励设备、无须边界条件模拟、结构可正常使用和成本低等优点[1]. 然而,大多数学者在进行模态分析时,并没有考虑参数的不确定性问题[3-6]. 在模态分析中由于系统的输入未知、输出的数据长度有限、采集设备存在测量误差、测量噪声及建模误差等不确定性因素会导致模态参数估计产生准确性问题[2, 7]. 因此,实现模态参数的不确定性量化,可直观地获得每个参数识别的准确度,有助于后续性能评估和决策[8].

在模态参数不确定性分析的研究中,Gersch[9]提出采用ARMA模型计算随机激励下结构系统的固有频率和阻尼参数的估计精度;Paez等[10]使用Bootstrap方法估计模态参数的统计特征;Pintelon等[11]根据频响函数计算结构模态参数的不确定性边界;Reynders等[12]讨论了随机子空间(SSI)方法中参数的不确定性计算;Döhler等[13]根据摄动理论计算了SSI方法识别参数的不确定性;Yuen[14]和Katafygiotis等[15]推动了贝叶斯方法在模态参数估计不确定性领域的研究;Au[16-17]基于贝叶斯理论,通过级数近似的方法实现对模态参数的“后验不确定性”的快速计算,并分析其规律及应用;Yan[18-19]提出了两阶段快速贝叶斯功率谱密度方法的最优值估计以及协方差矩阵的计算方法. 在上述不确定性分析的研究中,关于不同因素的影响规律探讨较少[2]. 了解不同因素对模态参数不确定性的影响规律具有重要指导意义. 一方面,可对满足模态参数精度要求的试验条件进行合理配置;另一方面,将不确定性程度作为加权信息运用到模型修正中,可获得更为可靠的修正结果[20].

本文利用随机状态空间模型和克拉美罗界(CRB)的快速模态参数识别不确定性分析方法[21],详细探讨分析了不同模态参数不确定性水平影响因素的影响规律. 通过单自由度和5层剪切框架模型进行模拟分析,研究了包括响应数据采样时长、采样频率、信噪比和结构阻尼比在内的多种因素对不确定性的影响以及实现了利用模态参数估计的不确定性程度来优化布置传感器. 结合基于不确定性分析的广州塔模态测试传感器优化布置的实例,给出了实际模态测试中试验配置的实用性建议.

1 基于状态空间模型的模态参数估计不确定性分析

1.1 随机状态空间模型

结构系统在随机激励下的动力响应可用离散随机状态空间模型表示:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$,为系统在$k$时刻的状态向量,$n_s$为状态向量维度即模型阶次;$\boldsymbol{y}_k \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$,为系统$n_o$个测量通道在$k$时刻的响应向量;$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$,为描述系统内部状态的状态矩阵;$\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_s}$,为描述内部状态如何转换到响应向量$\boldsymbol{y}_k$的输出矩阵;$\boldsymbol{w}_k \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$,为系统输入随机激励;$\boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^{n_o \times 1}$,为响应测量噪声. 假设状态向量的初值$\boldsymbol{x}_1$服从均值为$\boldsymbol{\mu}_1$、协方差为$\boldsymbol{P}_1$的高斯

分布,即 $\boldsymbol{x}_1 \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{P}_1)$;同时,$\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 为高斯白噪声序列,且两者的协方差为

$$E\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_p\\ \boldsymbol{v}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_q^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{v}_q^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\delta_{pq} \tag{2}$$

式中:$E[\cdot]$代表期望算子;$\boldsymbol{Q}$ 为 $\boldsymbol{w}_k$ 自身的协方差;上标T表示转置运算;$\boldsymbol{R}$ 为 $\boldsymbol{v}_k$ 自身的协方差;$\boldsymbol{S}$ 为 $\boldsymbol{w}_k$ 与 $\boldsymbol{v}_k$ 的协方差;δ_{pq} 为克罗内克函数.式(1)中假设 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\{\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{v}_k\}$ 不相关,但 $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 存在相关性.

利用时序长为 r 的观测响应 $\boldsymbol{Y}=\{y_1, y_2, \cdots, y_r\}$ 并结合随机状态空间模型式(1)来进行模态分析,用极大似然估计方法得到模型阶次为 n_s 和模型参数向量 $\boldsymbol{\theta} \triangleq \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{P}_1\}$.识别系统的模态频率和阻尼比与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复数特征值有关,即:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = a_i \pm \mathrm{j} b_i = \mathrm{e}^{-2\pi f_i \zeta_i T_s \pm \mathrm{j}2\pi f_i T_s \sqrt{1-\zeta_i^2}} \tag{3}$$

式中:λ_i, λ_i^* 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 对共轭特征值;a_i 和 b_i 分别为相应的实部和虚部;f_i 为系统第 i 阶模态频率,Hz;ζ_i 为系统第 i 阶模态阻尼比;T_s 为响应采样步长;$\mathrm{j}^2=-1$.系统测量通道位置对应的复模态共轭振型 $\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\phi}_i^*$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}$ 及矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量有关,即

$$\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_i,\ \boldsymbol{\phi}_i^* = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}_i^* \tag{4}$$

式中:$\boldsymbol{\varphi}_i, \boldsymbol{\varphi}_i^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 对共轭特征值对应的特征向量.

1.2 模态形式的状态空间模型

为直接得到模态参数的不确定性水平(1.3节),本文利用式(1)经相似变换后的模态形式状态空间模型进行计算.状态空间模型式(1)进行相似变换后,系统的模态信息和输出性质不变.令 $\bar{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_k$,$\boldsymbol{T}$ 为可逆转换矩阵,代入式(1)得到一特殊形式的模态状态空间模型:

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}_k + \bar{\boldsymbol{w}}_k\\ \boldsymbol{y}_k = \bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{v}_k\end{cases} \tag{5}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$;$\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}$;$\bar{\boldsymbol{w}}_k = \boldsymbol{T}\boldsymbol{w}_k$.

经相似变换后的其他统计参数分别为:$\bar{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}, \bar{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{S}, \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\mu}_1, \bar{\boldsymbol{P}}_1 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$.模态形式模型状态矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 为分块化对角矩阵,具体为:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{A}} = \mathrm{blkdiag}\Bigg\{&\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2\end{bmatrix}, \cdots,\\ &\begin{bmatrix}a_m & b_m\\ -b_m & a_m\end{bmatrix}, \lambda_{2m+1}, \cdots, \lambda_{n_s}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6}$$

式中:每一个分块矩阵 $\begin{bmatrix}a_i & b_i\\ -b_i & a_i\end{bmatrix}$ 在矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 中所占位置为两行两列,且对应代表了一个系统复模态,元素 a_i 为第 i 阶模态所对应的特征值的实部,b_i 则为该模态特征值的虚部;$\lambda_{2m+1}, \cdots, \lambda_{n_s}$ 为矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 或 $\boldsymbol{A}$ 的实数特征值.模态形式的矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 为一特殊归一化的形式,具体表达式为:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{C}} &= \begin{bmatrix}[c_1 \quad d_1] & \cdots & [c_i \quad d_i] & \cdots & c_n\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\vdots & & \vdots & & \vdots\\ [1 \quad 0] & \cdots & [c_{li} \quad d_{li}] & \cdots & c_{ln}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ [c_{s1} \quad d_{s1}] & \cdots & [1 \quad 0] & \cdots & c_{sn}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ [c_{t1} \quad d_{t1}] & \cdots & [c_{ti} \quad d_{ti}] & \cdots & 1\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

式中:$[c_i \quad d_i]$中的 c_i 和 d_i 分别为第 i 阶复模态振型式(4)的实部和虚部,$[1 \quad 0]$代表复模态振型最大幅值所对应的位置;c_n 为实模态振型,1为实模态振型最大幅值所对应的位置.相似变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的求解参见文献[21].

此时,模态形式状态空间模型式(5)的模型参数向量可写成:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \{\boldsymbol{\gamma}, \bar{\boldsymbol{C}}, \bar{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{R}, \bar{\boldsymbol{S}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}_1, \bar{\boldsymbol{P}}_1\} \tag{8}$$

式中:$\boldsymbol{\gamma} = \left[f_1, f_2, \cdots, f_m, \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m, \lambda_{2m+1}, \cdots, \lambda_{n_s}\right]^{\mathrm{T}}$,为系统的复模态频率、阻尼比和实模态特征值组成的向量.

1.3 模态参数估计不确定性量化

基于随机系统假设的模型参数估计不确定性程度一般用其统计变量来描述,如均值、均方误差、协方差等.一般情况下,要直接求得估计参数的不确定性比较困难.利用极大似然估计值的渐进无偏性,模态模型参数式(8)的估计值 $\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ 的协方差满足下式[22]:

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}\right) \geqslant \boldsymbol{I}^{\dagger}\left(\bar{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{9}$$

式中:$\mathrm{Cov}(\cdot)$表示协方差算子;$\boldsymbol{I}\left(\bar{\boldsymbol{\theta}}\right)$ 为模型参数 $\hat{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$ 的费希尔信息矩阵(FIM);† 表示矩阵的伪逆.式(9)也称为克拉美罗界(CRB),当数据量足够长时模型参数估计值的协方差将趋近CRB值.因此,下文将以CRB值近似作为模态参数估计值的不确定性水平.利用式(9)求模型参数估计的不确定性下界时,关键是FIM求解的准确性及计算效率问题.

随机状态空间模型的FIM具有解析形式.对于

模态形式状态空间模型式(5),其FIM矩阵元素可表示为[23]:

$$I_{i,j}(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = -E\left[\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{Y}|\bar{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\bar{\theta}_i\partial\bar{\theta}_j}\right] = \sum_{k=1}^{N}\mathrm{tr}\left\{\boldsymbol{B}_k^{-1}E\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_k}{\partial\bar{\theta}_i}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{T}}}{\partial\bar{\theta}_j}\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_k^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{B}_k}{\partial\bar{\theta}_i}\boldsymbol{B}_k^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{B}_k}{\partial\bar{\theta}_j}\right\} \tag{10}$$

式中:i,j代表$\boldsymbol{I}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$矩阵元素位置;$L(\boldsymbol{Y}|\bar{\boldsymbol{\theta}})$为模型的对数似然函数;$\mathrm{tr}\{\cdot\}$表示求矩阵的迹算子;$\boldsymbol{\varepsilon}_k$表示由卡尔曼滤波得到的残差,其协方差为$\boldsymbol{B}_k$,服从正态分布$\boldsymbol{\varepsilon}_k \sim N(0, \boldsymbol{B}_k)$;式中各项符号的具体表达式参见文献[21].

此时,将模态形式的模型参数($\bar{\boldsymbol{\theta}}$)代入式(10)中,计算出模态参数的FIM,结合式(9),得到模态参数的协方差下界.由于FIM的维度较大,故运行时间长,为了保证计算精度同时缩短运行时间,本文采用由Shi等[21]提出的快速计算FIM的方法.

2 模态参数不确定性影响因素规律分析

一般情况下,参数估计的不确定性水平与响应数据、识别系统模型的维度以及识别算法等有关,因此在识别中通过调整测量数据信息和模型选择等,实现对参数识别的不确定性水平的基本掌控.基于状态空间模型的不确定性分析中,影响参数估计不确定性水平的因素包括响应数据采样时长、采样频率、测量信噪比、传感器数量和测试对象的固有动力特性等.下面分别讨论各种影响因素对模态参数估计不确定性水平的影响规律以及应用.

本文采用结构模态频率固定的单自由度结构作为研究对象,分析数据采样时长、采样频率、信噪比及结构阻尼比对模态参数估计不确定性的影响程度.根据不同影响因素对参数估计不确定性的影响规律给出在实际模态测试应用中的传感器布置的建议.

单自由度结构的运动方程为:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = p(t) \tag{11}$$

式中:u、$\dot{u}$和$\ddot{u}$分别为结构位移、速度和加速度,结构的固有频率$f = \omega/2\pi = 1$ Hz,结构受功率谱密度强度为$S_0 = 1\ (\mu g)^2/\mathrm{Hz}$的白噪声随机激励$p(t)$的作用.案例选用以下基准值:阻尼比$\zeta = 1\%$,数据采样时长$T_d$ =200 s,采样频率$F_s = 1/T_s = 10$ Hz,响应数据的信噪比SNR = 1 dB,其中SNR(Signal-to-Noise Ratio)为:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_s}{P_n} \tag{12}$$

式中:P_s、P_n分别为真实信号和测量噪声的功率强度.

在研究模态参数估计不确定性的某种影响因素的规律时,假定系统的模型参数θ或$\bar{\theta}$已通过系统识别估计得到,以此来计算式(10)的FIM.模态测试中一般阻尼的变异系数远大于模态频率的变异系数.但是,模态阻尼比是在模态频率的基础上确定的,模态频率在模态测试中的主导性更强.根据Au[2]提出的频域方面的不确定性定律,在阻尼比较小条件下模态频率的变异系数约等于阻尼比的标准差.本文将模态频率的变异系数和阻尼比的标准差分别作为两者的不确定性水平的指标,可在同量级范围内考虑两者在不同模态测试情况下的不确定性.

2.1 数据采样时长对模态参数估计不确定性的影响

为研究数据采样时长对模态参数估计不确定性水平的影响规律,选择采样时长T_d=100 s、200 s、300 s、400 s、500 s递增的方式,其余模型参数则保持基准值,分别计算模态频率的变异系数$\mathrm{CV_f}$和阻尼比的标准差σ_ζ,其结果如图1所示.

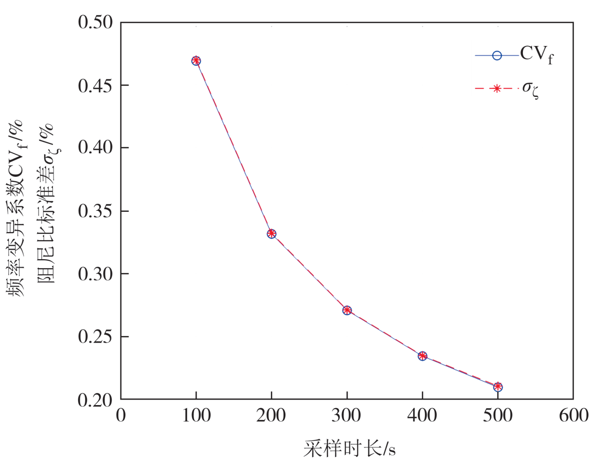


图1　采样时长与模态参数变异系数或标准差的关系

Fig.1　Relationship between data duration and coefficient of variation or standard deviation of modal parameters

由图1可知,$\mathrm{CV_f}$和σ_ζ数值基本相同,随采样时长的增加而减小,且减小的趋势逐渐平缓.由此可知,随着采样时长T_d的增加,振动响应包含结构性信息量增多,可使模型参数的估计结果更加可靠,故其

变异系数或标准差变小;但当 T_d 增加到一定程度时,用于参数估计的有效信息趋于饱和,此时,继续增大 T_d 对识别结果的精度提升放缓.

2.2 数据采样频率对模态参数估计不确定性的影响

为研究数据采样频率对模态参数估计不确定性水平的影响,选择采样频率 F_s=5 Hz、10 Hz、20 Hz、50 Hz、100 Hz递增的方式,其余参数则保持基准值,分别计算 CV_f 和 σ_ζ,其结果如图2所示.

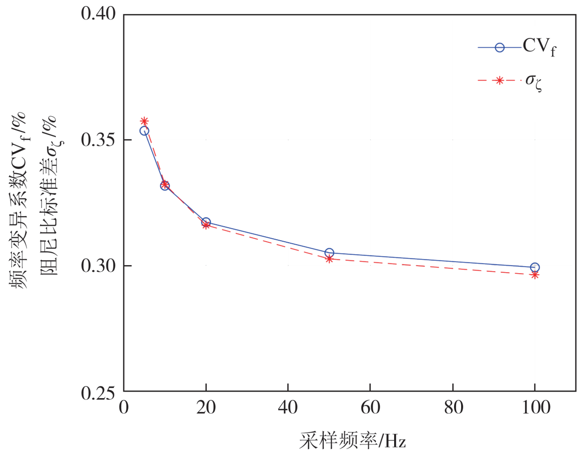


图2 采样频率与模态参数变异系数或标准差的关系

Fig.2 Relationship between sampling frequency and coefficient of variation or standard deviation of modal parameters

由图2可知,CV_f 和 σ_ζ 均随着采样频率的增大而减小,且减小的趋势逐渐平缓.由此可知,与采样时长对结构模态参数估计不确定性水平的影响相似,模态参数不确定性随着 F_s 的增大,采样点在时域内更密集,单位时间获得的结构特性信息增多,可使模型识别的结果更可靠.当 F_s 达到50倍的结构频率时,获得的结构有效响应能反映结构模态信息量趋于饱和,此时,参数估计结果的精度变化不大.此外,从 CV_f 和 σ_ζ 曲线的变化幅值来看,与图1对比可发现,采样频率对模态参数不确定性的影响程度比采样时长小.

2.3 信噪比对模态参数估计不确定性的影响

为研究响应信噪比对模态参数估计不确定性水平的影响规律,通过变化系统的信噪比,即放大或缩小 $\boldsymbol{R}$ 矩阵来实现,即选择信噪比SNR=0.1 dB、0.5 dB、1 dB、2 dB、10 dB,其余参数保持基准值,分别计算 CV_f 和 σ_ζ,其结果如图3所示.

由图3可知,当SNR较大时,对模态参数估计的不确定性水平更小;但随着SNR的减小,不确定性水平快速增加.这是由于当SNR变小时,信号的幅值与噪声的幅值相比会减小,此时,夹带噪声的振动信号

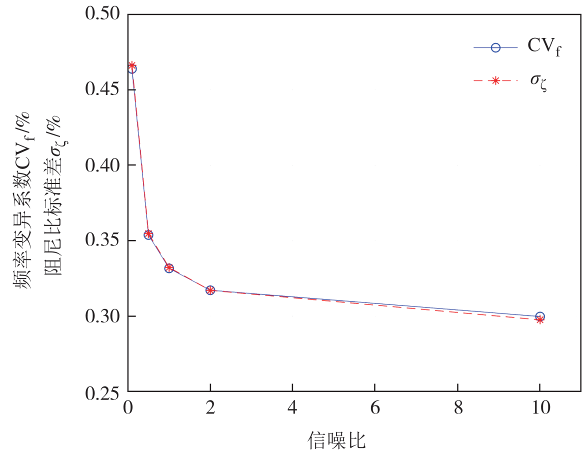


图3 信噪比与模态参数变异系数或标准差的关系

Fig.3 Relationship between SNR and coefficient of variation or standard deviation of modal parameters

能准确识别模态参数的信息量同步减少,模态参数估计的不确定性增大.因此,在信号采集阶段,应尽量避免使用测量噪声过大的传感器,这有助于提高参数识别精度,这也与我们在进行常规模态测试时对传感器影响的认知一致.

2.4 结构阻尼比对模态参数估计不确定性的影响

为研究结构阻尼比对模态参数估计不确定性水平的影响规律,通过变化结构阻尼比,其余参数保持基准值来分析.选择阻尼比 ζ =1%、2%、3%、5%、10%,分别计算 CV_f 和 σ_ζ,结果如图4所示.

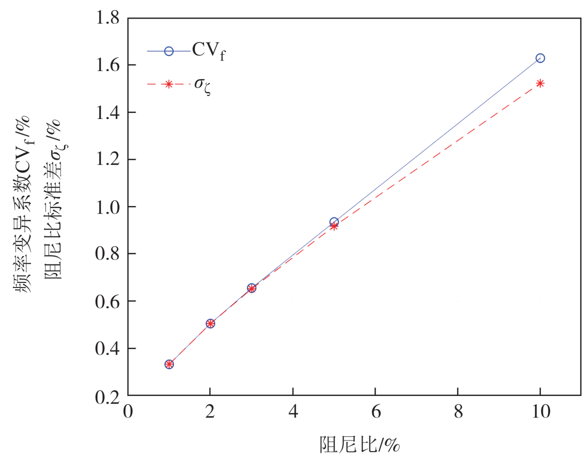


图4 结构阻尼比与模态参数变异系数或标准差的关系

Fig.4 Relationship between structural damping ratio and coefficient of variation or standard deviation of modal parameters

由图4可知,CV_f 和 σ_ζ 在结构阻尼比取5%以下时,数值基本相同.随着阻尼比的增大,结构模态参数估计的不确定性水平增大;从 CV_f 和 σ_ζ 曲线的变化幅值来看,与图1~图3对比可知,结构阻尼比变化

对模态参数不确定性水平的影响更大．因此，对于阻尼比较大的结构，在进行模态分析时，应采取可控措施来降低其不确定性，比如增加采样时长和采样频率等，以获得更精确的识别结果．

综上所述，由单自由度结构各种影响因素对模态参数估计不确定性水平的影响规律分析结果可知，在实际模态测试的试验配置中，应尽量选择测量精度高的传感设备，当对模态测试结果不确定性有具体要求时，可采取调整信号的采样时长和采样频率等措施来实现．

3　基于模态参数不确定性水平的传感器优化布置应用

通常传感器数量布置越多，可获得信息越多，可得到的模态参数不确定性水平越低．但是，当传感器数量有限时，就涉及传感器的优化布置问题．所谓优化布置是寻找使参数识别的不确定性水平较低的传感器布置．本节以一个5层剪切框架模型为例，通过快速模态参数不确定性分析来讨论包括传感器位置和数量在内的传感器优化布置问题，然后以广州塔实测数据分析为实例验证传感器位置与不确定性水平的关系．由于传感器的优化布置与结构本身特性有关，本文以简单的穷举法来比较不同传感器布置方案的模态不确定性水平．

3.1　5层剪切框架模型的传感器优化布置

该5层剪切框架结构模型如图5所示，各层质量 $m_j = 10$ kg $(j = 1, 2, \cdots, 5)$，各层的剪切刚度 $k_j = 1\,500$ N/m，各楼层处的白噪声激励的功率谱密度强度为1.6 N^2/Hz，结构楼层处响应的采样时长为500 s，采样频率为20 Hz，测量噪声信噪比为1 dB. 该5层结构的5阶频率分别为 $f_1 = 0.55$ Hz、$f_2 = 1.62$ Hz、$f_3 = 2.55$ Hz、$f_4 = 3.28$ Hz、$f_5 = 3.74$ Hz. 假设结构阻尼为瑞利阻尼，令 $\zeta_1 = \zeta_5 = 2\%$，可得阻尼矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为：

$$\boldsymbol{D} = a_0\boldsymbol{M} + a_1\boldsymbol{K} \tag{13}$$

式中：$\boldsymbol{M}$ 为质量矩阵；$\boldsymbol{K}$ 为刚度矩阵；a_0 和 a_1 均为常系数，分别为0.121 4、0.001 5；其他各阶模态阻尼比分别为 $\zeta_2 = 1.36\%$、$\zeta_3 = 1.58\%$、$\zeta_4 = 1.84\%$.

为了比较不同传感器布置数量和位置导致参数估计不确定性差异，本节首先选用5个楼层传感器全布置获得的响应数据来识别得到状态空间模型参数结果作为标准，以确保在比较不同传感器布置方案时结构的模态参数信息不变．然后，通过提取识别模型中的 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{R}$ 矩阵与相应传感器数量和位置布置方案对应位置的模型参数数据，组成新的状态空间模型参数来计算FIM，快速得到相应传感器布置方案的模态参数不确定性信息．

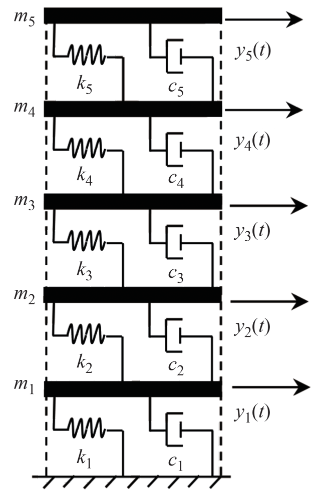


图5　5层剪切框架模型（c_j表示阻尼参数）

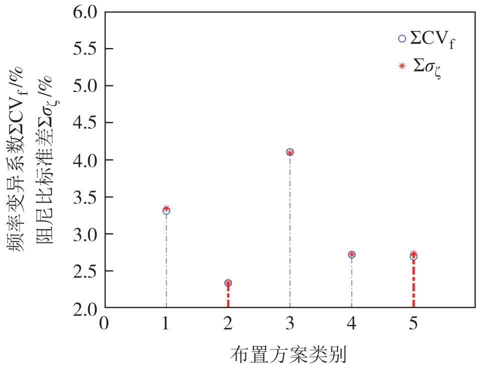
Fig.5　Five story shear frame model

（c_j is the damping coefficient）

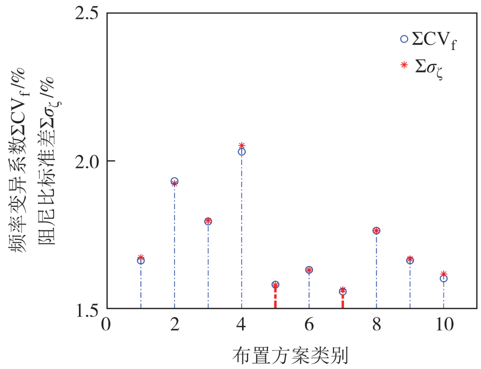
3.1.1　传感器位置与模态参数估计不确定性水平的关系

为讨论传感器数量和位置与模态参数不确定性水平的关系，我们考虑布置1、2、3、4个传感器数量的4种传感器位置布置情况，每个布置情况分别对应5、10、10、5组不同的布置方案．每种布置情况不同的方案顺序，均按照楼层由低到高的排列组合方式进行排列布置，对每一组布置方案分别计算各阶模态频率变异系数之和（$\sum \mathrm{CV}_f$）与阻尼标准差之和（$\sum \sigma_\zeta$），结果如图6所示．

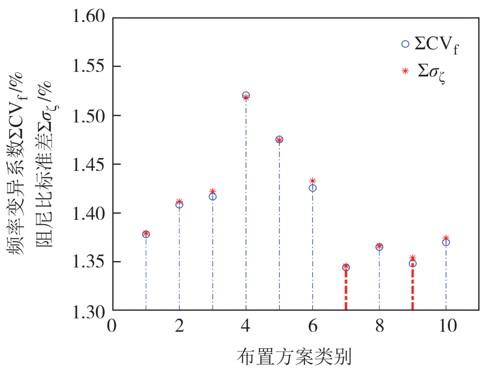
根据图6可知，当传感器数量为1时，第2层和第5层传感器布置方案得到的参数不确定性水平较低，即传感器布置在结构中部偏下或者顶部位置可获得较优的识别结果；当传感器数量为2时，第5组（2、3层布置）和第7组（2、5层布置）传感器布置方案得到的参数不确定性水平较低，即一个传感器布置在结构中部偏下，另一个布置在结构中部偏上或顶部时，可获得较优的识别结果；当传感器数量为3时，第7组（2、3、4层布置）和第9组（2、4、5层布置）传感器布置方案得到的参数不确定性水平较低，即1个传感器布置在结构中部偏下，2个传感器布置在结



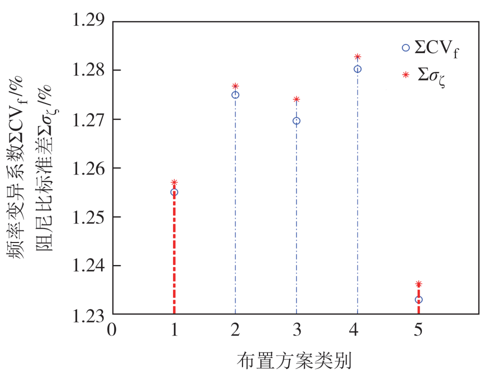
(a)传感器数量为1



(b)传感器数量为2



(c)传感器数量为3



(d)传感器数量为4

图6 模态参数变异系数或标准差与传感器布置位置的关系

Fig.6 Relationship between coefficient of variation or standard deviation of modal parameters and sensor location

构中部偏上和顶部位置时,可获得较优的识别结果;当传感器数量为4时,第5组(2、3、4、5层)传感器布置方案得到的参数不确定性明显优于其余几组,即1个传感器布置在结构中部偏下,3个传感器布置在结构中部偏上和顶部位置时,可获得较优的识别结果.

综上所述可以初步推断,对均匀分布结构,在传感器数量有限时,少部分布置在结构中部偏下,大部分布置在结构中部偏上或者顶部时,传感器测得的响应用于参数识别,可获得较优的结果.

3.1.2 传感器数量与模态参数估计不确定性水平的关系

为研究传感器数量与模态参数估计不确定性的关系,选取3.1.1小节每种传感器位置布置情况中,模态参数不确定性最小的一组,其结果如图7所示.

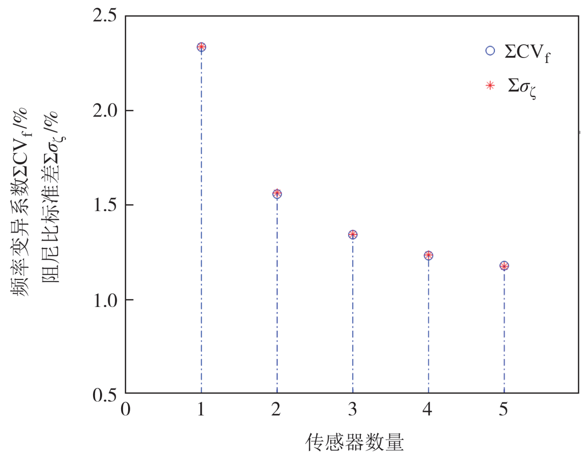


图7 变异系数或标准差与传感器数量的关系

Fig.7 Relationship between coefficient of variation or standard deviation and number of sensors

由图7可知,随着传感器数量的增多,$\sum CV_f$和$\sum \sigma_\zeta$均降低,且趋势逐渐平缓.这意味着模态参数不确定性水平会随着传感器的数量增加而降低,但增加到一定程度后,继续增加传感器数量对于降低不确定性水平的贡献会逐渐降低.

3.2 广州塔传感器优化布置应用

本节以广州塔实测数据分析来验证3.1节基于不确定性水平的传感器优化布置方法.广州塔振动监测系统安装有20个水平加速度计,分别设置在塔内的8个检测断面上,采样频率为50 Hz,详细的安装位置与方向,如图8所示(数据来源:http://www.zn903.com/ceyxia/benchmark/index.htm.).这里,采用沿x轴方向的8个传感器(图8中传感器02、04、06、09、12、14、16、19)的方案来进行验证,数据选用2010年1月20日10:00—11:00在环境激励下测得的加速度响应.

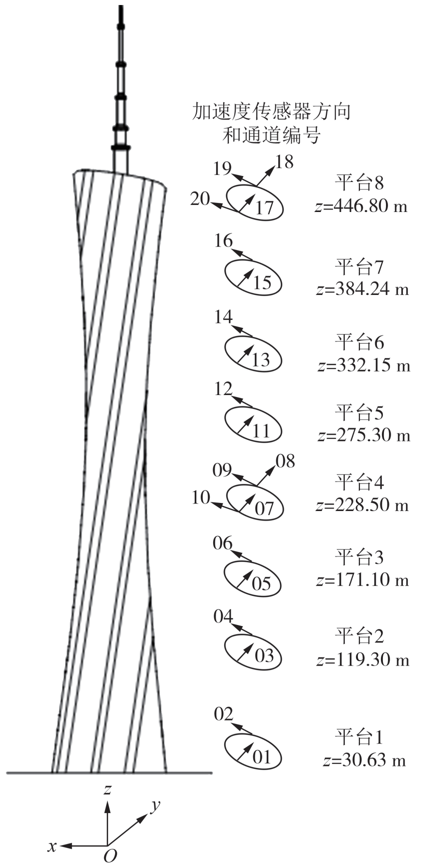
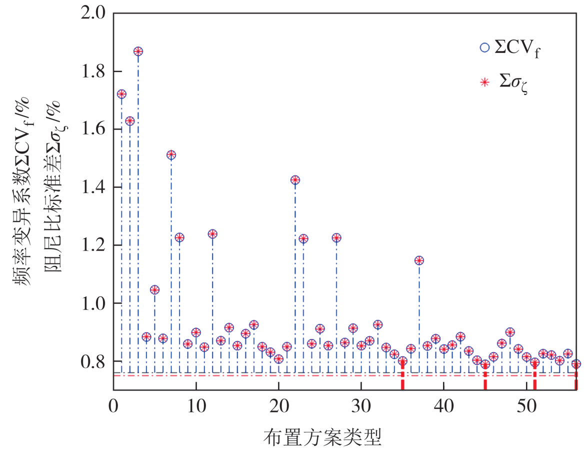


图 8　广州塔及其加速度传感器布置位置图

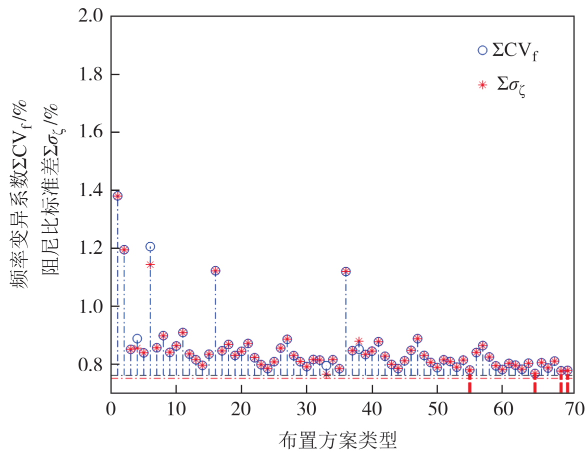
Fig.8　Layout of Canton Tower and its acceleration sensor

由 3.1 节可知,传感器数量增加到一定程度时,对于降低模态参数不确定性水平的贡献会逐渐降低,且在实际应用中,增加传感器数量也将增大测试成本.对于广州塔结构 8 个维护平台,现考虑传感器数量分别为 3 个和 4 个的优化布置问题.首先以传感器数量为 8 的振动响应数据识别得到的状态空间模型作为结构整体动力模型依据;接着计算传感器数量分别为 3 个时 $C_8^3=56$ 种、4 个时 $C_8^4=70$ 种位置布置方案(按照 C_8^3、C_8^4 从小到大的顺序进行排列),然后计算出各方案对应的模态参数不确定性之和,进行比较后找出几种较优的布置方案.各阶模态频率变异系数之和模态阻尼比标准差之和的结果如图 9(a)(b)所示.同时,传感器数量为 8 时得到的模态参数不确定性水平如图 9 所示,水平线为传感器数量为 8 的识别情况,模态频率变异系数之和以及阻尼比标准差之和,分别以 $\sum CV_f=0.76$、$\sum\sigma_\zeta=0.75$ 作为基础对照.

由图 9 可知,4 个传感器的不确定性水平整体上要低于 3 个传感器的情况,且 4 个传感器最优布置的不确定性水平要低于 3 个传感器最优布置时的不确定性水平,符合 3.1 节结论.图 9(b)传感器数量为 4 时,模态频率变异系数和模态阻尼比标准差之和较小的 4 种(图中由红色虚线指出)分别为第 55 种(平台 2、6、7、8)、第 65 种(平台 3、6、7、8)、第 69 种(平台 4、6、7、8)、第 70 种(平台 5、6、7、8)布置方案.传感器大部分布置在结构中部偏上和顶部的位置,少部分布置在结构中部偏下时,其参数的整体不确定性更小,与 3.1 节的结论一致.



(a)传感器数量为 3



(b)传感器数量为 4

图 9　广州塔传感器布置位置与模态参数变异系数或标准差的关系图

Fig.9　Relationship between sensor location and coefficient of variation or standard deviation of modal parameters of Canton Tower

为了进一步验证以上推断,对上述 4 种较优布置方案以及任选 5 种其他布置方案[第 11 种(平台 1、2、5、7)、第 15 种(平台 1、2、7、8)第 34 种(平台 1、5、7、8)、第 40 种(平台 2、3、5、6)和第 56 种(平台 3、4、5、6]对应的实测加速度响应分别单独进行模态分析以及不确定性分析求 $\sum CV_f$ 和 $\sum\sigma_\zeta$,并计算其总的不确定性水平 $\sum=\sum CV_f+\sum\sigma_\zeta$,结果如表 1 所

示. 从表1中可以看出,在实际布置位置数据识别结果中,4种优化位置布置方案的参数整体不确定性水平均小于其他布置方案. 实际结果表明了几种较优布置方案的可靠性.

表1 不同传感器布置方案实测响应的模态参数不确定性水平比较

Tab.1 Comparison of uncertainty levels of modal parameters from actual responses of different sensor setups

布置方案	$\sum CV_f$/%	$\sum \sigma_\zeta$/%	$\sum$/%
第11种(平台1、2、5、7)	2.86	2.74	5.60
第15种(平台1、2、7、8)	0.73	0.73	1.46
第34种(平台1、5、7、8)	0.78	0.78	1.56
第40种(平台2、3、5、6)	0.76	0.76	1.52
第55种(平台2、6、7、8)	0.66	0.66	1.32
第56种(平台3、4、5、6)	1.32	1.31	2.63
第65种(平台3、6、7、8)	0.68	0.68	1.36
第69种(平台4、6、7、8)	0.67	0.67	1.34
第70种(平台5、6、7、8)	0.70	0.70	1.40

4 结 论

本文基于状态空间模型的模态参数估计不确定性分析方法,分析了多种因素对模态参数不确定性水平的影响,包括采样时长、采样频率、信噪比和阻尼比在内的多种因素,并提出了利用模态不确定性水平进行传感器的优化布置的策略. 针对不确定性影响因素的研究结果表明:

1)模态参数不确定性水平随着采样时长、采样频率、信噪比和传感器数量的增大而降低,且降低的趋势逐渐平缓.

2)模态参数不确定性水平随着结构阻尼比的增大而升高.

3)对于均匀分布结构的有限传感器布置,将大部分传感器布置在结构的中上和顶部,少部分布置在中下部时,识别出的模态参数不确定性水平较低.

在模态测试的实验安排中,为了使模态参数的不确定性水平合理,本文建议:

1)在条件允许的情况下,尽量选择测量精度高的传感器进行现场数据采集,可调整振动信号的采样频率、采样时长来控制测试结果的可靠性.

2)对于阻尼比较大的结构,在进行模态分析时,可采用增加采样时长或传感器数量等措施来降低其不确定性.

3)在传感器数量不足或从经济角度考虑只有有限数量的传感器时,对于均匀分布的结构,尽量采用将传感器大部分布置在建筑物的中上和顶部位置,少部分布置在中下部的布置方案.

参考文献

[1] BRINCKER R, VENTURA C E. Introduction to operational modal analysis[M]. Chichester,West Sussex:Wiley,2015.

[2] AU S-K. Operational modal analysis: modeling, Bayesian inference, uncertainty laws [M]. Singapore: Springer Nature, Singapore Pte. Ltd., 2017,455-472.

[3] DAI K S, WANG Y, HUANG Y C, et al. Development of a modified stochastic subspace identification method for rapid structural assessment of in-service utility-scale wind turbine towers[J]. Wind Energy,2017,20(10):1687-1710.

[4] RINALDI C, CIAMBELLA J, GATTULLI V. Image-based operational modal analysis and damage detection validated in an instrumented small-scale steel frame structure[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2022,168:108640.

[5] 施袁锋,朱正言,陈鹏,等. 基于EM算法和模态形式的状态空间模型自降阶工作模态分析[J]. 工程力学,2021,38(9):15-25.

SHI Y F,ZHU Z Y,CHEN P,et al. Operational modal analysis using EM algorithm and modal-form state-space model with auto model order reduction[J]. Engineering Mechanics,2021,38(9):15-25.(in Chinese)

[6] BERNTSEN J, BRANDT A, GRYLLIAS K. Enhanced demodulation band selection based on Operational Modal Analysis (OMA) for bearing diagnostics [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2022,181:109300.

[7] 易伟建,吴高烈,徐丽. 模态参数不确定性分析的贝叶斯方法研究[J]. 计算力学学报,2006,23(6):700-705.

YI W J,WU G L,XU L. A study on the uncertainty of model parameters by Bayesian method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics,2006,23(6):700-705.(in Chinese)

[8] 颜王吉,曹诗泽,任伟新. 结构系统识别不确定性分析的Bayes方法及其进展[J]. 应用数学和力学,2017,38(1):44-59.

YAN W J,CAO S Z,REN W X. Uncertainty quantification for system identification utilizing the Bayesian theory and its recent advances [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(1): 44-59.(in Chinese)

[9] GERSCH W. On the achievable accuracy of structural system parameter estimates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 34(1):63-79.

[10] PAEZ T L,HUNTER N F. Fundamental concepts of the bootstrap

for statistical analysis of mechanical systems[J]. Experimental Techniques,1998,22(3):35-38.

[11] PINTELON R, GUILLAUME P, SCHOUKENS J. Uncertainty calculation in (operational) modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2007,21(6):2359-2373.

[12] REYNDERS E, PINTELON R, DE ROECK G. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008,22(4):948-969.

[13] DÖHLER M,LAM X B,MEVEL L. Uncertainty quantification for modal parameters from stochastic subspace identification on multi-setup measurements [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2013,36(2):562-581.

[14] YUEN K V. Structural modal identification using ambient dynamic data[D]. Hong Kong:Hong Kong University of Science and Technology,1999.

[15] KATAFYGIOTIS L S, YUEN K V. Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics,2001,30(8):1103-1123.

[16] AU S K. Uncertainty law in ambient modal identification:Part I: theory[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, 48(1/2):15-33.

[17] AU S K. Uncertainty law in ambient modal identification: Part Ⅱ: implication and field verification[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2014,48(1/2):34-48.

[18] YAN W J, KATAFYGIOTIS L S. A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. part Ⅰ: posterior most probable value and uncertainty[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2015,54/55:139-155.

[19] YAN W J, KATAFYGIOTIS L S. A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. part Ⅱ: mode shape assembly and case studies[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2015,54/55:156-171.

[20] GOVERS Y, LINK M. Stochastic model updating—covariance matrix adjustment from uncertain experimental modal data[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010, 24(3): 696-706.

[21] SHI Y F,LI B B,AU S K. Fast computation of uncertainty lower bounds for state-space model-based operational modal analysis [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 169: 108759.

[22] LJUNG L. Systems identification:theory for the user[M]. 2nd ed. New York: Pearson Education,1998.

[23] MENG L Y. Method for computation of the Fisher information matrix in the expectation-maximization algorithm[R]. Cornell university,2016.